اقتصاد سنجی

(پیشرفته)

همراه با کاربرد Stata & Eviews

جلد دوم

تألیف

دکتر علی سوری

نشر فرهنگ‌شناسی

۱۳۹۴



اقتصادسنجی (پیشرفته)، جلد دوم
همراه با کاربرد Stata & Eviews
تألیف: دکتر علی سوری
ویراستار علمی: دکتر نادر مهرگان
ناشر: نشر فرهنگ‌شناسی
چاپ اول: بهمن ۱۳۹۲
چاپ چهارم: دی ۱۳۹۴
شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
قیمت ج ۲: ۳۲۰۰۰۰ ریال
شابک ج۱: ۵-۲۲-٦۷۲٤-٦۰۰-۹۷۸ شابک ج۲: ۲-۲۳-٦۷۲٤-٦۰۰-۹۷۸
شابک دوره: ۹-۲٤-٦۷۲٤-٦۰۰-۹۷۸

mail: farhangshenasi@hotmail.com
www.farhangshenasi-pub.ir

نشر فرهنگ شناسی: تهران، خیابان شهید مفتح شمالی، نبش کوچه ششم، پلاک ۳٦٦ ، واحد۱۲
تلفن: ۸۸۷۳۰٤۵۲ ، ۸۸۵۳٤۰۰۵۲ ؛ نمابر: ۸۹۷۸۵۰۰۵۹

سرشناسه : سوری، علی.
عنوان و نام پدیدآورنده: اقتصادسنجی، همراه با کاربرد Eviews8 و Stata12/
مشخصات نشر : تهران: فرهنگ‌شناسی، ۱۳۹۴
مشخصات ظاهری : ۲ج.: جدول، نمودار .+ یک لوح فشرده.
شابک : دوره:۹-۲٤-٦۷۲٤-٦۰۰-۹۷۸؛
ج۱: ۵-۲۲-۶۷۲۴-۶۰۰- ۹۷۸؛
ج۲: ۲-۲۳-۶۷۲۴-۶۰۰-۹۷۸
یادداشت : فهرستنویسی کامل این اثر در نشانی:
http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است
یادداشت : چاپ چهارم
وضعیت فهرست نویسی: فیپای مختصر
یادداشت : واژه‌نامه
شماره کتاب‌شناسی ملی: ۳۷۸۳۰۳۸

در صورت عدم دسترسی به کتاب‌های این انتشارات، از طریق تماس با شماره تلفن ۰۲۱۸۸۷۳۵۴۵۲ و ۰۹۱۰۹۸۰۸۲۳۰ کتاب‌ها از طریق پست به تمام نقاط ایران ارسال می‌شود.
ضمناً جلد اول این کتاب به‌همراه سی‌دی نرم‌افزار Stata & Eveiws و داده‌های مورد استفاده در تخمین معاملات می‌باشد.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

جلد اول: اقتصاد سنجی مقدماتی

جلد دوم: اقتصاد سنجی پیشرفته

فهرست کاربردهای Eviews

فهرست کاربردهای Stata

عنوان	صفحه

مقدمه

نگارش کتاب حاضر در راستای تدوین مجموعه‌ای نسبتاً جامع از مباحث اقتصاد سنجی برای دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد رشته‌های اقتصاد و مالی شروع گردید. نسخه‌های قبلی این کتاب صرفاً شامل بخشی از مباحث اقتصاد سنجی بود که به‌صورت مقدماتی به چاپ رسید. اکنون مجموعه کامل‌تری از این مباحث تهیه شده است که می‌تواند نیازهای مخاطبان بیشتری را تأمین نماید. مباحث کتاب به دو بخش مقدماتی و پیشرفته تقسیم شده است که به‌ترتیب شامل جلد ۱ و ۲ می‌باشد. در تدوین این مجموعه سعی شده که اولاً مبانی نظری به‌طور کامل ارائه گردد، ثانیاً ویژگی کاربردی مباحث حفظ شود و ثالثاً همراه با کاربرد نرم‌افزارها باشد که در این خصوص از دو نرم افزار رایج، Eviews و Stata استفاده شده است.

مباحث اقتصاد سنجی دامنه وسیعی از مطالب را از سطوح مقدماتی تا پیشرفته و از مباحث کاربردی تا نظری شامل می‌شود. با توجه به گستردگی مباحث، تنظیم کتابی که بتواند نیاز مخاطبین آن را تأمین نماید، بسیار دشوار است. با توجه به این نکات، در این کتاب سعی بر آن است که با رعایت حد میانه‌ای از تئوری و کاربرد، نیاز مخاطبین تأمین گردد. بنابراین، ابتدا سعی بر این بود تا مباحث اولیه با فشردگی بیشتری بیان شود تا امکان ارائه مباحث جدیدتر فراهم گردد. هرچند که بنا به پیشنهاد همکاران، این مباحث نیز با تفصیل بیشتری ارائه گردید. از طرف دیگر، چون برآورد معادلات و تحلیل مباحث، بدون استفاده از نرم‌افزار امکان‌پذیر نیست، لذا در پایان هر مبحث، کاربرد آن با استفاده از نرم‌افزار Eviews و سپس در پایان هر فصل، کاربردهای نرم‌افزار

Stata نیز ارائه شده است. علاوه بر این، داده‌های مورد استفاده همراه با نرم‌افزار Eveiws و Stata نیز در قالب یک CD ارائه شده است تا امکان استفادهٔ همزمان از کتاب و نرم‌افزار فراهم گردد. همچنین در هر جایی که کاربردهای Eviews و Stata آمده است، نام فایل مورد استفاده نیز درج شده تا امکان انجام مستقیم آنها فراهم شود.

این کتاب در ۲ جلد و ۲۵ فصل تنظیم شده است که جلد اول شامل مباحث مقدماتی و جلد دوم شامل مباحث پیشرفته‌تر می‌باشد.

جلد اول شامل هشت فصل می‌باشد. در فصل اول مباحثی برای آشنایی مقدماتی با نرم‌افزارهای Eviews و Stata ارائه شده است. فصل دوم به کلیاتی راجع‌به مباحث پایه‌ای آمار اختصاص دارد که مورد نیاز اقتصاد سنجی می‌باشد. در این فصل مفاهیم و توزیع‌های مهم آماری که همواره در اقتصادسنجی مورد استفاده قرار می‌گیرد، ارائه شده است. فصل سوم اختصاص به مباحث پایه‌ای رگرسیون ساده دارد. در اینجا سعی شده تا مباحث رگرسیون از توزیع‌های دو متغیره شروع شود که مبانی آن در فصل دوم ارائه شده است. این شیوه کمک می‌کند تا مفهوم رگرسیون به‌عنوان امید ریاضی شرطی به‌خوبی توصیف شود. فصل چهارم و پنجم به رگرسیون دومتغیره و چندمتغیره اختصاص دارد. این تفکیک بدین دلیل است که در فصل چهارم مبانی رگرسیون چند متغیره در قالب رگرسیون دومتغیره گفته شده است و سپس در فصل پنجم، رگرسیون جندمتغیره با استفاده از جبر بردار و ماتریس ارائه شده است. بنابراین کسانی که علاقه‌ای به شیوه‌های ماتریسی ندارند می‌توانند به فصل چهارم اکتفا نمایند. علاوه‌بر مباحث مرسوم، در این دو فصل و به‌ویژه در فصل پنجم سعی شده تا ضرایب همبستگی ساده، جزئی و کانونی با تفصیل بیشتری ارائه گردد. فصل ششم اختصاص به نقض فروش کلاسیک و مباحث مربوطه به آن دارد. در فصل هفتم متغیرهای مجازی و انواع کاربردهای آن مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل هشتم نیز انواع آزمون‌های تصریح مدل و خطای تصریح ارائه گردیده است.

جلد دوم در هفده فصل تنظیم شده که شامل فصل‌های نهم تا بیست و پنجم می‌باشد. فصل نهم اختصاص به روش حداکثر درستنمایی و موضوعات و آزمون‌های پیرامون آن دارد. به‌ویژه سه آزمون معروف نسبت درستنمایی، والد و ضریب لاگرانژ به‌تفصیل بحث شده‌اند.

در فصل دهم متغیرهای ابزاری دارد که شامل مباحثی در خصوص روش IV و روش 2SLS می‌باشد. فصل یازدهم به رگرسیون غیر خطی و روش‌های تخمین و الگوریتم‌های مربوطه دارد که به‌تفصیل بحث شده‌اند.

در فصل دوازدهم الگوهای پویای تأخیری بحث شده است. در این فصل، روش‌های مختلف تخمین الگوهای پویا که با وقفه‌های توزیعی همراه هستند ارائه شده است. در پایان این فصل الگوهای ARDL نیز مورد بحث قرار گرفته است. فصل‌های سیزدهم و چهاردهم و پانزدهم به سری‌های زمانی یک متغیره اختصاص دارد. در فصل سیزدهم مدل‌های ARIMA و در فصل چهاردهم مسائل مربوط به نامانایی، ریشه واحد و هم‌انباشتگی بحث شده است. فصل پانزدهم نیز اختصاص به سری‌های زمانی فصلی دارد آزمون‌های مربوطه دارد.

در فصل شانزدهم مدل‌های تغییرپذیری ارائه شده است. این مدل‌ها شامل انواع مدل‌های ARCH و GARCH می‌باشند. در فصل هفدهم نیز سری‌های زمانی غیرخطی بررسی شده است که عمدتاً به مدل‌های تغییر جهت می‌پردازد.

فصل‌های هجدهم تا بیست و یکم اختصاص به سیستم معادلات دارد. در فصل هجدهم معادلات به‌ظاهر نامرتبط و در فصل نوزدهم سیستم معادلات همزمان و انواع روش‌های تخمین آنها ارائه شده است. در فصل بیستم و بیست و یکم نیز سری‌های زمانی چند متغیر تحت عنوان مدل‌های خود رگرسیون برداری (VAR) مدل‌های تصحیح خطای برداری (VECM) ارائه شده‌اند.

داده‌های ترکیبی یا مدل‌های پانل در فصل بیست و دوم ارائه شده است. در این فصل مدل‌های تجمیعی، اثرات ثابت و اثرات تصادفی و آزمون‌ها و روش‌های مربوطه به‌تفصیل بحث شده است.

فصل‌های بیست و سوم و بیست و چهارم در مورد متغیرهای محدود بحث می‌کند. در این دو فصل مباحثی در خصوص متغیرهای وابستهٔ محدود از قبیل مدل‌های لاجیت و پروبیت، مدل پوآسن، مدل‌های سانسور شده و منقطع بحث شده است.

فصل بیست و پنجم مباحث مقدماتی در مورد اقتصاد سنجی بیزین ارائه می‌کند. در این فصل ابتدا مباحث اولیه مانند توزیع‌های پسین و پیشین، تخمین‌زنندهٔ کلاسیک و بیزین و روش تخمین بیزین در معادلات رگرسیون ارائه شده است.

به‌هرحال گستردگی مباحث اقتصاد سنجی، امکان ارائه همهٔ مطالب را میسر نمی‌سازد. بدیهی است که هر چند سعی شده تا مطالب بیشتری ارائه شود ولی هنوز کاستی‌های زیادی وجود دارد. حجم مطالب و تنوع آن به‌گونه‌ای است که امکان وجود اشتباهات را زیاد می‌کند و بدیهی است که کاستی‌ها و نواقص این کتاب زیاد خواهد بود. بی‌تردید ارائه نظرات شما می‌تواند در بهبود و ارتقای مطالب کتاب، راهگشا باشد. منتظر دریافت نظرات ارزشمند و اصلاحی شما از طریق ایمیل souri.econometrics@yahoo.com هستم. در پایان لازم می‌دانم از همه همکارن و دانشجویانی که نظرات اصلاحی خود را به اینجانب منعکس نموده‌اند تشکر کنم. همچنین لازم است که از صبر و مساعدت همسرم قدردانی کنم که با تقبل همهٔ مسئولیت‌های زندگی، مرا در نگارش این مجموعه یاری نمودند و همچنین ویرایش و بازخوانی مطالب و صفحه‌آرایی آن را به‌عهده گرفتند، لذا این اثر را به ایشان تقدیم می‌کنم.

علی سوری

بهمن ۱۳۹۲

فصل نهم

روش حداکثر درستنمایی

۱-۹ مقدمه

مبانی روش حداکثر درستنمایی و مباحث مربوط به آن، در فصل دوم، بخش ۲-۱۶-۲ ارائه گردید. روش حداکثر درستنمایی (ML)[1] یکی از روش‌های برآورد ضرایب معادله رگرسیون است. این روش، تخمین‌زننده‌هایی را ارائه می‌دهد که از کارایی و سازگاری برخوردارند. در این فصل ابتدا تابع درستنمایی و سپس تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی را معرفی می‌کنیم. در ادامه، تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی را برای برآورد ضرایب رگرسیون ساده و چندمتغیره بحث خواهیم کرد. در پایان نیز آزمون فرضیه بر اساس نسبت درستنمایی و سایر آزمون‌های مرتبط را بررسی خواهیم کرد.

۲-۹ تابع درستنمایی

فرض کنید متغیر تصادفی Y دارای یک توزیع معین با پارامتر θ باشد که آن را با $P(Y,\theta)$ نشان می‌دهیم. از مشاهدات مربوط به Y نمونه‌ای به حجم n انتخاب می‌کنیم که نتایج حاصل از نمونه‌گیری را با مقادیر Y_1'، Y_2'، ... و Y_n' نشان می‌دهیم. احتمال مشاهده شدن این نمونه، عبارت است از:

1- maximum likelihood

$$P(Y_1=Y'_1, Y_2=Y'_2, ..., Y_n=Y'_n)$$
$$=P(Y_1=Y'_1)P(Y_2=Y'_2)...P(Y_n=Y'_n) \quad (۱-۹)$$
$$=P(Y'_1,\theta)P(Y'_2,\theta)...P(Y'_n,\theta)$$

بدیهی است که مقدار این احتمال بستگی به مقدار θ دارد، زیرا مقادیر متغیرهای تصادفی Y_1، Y_2، ... و Y_n معلوم شده‌اند و به‌جای آنها، مقادیر Y'_1، Y'_2، ... و Y'_n را قرار داده‌ایم. پارامتر θ که تعیین‌کنندهٔ مقدار این احتمال است، مجهول می‌باشد. لذا مقدار این احتمال در رابطه (۱-۹) تابعی از θ است که آن را با $L(\theta)$ نشان می‌دهیم. $L(\theta)$ بیانگر «احتمال نمایان شدن نمونهٔ مورد نظر» می‌باشد که به آن «تابع درستنمایی» می‌گوییم. تابع احتمال (۱-۹) همان تابع توزیع مشترک است که در فصل دوم راجع به آن بحث شد.

همچنین اگر Y_i دارای تابع چگالی $f(Y'_i,\theta)$ باشد، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\theta)=f(Y'_1,\theta)f(Y'_2,\theta)...f(Y'_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(Y'_i,\theta) \quad (۲-۹)$$

بنابراین، تابع درستنمایی تابعی از ضرایب (θ) می‌باشد، زیرا مقادیر متغیر تصادفی بعد از نمونه‌گیری، مشخص شده‌اند. از اینجا به بعد برای رعایت اختصار و سادگی به‌جای Y' از Y استفاده می‌کنیم:

مثال ۱-۹: فرض کنید Y توزیع دونقطه‌ای دارد:

$$P(Y)=p^{Y}(1-p)^{1-Y}$$

از این جامعه، نمونه‌ای به حجم n انتخاب می‌شود. تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(p)=P(Y_1,p)...P(Y_n,p)$$
$$=p^{Y_1}(1-p)^{1-Y_1}...p^{Y_n}(1-p)^{1-Y_n}$$
$$=p^{\sum Y_i}(1-p)^{n-\sum Y_i}$$

مثال ۲-۹: فرض کنید Y متغیر تصادفی نرمال میانگین μ و واریانس σ^2 است. تابع چگالی Y عبارت است از:

$$f(Y;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\mu,\sigma^2)=f(Y_1;\mu,\sigma^2)f(Y_2;\mu,\sigma^2)...f(Y_n;\mu,\sigma^2)$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

۳-۹ تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی

تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی از حداکثر شدن تابع درستنمایی نسبت به ضرایب (θ) به‌دست می‌آید. مبنای روش حداکثر درستنمایی بر استدلال زیر استوار است:

تابع درستنمایی بعد از معلوم شدن مقادیر Y_i فقط تابعی از ضرایب (θ) است. اما سؤال این است که از بین تمامی نمونه‌هایی که می‌توانستند نمایان شوند، چرا فقط این مقادیر از Y_i مشاهده شده‌اند. دلیل آن عبارت است از: از آنجا که این مشاهدات، بیشترین احتمال یا شانس را برای مشاهده‌شدن داشته‌اند، پس باید $L(\theta)$ بیانگر حداکثر احتمال باشد. لذا مقدار θ باید بر حسب مشاهدات نمونه (یعنی Y_iها) به‌گونه‌ای تعیین شود که احتمال مذکور را حداکثر نماید. حداکثر شدن احتمال به‌معنای حداکثر شدن تابع درستنمایی است. شرط حدکثر شدن تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\theta}_{ML}=g(Y_1,Y_2,..,Y_n) \quad (۳-۹)$$

$\hat{\theta}_{ML}$ معروف به تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی است.

معمولاً بهتر است به‌جای $L(\theta)$ از لگاریتم $L(\theta)$ استفاده کنیم، زیرا آن مقدار از θ که لگاریتم L را حداکثر نماید، L را نیز حداکثر خواهد نمود.[1]

بدیهی است که اگر تعداد ضرایب بیشتر باشد مثلاً دو ضریب θ_1 و θ_2 داشته باشیم، در این صورت تابع درستنمایی تابعی از θ_1 و θ_2 است که نسبت به هر دو مشتق گرفته و تخمین‌زنندهٔ آنها را به‌دست می‌آوریم.

۱- شرط حداکثر شدن تابع $f(x)$ به‌صورت $f'(x)=0$ است. اما اگر $\ln f(x)$ را حداکثر کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \ln f(x)}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=0 \Rightarrow f'(x)=0$$

بنابراین در هر دو حالت، شرط لازم به‌صورت $f'(x)=0$ می‌باشد.

مثال ۳-۹: در مثال ۱-۹ تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی را برای ضریب p بیابید.

ابتدا لگاریتم تابع درستنمایی را حساب می‌کنیم:

$$\ln L(p) = \sum Y_t \ln p + (n - \sum Y_t)\ln(1-p)$$

حال نسبت به p مشتق گرفته و تخمین‌زنندهٔ آن را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \sum Y_t \frac{1}{p} + \left(n - \sum Y_t\right)\frac{-1}{1-p} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{p}_{ML} = \frac{\sum Y_t}{n} = \bar{Y}$$

مثال ٤-۹: در مثال ۲-۹ تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی را برای ضریب μ و σ^2 بیابید.

ابتدا لگاریتم تابع درستنمایی را حساب می‌کنیم:

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -n \ln\sqrt{2\pi} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

حال نسبت به μ و σ^2 مشتق گرفته و تخمین‌زننده‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = -\frac{-2\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \mu)}{2\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2} - \frac{-2\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \mu)^2}{4\sigma^4} = 0$$

با حل معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\hat{\mu}_{ML} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_t}{n} = \bar{Y}$$

$$\hat{\sigma}^2_{ML} = \frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}{n}$$

٤-۹ روش حداکثر درستنمایی در رگرسیون ساده

رگرسیون سادهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad (۹-۴)$$

u_t متغیر تصادفی با توزیع نرمال است که میانگین صفر و واریانس σ^2 دارد. تابع چگالی u_t عبارت است از:

$$f(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u_t^2}{2\sigma^2}} \qquad (۹-۵)$$

چون Y_t تابع خطی از u_t است، لذا Y_t نیز توزیع نرمال با میانگین شرطی $E(Y_t|X_t) = \alpha + \beta X_t$ و واریانس شرطی $\text{var}(Y_t|X_t) = \text{var}(u_t|X_t) = \sigma^2$ دارد. تابع چگالی شرطی Y_t (به شرط معلوم بودن X_t) به صورت زیر است که در واقع با جایگذاری به جای u_t در (۵-۹) به‌دست می‌آید:

$$f(Y_t|X_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\text{var}(Y_t|X_t)}} e^{-\frac{(Y_t - E(Y_t|X_t))^2}{2\,\text{var}(Y_t|X_t)}} \qquad (۹-۶)$$

از آنجا که Y_tها مستقل از هم می‌باشند، لذا تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\begin{aligned} L(\alpha, \beta, \sigma^2) &= f(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n | X_t) \\ &= f(Y_1|X_t) f(Y_2|X_t) \ldots f(Y_n|X_t) \qquad (۹-۷) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{\sum_{t=1}^{n} u_t^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n \sigma^n} e^{-\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \alpha - \beta X_t)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

اگر نمونه‌گیری صورت گیرد آنگاه مقادیر X_t و Y_t معلوم هستند و لذا مقدار احتمال فوق فقط بستگی به سه ضریب α، β و σ^2 دارد.

همان‌طور که گفته شد، تعیین α، β و σ^2 مبتنی بر حداکثر نمودن تابع درستنمایی است. ابتدا لگاریتم تابع درستنمایی را حساب می‌کنیم:

$$\ln L(\alpha, \beta, \sigma^2) = -n \ln\sqrt{2\pi} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \alpha - \beta X_t)^2}{2\sigma^2} \qquad (۹-۸)$$

حال تابع فوق را نسبت به α، β و σ^2 حداکثر می‌کنیم:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -\frac{-2\sum(Y_t - \alpha - \beta X_t)}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum(Y_t - \alpha - \beta X_t) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = -\frac{-2\sum(Y_t - \alpha - \beta X_t)X_t}{2\sigma^2} = 0 \Rightarrow \sum(Y_t - \alpha - \beta X_t)X_t = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{-2\sum(Y_t - \alpha - \beta X_t)^2}{4\sigma^4} = 0 \Rightarrow -n + \frac{\sum(Y_t - \alpha - \beta X_t)^2}{\sigma^2} = 0$$

از معادله اول، $\hat{\alpha}=\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X}$ به‌دست می‌آید. اگر به‌جای $\hat{\alpha}$ در معادله دوم قرار داده و متغیرها را بر حسب انحراف از میانگین بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\sum\left(Y_t-(\bar{Y}-\hat{\beta}\bar{X})-\hat{\beta}X_t\right)X_t=0 \Rightarrow \sum\left((Y_t-\bar{Y})+\hat{\beta}(X_t-\bar{X})\right)X_t=0$$
$$\Rightarrow \sum(y_t-\hat{\beta}x_t)X_t=0 \Rightarrow \sum x_t y_t-\hat{\beta}\sum x_t^2=0 \Rightarrow \hat{\beta}=\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}$$

از معادله سوم نیز $\hat{\sigma}^2$ به‌دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}^2_{ML}=\frac{\sum(Y_t-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_t)^2}{n}=\frac{\sum e_t^2}{n}=\frac{RSS}{n} \qquad (۹-۹)$$

ملاحظه می‌شود که تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی برای α و β دقیقاً مشابه تخمین‌زننده‌های OLS هستند، ولی تخمین‌زنندهٔ σ^2 در اینجا به صورت $\frac{RSS}{n}$ است، در حالی که در روش OLS به‌صورت $\frac{RSS}{n-2}$ می‌باشد. بدین ترتیب تخمین‌زنندهٔ σ^2 با روش حداکثر درستنمایی دارای اریب است.

۹-۵ روش حداکثر درستنمایی در رگرسیون چند متغیره

مدل رگرسیون K متغیره را در نظر بگیرید.

$$Y_t=\sum_{i=1}^{K}\beta_i X_{it}+u_t \qquad (۹-۱۰)$$

توجه داریم که $X_{1t}=1$ می‌باشد، شکل ماتریسی این مدل عبارت است از:

$$\mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\mathbf{u} \qquad (۹-۱۱)$$

ماتریس واریانس- کوواریانس $\mathbf{u}$ عبارت است از (فصل پنجم را ببینید):

$$E(\mathbf{uu}')=\mathbf{\Sigma}=\sigma^2\mathbf{I}_n \qquad (۹-۱۲)$$

با توجه به $\mathbf{u}'\mathbf{u}=\sum u_t^2$، تابع درستنمایی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$L(\mathbf{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum u_t^2}{\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{2}\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{\sigma^2}}$$

از آنجه که $\mathbf{\Sigma}=\sigma^2\mathbf{I}_n$ است، لذا $|\mathbf{\Sigma}|=(\sigma^2)^n$ و $\mathbf{\Sigma}^{-1}=\sigma^{-2}\mathbf{I}_n$ و همچنین $|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}=\sigma^n$ می‌باشد. بنابراین، با استفاده از این روابط، ابتدا $\mathbf{u}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{u}=\mathbf{u}'\sigma^{-2}\mathbf{I}_n\mathbf{u}=\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{\sigma^2}$ را نوشته و سپس تابع درستنمایی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$L(\mathbf{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{u}} \qquad (۹-۱۳)$$

به‌جای $\mathbf{u}$ از رابطه $\mathbf{u}=\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}$ قرار می‌دهیم:

$$L(\mathbf{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n|\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})} \qquad (۹-۱۴)$$

(۹-۱۳) و (۹-۱۴) شکل عمومی تابع درستنمایی هستند که عمدتاً وابسته به ساختار ماتریس $\mathbf{\Sigma}$ و فرض مربوط به آن می‌باشد.

اگر مجدداً به‌جای $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ و $|\mathbf{\Sigma}|$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$L(\mathbf{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})}{2\sigma^2}} \qquad (۹-۱۵)$$

و یا می‌توان آن را به شکل ساده شدهٔ زیر نوشت:

$$L(\mathbf{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_t-\beta_1-\beta_2X_{2t}-\cdots-\beta_KX_{Kt})^2}{2\sigma^2}}$$

حال لگاریتم (۹-۱۵) را حساب کرده و از آن نسبت به $\mathbf{\beta}$ و σ^2 مشتق می‌گیریم:

$$\ln L(\mathbf{\beta},\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})}{2\sigma^2})$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mathbf{\beta}}=-\frac{-2\mathbf{X}'\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{X\beta}}{2\sigma^2}=0 \qquad (۹-۱۶)$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}-\frac{-1}{2\sigma^4}[(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})]=0 \qquad (۹-۱۷)$$

از معادله (۹-۱۶)، $\hat{\mathbf{\beta}}_{ML}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y})$ به‌دست می‌آید که اگر در (۹-۱۷) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$-\frac{n}{2}+\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_{ML})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_{ML})\right]=0$$

از آنجا که $\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{e}$ است، خواهیم داشت:

$$-\frac{n}{2}+\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{e}'\mathbf{e})=0\Rightarrow\hat\sigma^2_{ML}=\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{n}=\frac{\sum e_i^2}{n} \qquad (۹-۱۸)$$

بنابراین، تخمین $\hat{\boldsymbol\beta}$ مشابه روش OLS است، ولی تخمین‌زنندهٔ σ^2 با تخمین‌زنندهٔ آن از روش OLS تفاوت دارد، زیرا در OLS به‌صورت $\frac{\sum e_i^2}{n-K}$ می‌باشد.

۹-۶ روش حداکثر درستنمایی در حالت واریانس ناهمسانی (روش GLS)

در بخش‌های ۹-۴ و ۹-۵ روش حداکثر درستنمایی در حالتی که واریانس ثابت باشد، ارائه گردید. همان‌طور که در بخش ۹-۵ دیدیم، تابع درستنمایی به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\boldsymbol\beta,\boldsymbol\Sigma)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n|\boldsymbol\Sigma|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol\beta)'\boldsymbol\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol\beta)} \qquad (۹-۱۹)$$

$\boldsymbol\Sigma$ ماتریس واریانس-کوواریانس $\mathbf{u}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود(فصل پنجم):

$\boldsymbol\Sigma=E(\mathbf{u}\mathbf{u}')=\sigma^2\mathbf{I}$ در صورت واریانس همسانی

$$\boldsymbol\Sigma=E(\mathbf{u}\mathbf{u}')=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix}$$ در صورت واریانس ناهمسانی

بنابراین اگر واریانس u_i ثابت نباشد، خواهیم داشت:

$$|\boldsymbol\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_2^2\cdots\sigma_n^2 \quad , \quad \boldsymbol\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & & 0\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{bmatrix}$$

لگاریتم (۹-۱۹) عبارت است از:

$$\ln L(\boldsymbol\beta,\boldsymbol\Sigma)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln|\boldsymbol\Sigma|-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol\beta)'\boldsymbol\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol\beta) \qquad (۹-۲۰)$$

اگر عناصر ماتریس $\boldsymbol\Sigma$ معلوم باشد، در این صورت تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای $\boldsymbol\beta$، از حداقل کردن عبارت زیر به‌دست می‌آید:

$$V=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol\beta)'\boldsymbol\Sigma^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol\beta) \qquad (۹-۲۱)$$

اگر تخمین $\boldsymbol\beta$ را با $\hat{\boldsymbol\beta}$ نشان دهیم، آنگاه $\mathbf{e}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}$ بوده و V برابر با $\mathbf{e}'\boldsymbol\Sigma^{-1}\mathbf{e}$ می‌باشد که بایستی حداقل شود. توجه شود که در روش OLS عبارت $\mathbf{e}'\mathbf{e}$ حداقل می‌شود. برآورد $\boldsymbol\beta$ که از حداقل نمودن Q به‌دست می‌آید معروف به حداقل مربعات تعمیم یافته (GLS)[1] یا حداقل مربعات وزنی (WLS)[2] است. این روش، به مشاهدات وزن می‌دهد که وزن‌ها متناسب با ماتریس $\boldsymbol\Sigma^{-1}$ می‌باشد.

از آنجا که $\boldsymbol\Sigma$ ماتریس متقارن و مثبت معین است، می‌توان ماتریس $\mathbf{P}$ را به‌گونه‌ای یافت که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\boldsymbol\Sigma^{-1}=\mathbf{P}'\mathbf{P} \qquad (۹-۲۲)$$

حال در (۹-۲۱) به‌جای $\boldsymbol\Sigma^{-1}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned}V&=\mathbf{e}'\boldsymbol\Sigma^{-1}\mathbf{e}=\mathbf{e}'(\mathbf{P}'\mathbf{P})\mathbf{e}\\ &=(\mathbf{e}'\mathbf{P}')(\mathbf{P}\mathbf{e})=(\mathbf{P}\mathbf{e})'(\mathbf{P}\mathbf{e})\\ &=\mathbf{e}_*'\mathbf{e}_* \quad ; \quad \mathbf{e}_*=\mathbf{P}\mathbf{e}\end{aligned} \qquad (۹-۲۳)$$

$\mathbf{e}_*$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{e}_*=\mathbf{P}\mathbf{e}=\mathbf{P}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})=(\mathbf{P}\mathbf{y}-\mathbf{P}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})=(\mathbf{y}_*-\mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol\beta}) \quad ; \mathbf{y}_*=\mathbf{P}\mathbf{y} \ , \ \mathbf{X}_*=\mathbf{P}\mathbf{X}$$

در (۹-۲۳) به‌جای $\mathbf{e}_*$ قرار داده و V را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$V=(\mathbf{y}_*-\mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol\beta})'(\mathbf{y}_*-\mathbf{X}_*\hat{\boldsymbol\beta}) \qquad (۹-۲۴)$$

$\mathbf{X}_*$ و $\mathbf{y}_*$ مشاهدات وزنی هستند که وزن‌ها برابر با $\mathbf{P}$ می‌باشد. لذا روش حداقل مربعات معمولی (OLS) یک روش غیر وزنی است (زیرا وزن هر یک از مشاهدات برابر با ۱ است) ولی روش GLS یا WLS یک روش وزنی است که وزنها متناسب با عناصر ماتریس $\boldsymbol\Sigma$ است.

تخمین‌زنندهٔ GLS که از حداقل کردن V به‌دست می‌آید، عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=(\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_*)^{-1}(\mathbf{X}_*'\mathbf{y}_*) \qquad (۹-۲۵)$$

1- generalised least squares
2- wighted least squares

با جایگذاری به جای $\mathbf{X}_*$ و $\mathbf{Y}_*$ خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=(\mathbf{X'P'PX})^{-1}(\mathbf{X'P'Py})=(\mathbf{X'\Sigma^{-1}X})^{-1}(\mathbf{X'\Sigma^{-1}y}) \quad (۹-۲۶)$$

بنابراین، با فرض معلوم بودن Σ، تخمین‌زنندهٔ GLS را به‌دست آوردیم. اما اگر Σ معلوم نباشد آنگاه بایستی ابتدا Σ را برآورد نمود و سپس از $\hat{\Sigma}$ برای محاسبه $\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}$ استفاده کرد. از آنجا که Σ ماتریس قطری با عناصر σ_i^2 است، لذا بایستی ساختار σ_i^2 را معلوم کرده و برآورد نمود. مثلاً اگر $\sigma_i^2=\sigma^2 f(X_i)$ باشد، آنگاه Σ عبارت است از:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix}=\sigma^2\begin{bmatrix}f(X_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & f(X_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & f(X_n)\end{bmatrix} \quad (۹-۲۷)$$

اگر $\hat{\sigma}^2$ و تابع $f(X_i)$ را برآورد نمائیم، آنگاه تخمین Σ، یعنی $\hat{\Sigma}$، را خواهیم داشت. با جایگذاری در (۲۶-۹) تخمین‌زنندهٔ $\boldsymbol\beta$ با روش GLS برابر است با:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=(\mathbf{X'\hat{\Sigma}^{-1}X})^{-1}(\mathbf{X'\hat{\Sigma}^{-1}y}) \quad (۹-۲۸)$$

۶-۹ شبه R^2 [1]

در روش حداکثر درستنمایی از تابع درستنمایی یا لگاریتم آن استفاده می‌شود و لذا به‌جای R^2 از معیار دیگری به‌نام شبه R^2 استفاده می‌شود که عبارت است از:

$$R_p^2=1-\frac{\ln L_K}{\ln L_1} \quad (۹-۲۹)$$

$\ln L_K$ لگاریتم تابع درستنمایی برای مدلی که شامل K متغیر توضیحی است (البته $K-1$ متغیر توضیحی به علاوهٔ عرض از مبدأ). $\ln L_1$ لگاریتم تابع درستنمایی برای مدلی است که فقط شامل عرض از مبدأ می‌باشد. چون قدر مطلق $\ln L_K$ کوچکتر از قدرمطلق $\ln L_1$ است. لذا R_p^2 نیز بین ۰ و ۱ خواهد بود. توجه شود که چون مقدار تابع درستنمایی بین ۰ و ۱ است، لذا لگاریتم آن منفی است.

1- pseudo R^2

۷-۹ آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون

در فصل سوم و چهارم، آزمون معنی‌دار بودن رگرسیون را تحت عنوان تحلیل واریانس انجام دادیم. فرضیه مورد آزمون به‌صورت $H_0:\beta_2=\ldots=\beta_K=0$ می‌باشد که طبق آن دو مدل نامقید و مقید (یک شامل متغیرهای توضیحی و دیگری بدون متغیرهای توضیحی) را مقایسه نمودیم:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\cdots+\beta_KX_{Kt}+u_t \quad \text{مدل نامقید} \quad (۹-۳۰)$$

$$Y_t=\beta_1+u_t \quad \text{مدل مقید}$$

در فصل پنجم، برای مقایسه این دو مدل از آماره F استفاده کردیم. اما در اینجا می‌توان این دو مدل را با استفاده از نسبت درستنمایی مقایسه نمود. با توجه به رابطه $L=C(RSS)^{-\frac{n}{2}}$، نسبت درستنمایی را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم[1]:

$$\lambda=\frac{L_R}{L_{UR}}=\frac{L_1}{L_K}=\frac{C(RSS_R)^{-\frac{n}{2}}}{C(RSS_{UR})^{-\frac{n}{2}}} \quad (۹-۳۱)$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین، رابطه $\ln\lambda=\ln L_1-\ln L_K$ به‌دست می‌آید که براساس آن، رابطه زیر را تعریف می‌کنیم (L_K تابع درستنمایی با متغیرهای توضیحی و L_1 تابع درستنمایی فقط با عرض از مبدأ می‌باشد):

$$LR=-2\ln\lambda=-2(\ln_1-\ln L_K)=2(\ln L_K-\ln L_1) \quad (۹-۳۲)$$

LR معروف به نسبت درستنمایی[2] است که در ادامه راجع به آن بحث خواهیم کرد. در اینجا LR توزیع χ^2 با درجه آزادی $K-1$ دارد.

> **آزمون معنادار بودن رگرسیون با استفاده از نسبت درستنمایی در Eviews**
>
> در Eviews ابتدا مدل نامقید را تخمین می‌زنیم:
>
> LS Y C X2 X3
>
> در پنجرهٔ نتایج، رقمی که در مقابل عبارت log likelihood آمده است، بیانگر $\ln L_K$ است.
>
> مدل مقید را با دستور زیر تخمین می‌زنیم:
>
> LS Y C
>
> در اینجا نیز رقمی که در مقابل عبارت log likelihood آمده است، بیانگر $\ln L_1$ است. با داشتن $\ln L_K$ و $\ln L_1$ مقدار LR را حساب کرده و با $\chi^2_{0.05,2}$ که از جدول کای‌دو به‌دست می‌آید، مقایسه می‌کنیم. اگر $LR\geq\chi^2_{0.05,2}$ باشد، آنگاه فرضیه $H_0:\beta_2=\beta_3=0$ رد می‌شود. لذا نتایج حاصله نشان می‌دهد که رگرسیون معنادار است.

۱- این رابطه در بخش ۱۴-۹ اثبات شده است.

2- likelihooh ratio

۹-۸ تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی مقید

در صورت وجود محدودیت‌های خطی، مشابه آنچه که برای روش OLS مقید انجام شد (فصل پنجم)، می‌توان تخمین‌های مقید را در روش حداکثر درستنمایی نیز به‌دست آورد. بدین منظور مدل زیر را همراه با محدودیت‌های آن در نظر بگیرید.

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}\ ,\ \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r} \qquad (۹-۳۳)$$

$\mathbf{R}$ ماتریس $m\times K$ و $\mathbf{r}$ بردار ستونی $m\times1$ است که نشان‌دهنده وجود m محدودیت می‌باشد. لگاریتم تابع درستنمایی مانند (۱۴-۵) است که همراه با محدودیت می‌باشد.

$$\max\ \ln L(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\sigma^{-2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \qquad (۹-۳۴)$$
$$st.\ \mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}$$

برای حل مسئله فوق، تابع لاگرانژ را تشکیل داده و نسبت به ضرایب $(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$ و ضرایب لاگرانژ (λ) مشتق می‌گیریم.

$$Z=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\mathbf{y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{r}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})$$

λ بردار ستونی $m\times1$ است. با مشتق‌گیری نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ و σ^2 و λ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial Z}{\partial\boldsymbol{\beta}}=-\frac{1}{2\sigma^2}(-2\mathbf{X}'\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})-\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{0} \qquad (۹-۳۵)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^4}=0 \qquad (۹-۳۶)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial\lambda}=\mathbf{r}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \qquad (۹-۳۷)$$

معادله (۹-۳۵) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{\mathbf{X}'\mathbf{y}-\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}{\sigma^2}=\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \qquad (۹-۳۸)$$

معادله فوق را برای $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ حل می کنیم که بیانگر تخمین مقید $\boldsymbol{\beta}$ است و آن را با $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ نشان می‌دهیم:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}-\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}$$
$$=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \qquad (۷-۳۹)$$

که $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ بیانگر تخمین غیرمقید می‌باشد. حال طرفین معادله فوق را در $\mathbf{R}$ ضرب کرده و از رابطه $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\mathbf{r}$ به جای $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ قرار می دهیم:

$$\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\sigma^2[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']\lambda\ \Rightarrow\ \mathbf{r}=\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\sigma^2[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']\lambda$$

از رابطهٔ فوق، $\boldsymbol{\lambda}$ را حساب می کنیم:

$$\lambda=-\sigma^{-2}[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \qquad (۹-۴۰)$$

حال در (۹-۳۹) به‌جای λ قرار می‌دهیم:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\left[-\sigma^{-2}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})\Big]$$
$$=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \qquad (۹-۴۱)$$

اگر به‌جای $\boldsymbol{\beta}$ از معادله (۹-۴۱) در (۹-۳۶) قرار دهیم، تخمین σ^2 به‌دست می‌آید:

$$-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)}{2\sigma^4}=0\ \Rightarrow\ \hat{\sigma}_R^2=\frac{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R}{n} \qquad (۹-۴۲)$$

که $\mathbf{e}_R=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ می‌باشد.

۹-۹ شرط مرتبه دوم

در هر مسئله بهینه‌یابی شرط مرتبه اول بیانگر شرط لازم است. شرط کافی مربوط به مشتق‌های مرتبه دوم می‌باشد. بدین منظور، ابتدا مشتق‌های مرتبه دوم را حساب می کنیم:

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=-\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2}=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{u}}{\sigma^4}$$

$$\frac{\partial^2\ln L}{(\partial\sigma^2)^2}=\frac{n}{2\sigma^4}-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{\sigma^6}$$

برای بررسی شرط مرتبه دوم، ماتریس هشین $(\mathbf{H})$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'} & \frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2}\\ \frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\sigma^2} & \frac{\partial^2\ln L}{(\partial\sigma^2)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2} & -\frac{\mathbf{X}'\mathbf{u}}{\sigma^4}\\ -\frac{\mathbf{X}'\mathbf{u}}{\sigma^4} & \frac{n}{2\sigma^4}-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{\sigma^6}\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر مقدار انتظاری ماتریس $\mathbf{H}$ برای نمونه‌های بزرگ برابر است با:

$$E(\mathbf{H})=\begin{bmatrix} -\dfrac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n}{2\sigma^4} \end{bmatrix}$$

زیرا $E(\mathbf{X'u})=0$ و $E(\mathbf{u'u})=n\sigma^2$ است. با توجه به $-\dfrac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2}<0$، دترمینان $E(\mathbf{H})$ مثبت است. لذا تابع درستنمایی به‌ازای $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$ و σ^2_{ML} به حداکثر می‌رسد.[1] در واقع این شرایط بیانگر شرط تقعر برای تابع درستنمایی است. اگر تابع درستنمایی مقعر باشد آنگاه شرط کافی نیز تأمین خواهد شد. بدیهی است که هر چه تقعر کمتر باشد، تابع درستنمایی به حالت افقی نزدیکتر می‌شود و اطلاعات کمتری در این خصوص وجود دارد. به‌همین دلیل ماتریس $-E(\mathbf{H})$ را ماتریس اطلاعات می‌گویند که در بخش ۱۱–۹ راجع به آن بحث خواهیم کرد.

۱۰–۹ ماتریس امتیاز

مشتق تابع درستنمایی نسبت به پارامترها را تابع امتیاز یا ماتریس امتیاز می‌گویند. اگر فقط یک پارامتر θ داشته باشیم، تابع امتیاز را با $S(\theta)$ نشان می‌دهیم:

$$S(\theta)=\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} \qquad (۹–۴۳)$$

اگر تابع درستنمایی به‌ازای $\hat{\theta}$ به حداکثر برسد، مقدار تابع امتیاز برابر صفر خواهد بود.

$$S(\hat{\theta})=\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\hat{\theta}}=0 \qquad (۹–۴۴)$$

بدیهی است که به‌ازای $\theta\neq\hat{\theta}$، مقدار تابع امتیاز برابر صفر نخواهد شد. بنابراین، تابع امتیاز نشان‌دهندهٔ انحراف از «حداکثر تابع درستنمایی» است.

به‌عنوان مثال در رگرسیون $\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}$، لگاریتم تابع درستنمایی به‌صورت (۱۶–۹) می‌باشد که مشتق نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ (تابع امتیاز) برابر است با (برای سادگی فرض کنید که σ^2 معلوم باشد):

۱– در بهینه‌یابی مقید با دو متغیر، برای حداکثر شدن بایستی دترمینان ماتریس هشین، مثبت معین و برای حداقل شدن بایستی منفی معین باشد.

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta})=\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}=-\frac{2\mathbf{X'X}\boldsymbol{\beta}-2\mathbf{X'y}}{2\sigma^2} \qquad (۹–۴۵)$$

$$=\frac{-\mathbf{X'X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{X'y}}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{X'}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2}$$

اگر تابع امتیاز را برابر صفر قرار دهیم، تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنماییِ غیرمقید به‌دست می‌آید که به‌ازای آن تابع درستنمایی به حداکثر می‌رسد:

$$\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})=\frac{-\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}+\mathbf{X'y}}{\sigma^2}=0 \Rightarrow -(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}+\mathbf{X'y}=0 \qquad (۹–۴۶)$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}=(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$$

اما اگر تابع درستنمایی همراه با قید باشد (مثلاً $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{r}$) باشد، آنگاه برای حداکثر شدن تابع درستنمایی بایستی تابع لاگرانژ را تشکیل دهیم و سپس شرط لازم برای حداکثر شدن را بنویسیم[1]:

$$Z=\ln L(\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{r}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}-\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}=0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{r}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta}=0$$

در این حالت، ماتریس امتیاز برابر صفر نخواهد شد، زیرا طبق روابط فوق، خواهیم داشت:

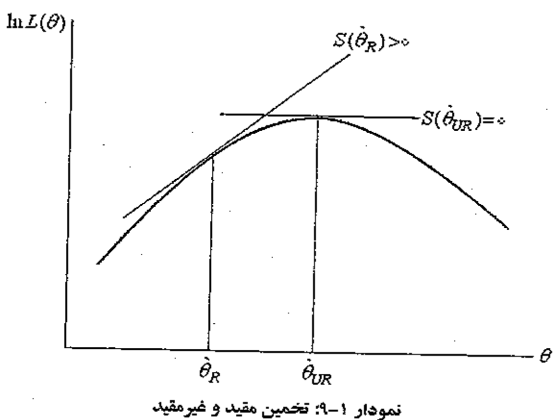
$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\beta})=\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \qquad (۹–۴۷)$$

اگر تخمین مقید $\boldsymbol{\beta}$ را با $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)=\frac{-\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R+\mathbf{X'y}}{\sigma^2}=\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \qquad (۹–۴۸)$$

بدیهی است که $\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)$ برابر صفر نیست. این وضعیت برای حالتی که یک پارامتر داشته باشیم، در نمودار زیر نشان داده شده است:

۱– بخش ۸–۹ را ببینید.



نمودار ۱-۹: تخمین مقید و غیرمقید

بنابراین انحراف تابع امتیاز از صفر، بیانگر انحراف از حداکثر تابع درستنمایی است که ممکن است ناشی از اعمال قیود باشد.

به هر حال تابع امتیاز را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$S(\hat{\beta})=\frac{X'(y-X\hat{\beta})}{\sigma^2}=\frac{X'e}{\sigma^2}\ ;\ e=y-X\hat{\beta} \tag{۹-۴۹}$$

اکنون حالتی را بررسی می‌کنیم که σ^2 مجهول باشد. در این صورت ماتریس امتیاز عبارت است از:

$$S(\theta)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \ln L}{\partial \beta}\\[2mm] \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-X'X\beta+X'y}{\sigma^2}\\[2mm] -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{(y-X\beta)'(y-X\beta)}{2\sigma^4}\end{bmatrix} \tag{۹-۵۳}$$

در اینجا θ برداری است که عناصر آن شامل β و σ^2 است.

$S(\theta)$ به‌ازای تخمین‌های غیرمقید برابر است با:

$$S(\hat{\theta}_{UR})=\begin{bmatrix}\dfrac{-X'X\hat{\beta}_{UR}+X'y}{\hat{\sigma}^2_{UR}}\\[2mm] -\dfrac{n}{2\hat{\sigma}^2_{UR}}+\dfrac{e'_{UR}e_{UR}}{2\hat{\sigma}^4_{UR}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-X'(y-X\hat{\beta}_{UR})}{\hat{\sigma}^2_{UR}}\\[2mm] -\dfrac{n}{2\hat{\sigma}^2_{UR}}+\dfrac{e'_{UR}e_{UR}}{2\hat{\sigma}^4_{UR}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{X'e_{UR}}{\hat{\sigma}^2_{UR}}\\[2mm] -\dfrac{n}{2\hat{\sigma}^2_{UR}}+\dfrac{e'_{UR}e_{UR}}{2\hat{\sigma}^4_{UR}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S(\hat{\beta}_{UR})\\ S(\sigma^2_{UR})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \tag{۹-۵۴}$$

و به‌ازای تخمین‌های مقید برابر است با:

$$S(\hat{\theta}_R)=\begin{bmatrix}\dfrac{-X'X\hat{\beta}_R+X'y}{\hat{\sigma}^2_R}\\[2mm] -\dfrac{n}{2\hat{\sigma}^2_R}+\dfrac{e'_Re_R}{2\hat{\sigma}^4_R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R'\lambda\\ 0\end{bmatrix} \tag{۹-۵۵}$$

از آنجا که $\hat{\sigma}^2_R=\dfrac{e'_Re_R}{n}$ است، خواهیم داشت:

$$S(\hat{\theta}_R)=\begin{bmatrix}\dfrac{-X'X\hat{\beta}_R}{\hat{\sigma}^2_R}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{-X'(y-X\hat{\beta}_R)}{\hat{\sigma}^2_R}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{X'e_R}{\hat{\sigma}^2_R}\\ 0\end{bmatrix} \tag{۹-۵۶}$$

با توجه به (۹-۵۶) و (۹-۵۵) خواهیم داشت:

$$S(\hat{\theta}_R)=\begin{bmatrix}S(\hat{\beta}_R)\\ S(\hat{\sigma}^2_R)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{X'e_R}{\hat{\sigma}^2_R}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R'\lambda\\ 0\end{bmatrix} \tag{۹-۵۷}$$

بنابراین، تابع امتیاز برای $\hat{\beta}_R$ عبارت است از:

$$S(\hat{\beta}_R)=\frac{X'e_R}{\hat{\sigma}^2_R}\neq 0$$

این در حالی است که تابع امتیاز به‌ازای تخمین‌های غیرمقید، طبق (۹-۵۴) برابر صفر است.

۹-۱۱ ماتریس اطلاعات

ماتریس اطلاعات که با $I(\theta)$ نشان داده می‌شود برابر با «منفی امید ریاضی ماتریس H» (مشتق‌های مرتبه دوم تابع درستنمایی) می‌باشد:

$$I(\theta)=-E[H(\theta)] \tag{۹-۵۸}$$

$H(\theta)$ که ماتریس هشین نامیده می‌شود بیانگر مشتق‌های جزئی مرتبه دوم نسبت به θ است:

$$\mathbb{H}(\theta)=\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'} \qquad (۹-۵۹)$$

به‌عنوان مثال در رگرسیون $\mathbf{y=X\beta+u}$ با فرض معلوم بودن σ^2، مشتق‌های مرتبه اول (ماتریس امتیاز) و دوم عبارتند از:

$$\text{مشتق مرتبه اول}: \mathbb{S}(\beta)=\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}=\frac{-\mathbf{X'X\beta+X'y}}{\sigma^2}=0 \qquad (۹-۶۰)$$

$$\text{مشتق مرتبه دوم}: \mathbb{H}(\beta)=\frac{\partial \mathbb{S}(\beta)}{\partial\beta'}=\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}=-\frac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2}<0 \qquad (۹-۶۱)$$

با حل مشتق مرتبه اول، تخمین β به‌دست می‌آید که آن را تخمین غیرمقید می‌گوییم که به‌ازای آن، $\mathbb{S}(\beta)=0$ است.

از طرف دیگر، طبق (۶۱-۹) ماتریس اطلاعات برابر است با:

$$\mathbb{I}(\beta)=-E[\mathbb{H}(\beta)]=-E\left(-\frac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2}\right)=\frac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2}$$

حال اگر σ^2 مجهول باشد، آنگاه مشتق مرتبه اول (ماتریس امتیاز) مشابه (۵۳-۹) است. اما ماتریس $\mathbb{H}(\theta)=\mathbb{H}(\beta,\sigma^2)$ برابر است با:

$$\mathbb{H}(\theta)=\mathbb{H}(\beta,\sigma^2)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\sigma^2}\\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{(\partial\sigma^2)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2} & -\frac{\mathbf{X'u}}{\sigma^4}\\ -\frac{\mathbf{X'u}}{\sigma^4} & -\frac{n}{2\sigma^4}-\frac{\mathbf{u'u}}{2\sigma^6}\end{bmatrix} \qquad (۹-۶۲)$$

بنابراین، ماتریس اطلاعات برای نمونه‌های بزرگ برابر است با:

$$\mathbb{I}(\theta)=\mathbb{I}(\beta,\sigma^2)=-E[\mathbb{H}(\theta)]=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{X'X}}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4}\end{bmatrix} \qquad (۹-۶۳)$$

زیرا $E(\mathbf{X'u})=0$ و $E(\mathbf{u'u})=n\sigma^2$ است.

به‌طورکلی، ماتریس اطلاعات برابر با مقدار انتظاری مشتق مرتبه دوم است. از طرف دیگر مشتق مرتبه دوم بیانگر انحنای تابع درستنمایی است. زیرا مشتق مرتبه دوم، تقعر یک تابع را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال برای یک تابع خطی، مشتق مرتبه دوم برابر صفر است. حال هر چه تقعر بیشتر شود، مشتق مرتبه دوم نیز بیشتر می‌شود. تقعر تابع درستنمایی بیانگر آن است که چقدر به تخمین خود از پارامترهای موردنظر اطمینان داریم. به‌عنوان مثال اگر تابع درستنمایی، افقی باشد،

اطلاعات ما در خصوص تخمین پارامترها، مبهم است و به‌ازای دامنهٔ زیادی از مقادیر پارامترها، تابع درستنمایی به حداکثر می‌رسد، زیرا تابع درستنمایی فقط یک مقدار دارد. حال هر چه تقعر تابع درستنمایی بیشتر شود، اطلاعات ما در خصوص تخمین پارامترهایی که از حداکثر شدن تابع درستنمایی به‌دست می‌آید، بیشتر و دقیق‌تر می‌شود.

۹-۱۲ رابطه ماتریس امتیاز و ماتریس اطلاعات

همان‌طور که دیدیم، ماتریس امتیاز برابر با مشتق مرتبه اول و ماتریس اطلاعات برابر با «منفی امید ریاضی مشتق مرتبه دوم» است. یک رابطه اساسی بین این دو وجود دارد که طبق آن، واریانس ماتریس امتیاز برابر با ماتریس اطلاعات است:

$$\text{var}(\hat{\theta})=\mathbb{I}(\theta) \qquad (۹-۶۴)$$

برای اثبات رابطه فوق، ابتدا توجه کنیم که تابع درستنمایی بیانگر تابع احتمال مشترک متغیرهای تصادفی X_1، X_2، ... و X_n است که برابر با حاصل‌ضرب توابع چگالی، یعنی $L(\mathbf{X};\theta)=f(X_n,\theta),...,f(X_1,\theta)$، می‌باشد. بنابراین یکی از خواص تابع درستنمایی به‌عنوان یک تابع احتمال این است که انتگرال روی X_1 تا X_n برابر ۱ می‌باشد.

$$\int_{\mathbf{X}} L(\mathbf{X};\theta)d\mathbf{X}=1 \qquad (۹-۶۵)$$

عبارت فوق بیانگر انتگرال چندگانه روی Xها است. از انتگرال فوق نسبت به θ مشتق می‌گیریم:

$$\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial L}{\partial\theta}d\mathbf{X}=0 \qquad (۹-۶۶)$$

عبارت زیر انتگرال را در L ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\int_{\mathbf{X}} \frac{\partial L}{\partial\theta}\frac{1}{L}Ld\mathbf{X}=0 \Rightarrow \int_{\mathbf{X}} \frac{\partial \ln L}{\partial\theta}Ld\mathbf{X}=0 \Rightarrow \int_{\mathbf{X}} \mathbb{S}(\theta)Ld\mathbf{X}=0 \qquad (۹-۶۷)$$

رابطه (۶۷-۹) بیانگر امید ریاضی تابع امتیاز است[1]. بنابراین $E[\mathbb{S}(\theta)]=0$ می‌باشد.

۱- توجه شود که اگر $f(x)$ تابع چگالی X باشد، آنگاه امید ریاضی هر تابعی مانند $g(x)$ برابر است با:

$$E[g(x)]=\int_x g(x)f(x)dx$$

حال از (۹-۶۷) مجدداً مشتق می‌گیریم:

$$\int_X \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'} L d\mathbf{X} + \int_X \frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\frac{\partial L}{\partial\theta'} d\mathbf{X} = 0 \qquad (۹-۶۸)$$

عبارت $\frac{\partial L}{\partial\theta'}$ را به‌صورت $L \frac{\partial \ln L}{\partial\theta'} = L(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\theta'})$ نوشته و به‌جای آن قرار می‌دهیم:

$$\int_X \left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta'}\right)\right] L d\mathbf{X} = 0 \qquad (۹-۶۹)$$

رابطه فوق برابر با امید ریاضی عبارت داخل کروشه است و لذا خواهیم داشت:

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta'}\right)\right] = 0 \qquad (۹-۷۰)$$

و یا

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'}\right) = E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\theta'}\right)\right] \qquad (۹-۷۱)$$

اما سمت راست برابر است با:

$$E\left[\frac{\partial \ln L}{\partial\theta}\frac{\partial \ln L}{\partial\theta'}\right] = E[\mathbf{S}(\theta)\mathbf{S}(\theta)'] = \mathrm{var}[\mathbf{S}(\theta)] \qquad (۹-۷۲)$$

زیرا $E[\mathbf{S}(\theta)] = 0$ است. سمت چپ نیز برابر با $-E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'}\right) = -E[\mathbf{H}(\theta)] = \mathbf{I}(\theta)$ است. بدین ترتیب به این نتیجهٔ مهم می‌رسیم که واریانس ماتریس امتیاز برابر با ماتریس اطلاعات است:

$$\mathrm{var}[\mathbf{S}(\theta)] = -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta\partial\theta'}\right) = \mathbf{I}(\theta) \qquad (۹-۷۳)$$

مثال ۵-۹: در معادله رگرسیون $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$ دیدیم که با فرض معلوم بودن σ^2، ماتریس امتیاز برابر است با:

$$\mathbf{S}(\hat\beta) = \frac{2\mathbf{X}'\mathbf{y} - 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat\beta}{2\sigma^2} = \frac{\mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat\beta)}{\sigma^2} = \frac{\mathbf{X}'\mathbf{e}}{\sigma^2}$$

و ماتریس اطلاعات برابر است با:

$$\mathbf{I}(\beta) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'} = \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}$$

بنابراین، واریانس $\mathbf{S}(\hat\beta)$ برابر با $\mathbf{I}(\beta)$ است:

$$\mathrm{var}[\mathbf{S}(\hat\beta)] = E[\mathbf{S}(\hat\beta)\mathbf{S}(\hat\beta)'] = \mathbf{I}(\beta) = \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}$$

۱۳-۹ نامساوی کرامر- رائو

نامساوی کرامر- رائو بیانگر آن است که واریانس هر تخمین‌زنندهٔ ناااریب برای پارامتر θ، شرط زیر را تأمین می‌کند:

$$\mathrm{var}(\hat\theta) \geq \{-E[\mathbf{H}(\theta)]\}^{-1} \qquad (۹-۷۴)$$

چون $\mathbf{I}(\theta) = -E[\mathbf{H}(\theta)]$ است، لذا نامساوی فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathrm{var}(\hat\theta) \geq \mathbf{I}(\theta)^{-1} \qquad (۹-۷۵)$$

$\mathbf{I}(\theta)^{-1}$ حداقل واریانس برای تخمین‌زننده‌های پارامتر θ است. در واقع واریانس هیچ تخمین‌زننده‌ای نمی‌تواند کمتر از $\mathbf{I}(\theta)^{-1}$ باشد. لذا هر تخمین‌زننده‌ای که حد پایین نامساوی کرامر- رائو را تأمین کند، کاراترین تخمین‌زننده خواهد بود. از آنجا که تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی، شرط مذکور را تأمین می‌کنند، لذا کاراترین تخمین‌زننده هستند.

مثال ۶-۹: تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی β که برابر با $\hat\beta_{ML} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ است دارای واریانس $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ می‌باشد. از طرف دیگر در مثال ۵-۹ دیدیم که در این حالت، ماتریس اطلاعات برابر با $\mathbf{I}(\beta) = \frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}$ است. بنابراین، نتیجه می‌شود که $\mathrm{var}(\hat\beta_{ML}) = \mathbf{I}(\beta)^{-1}$ می‌باشد.

با استفاده از بسط تابع امتیاز می‌توان ثابت نمود که تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی، مرز پایین نامساوی کرامر- رائو را تأمین می‌کند. بدین منظور تابع $\mathbf{S}(\beta)$ را حول $\hat\beta_{ML}$ بسط می‌دهیم:

$$\mathbf{S}(\beta) \cong \mathbf{S}(\hat\beta_{ML}) + \left.\frac{\partial \mathbf{S}(\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\hat\beta_{ML}} (\beta - \hat\beta_{ML}) \qquad (۹-۷۶)$$

چون $\mathbf{S}(\hat\beta_{ML}) = 0$ است، خواهیم داشت:

$$\mathbf{S}(\beta) = \left.\frac{\partial \mathbf{S}(\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\hat\beta_{ML}} (\beta - \hat\beta_{ML}) \Rightarrow \hat\beta_{ML} - \beta = \left(-\left.\frac{\partial \mathbf{S}(\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\hat\beta_{ML}}\right)\mathbf{S}(\beta) \qquad (۹-۷۷)$$

چون مشتق از $\mathbf{S}(\beta)$ برابر با مشتق مرتبه دوم تابع درستنمایی است، لذا رابطه فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat\beta_{ML} - \beta = \left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right)^{-1} \mathbf{S}(\beta)$$

واریانس $\hat{\boldsymbol\beta}_{ML}$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol\beta}_{ML})=E\left[(\hat{\boldsymbol\beta}_{ML}-\boldsymbol\beta)(\hat{\boldsymbol\beta}_{ML}-\boldsymbol\beta)'\right]$$
$$=E\left\{\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol\beta\partial\boldsymbol\beta'}\right)^{-1}\mathbf{S}(\boldsymbol\beta)\mathbf{S}(\boldsymbol\beta)'\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol\beta\partial\boldsymbol\beta'}\right)^{-1}\right\}$$
$$=\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1}E[\mathbf{S}(\boldsymbol\beta)\mathbf{S}(\boldsymbol\beta)']\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1}$$
$$=\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1}\mathrm{var}[\mathbf{S}(\boldsymbol\beta)]\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1}$$
$$=\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1}\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1}=\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)^{-1} \qquad (۹-۷۸)$$

بدین ترتیب، تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی، کاراترین تخمین‌زننده است.

۱۴-۹ آزمون نسبت درستنمایی (LR)[1]

نسبت درستنمایی یکی از معیارهایی است که برای بسیاری از آزمون‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای بررسی ماهیت نسبت درستنمایی، ابتدا حداکثر تابع درستنمایی را حساب می‌کنیم. در رگرسیون ساده دیدیم که تخمین‌زننده‌های ML برای α و β مشابه روش OLS هستند، اما تخمین‌زنندهٔ σ^2 برابر با $\hat\sigma^2_{ML}=\frac{\sum e_i^2}{n}$ است که با تخمین‌زنندهٔ OLS متفاوت است. حال به‌ازای ضرایب برآوردی، حداکثر تابع درستنمایی را حساب می‌کنیم:

$$\max\ \ln L=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\hat\sigma^2_{ML}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_t-\hat\alpha-\hat\beta X_t)^2}{2\hat\sigma^2_{ML}}$$
$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\hat\sigma^2_{ML}-\frac{\sum e_i^2}{2\hat\sigma^2_{ML}}$$
$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\frac{\sum e_i^2}{n}-\frac{n}{2} \qquad (۹-۷۹)$$
$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\frac{RSS}{n}-\frac{n}{2}$$
$$=a-\frac{n}{2}\ln RSS\ ;\ a=-n\ln\sqrt{2\pi}+\frac{n}{2}\ln n-\frac{n}{2}$$

1- likelihood ratio

برای رگرسیون چندمتغیره نیز رابطه فوق را می‌توان اثبات نمود:

$$\max\ln L=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\hat\sigma^2_{ML}-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})}{2\hat\sigma^2_{ML}}$$
$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\hat\sigma^2_{ML}-\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{2\hat\sigma^2_{ML}}\quad ;\quad \mathbf{e}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}$$
$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\frac{RSS}{n}-\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{2RSS/n}$$
$$=a-\frac{n}{2}\ln RSS\ ;\ a=-n\ln\sqrt{2\pi}+\frac{n}{2}\ln n-\frac{n}{2},$$

بنابراین، حداکثر تابع درستنمایی برابر است با:

$$\max\ L=c\,RSS^{-\frac{n}{2}}\quad ;\quad c=e^a \qquad (۹-۸۰)$$

اگر بحث فوق را برای رگرسیون چند متغیره نیز به‌کار ببریم، مجدداً نتیجه فوق به‌دست خواهدآمد که طبق آن، حداکثر درستنمایی فقط تابعی از RSS است.

حال می‌توان با استفاده از نسبت درستنمایی، آزمون‌های مورد نظر را انجام داد. به‌عنوان مثال برای آزمون محدودیت‌ها که به صورت مقایسه دو رگرسیون مقید و غیرمقید می‌باشد می‌توان از نسبت درستنمایی استفاده نمود. بدین منظور، حداکثر درستنمایی را برای رگرسیون‌های مقید و غیرمقید حساب کرده و نسبت درستنمایی را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda=\frac{\max L_R}{\max L_{UR}} \qquad (۹-۸۱)$$

L_R و L_{UR} به‌ترتیب تابع درستنمایی مقید و غیرمقید را نشان می‌دهند. حال از (۳۰-۹) در (۳۱-۹) قرار می‌دهیم:

$$\lambda=\frac{c\,RSS_R^{-n/2}}{c\,RSS_{UR}^{-n/2}}=\left(\frac{RSS_R}{RSS_{UR}}\right)^{-\frac{n}{2}} \qquad (۹-۸۲)$$

از طرفین (۸۲-۹) لگاریتم می‌گیریم:

$$LR=-2\ln\lambda=n(\ln RSS_R-\ln RSS_{UR}) \qquad (۹-۸۳)$$

ثابت می‌شود که آماره LR توزیع χ^2_m دارد که m برابر با تعداد محدودیت‌ها است.

اگر آماره LR را با آماره F که در آزمون محدودیت‌ها (فصل پنجم) استفاده می‌شود مقایسه کنیم، هر دو مبنای یکسانی دارند. بدین معنی که هر دو مبتنی بر استفاده از اختلاف RSSهای مقید و غیرمقید هستند.

همچنین می‌توان LR را به صورت زیر نیز نوشت:

$$LR=-2\ln\lambda=n\ln\left(\frac{RSS_R}{RSS_{UR}}\right)$$

$$=n\ln\left(1+\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{RSS_{UR}}\right) \qquad (9\text{-}84)$$

از طرف دیگر در فصل پنجم آماره F را برای آزمون محدودیت‌ها به‌صورت $F=\frac{n-K}{m}(RSS_R-RSS_{UR})/RSS_{UR}$ تعریف کردیم که m تعداد محدودیت‌ها و K تعداد ضرایب است. حال (۸۴–۹) را بر حسب F می‌نویسیم:

$$LR=n\ln\left(1+\frac{m}{n-K}F_{m,n-K}\right) \qquad (9\text{-}85)$$

از آنجا که $\ln(1+x)\cong x$ است[1]، لذا نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$LR\cong n\frac{m}{n-K}F \qquad (9\text{-}86)$$

که به ازای nهای بزرگ، نسبت $n\frac{m}{n-K}$ برابر m خواهد شد و لذا $LR\cong mF$ می‌باشد.

۱۵–۹ آزمون ضریب لاگرانژ

در روش حداکثر درستنمایی، برای برآورد ضرایب، از تابع درستنمایی مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم. این مشتق، تابع امتیاز نامیده می‌شود که آن را با $S(\hat{\theta})$ نشان می‌دهیم. در حالتی که فقط یک ضریب داشته باشیم، تابع امتیاز برابر است با:

$$S(\hat{\theta})=\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\theta}} \qquad (9\text{-}87)$$

۱– با استفاده از بسط تیلور خواهیم داشت:

$f(x)=\ln(1+x) \Rightarrow f(x)=f(0)+f'(0)x \Rightarrow \ln(1+x)=\ln(1+0)+\frac{1}{1+0}x=x$

به‌ازای تخمین غیرمقید $\hat{\theta}_{UR}$ شرط $S(\hat{\theta}_{UR})=0$ برقرار می‌باشد و تابع درستنمایی به حداکثر خود می‌رسد. حال بدیهی است که $S(\hat{\theta})$ به‌ازای تخمین مقید $\hat{\theta}_R$، برابر صفر نیست. اگر $S(\hat{\theta}_R)$ به صفر نزدیک باشد بدان معنا است که تخمین مقید و غیرمقید تفاوت معناداری ندارند.

از طرف دیگر دیدیم که مشتق تابع درستنمایی برای رگرسیون Kمتغیره برابر است با:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\boldsymbol\beta}}=-\frac{1}{2\sigma^2}(-2\mathbf{X}'\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{y}-\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{X}'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})}{\sigma^2}=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{e}}{\sigma^2} \qquad (9\text{-}88)$$

بنابراین، تابع امتیاز برابر است با:

$$\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta})=\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\boldsymbol\beta}}=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{e}}{\sigma^2}$$

در بخش ۱۲–۹ دیدیم که امید ریاضی تابع امتیاز برابر با صفر و واریانس آن برابر با $\mathbf{I}(\boldsymbol\beta)=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}$ است.

حال تابع امتیاز را به‌ازای تخمین‌های مقید می‌نویسیم:

$$\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R)=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{y}-\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_R}{\hat{\sigma}_R^2}=\frac{\mathbf{X}'\mathbf{e}_R}{\hat{\sigma}_R^2} \qquad (9\text{-}89)$$

حال بر اساس $\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta})$ نسبت زیر را تعریف می‌کنیم که توزیع χ^2 دارد.[1] این نسبت معروف به ضریب لاگرانژ (LM) می‌باشد:

$$LM=\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta})'[\mathrm{var}(\mathbf{S})]^{-1}\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta})=\mathbf{S}'[\sigma^{-2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})]^{-1}\mathbf{S}=\mathbf{S}'[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]\mathbf{S} \qquad (9\text{-}90)$$

به‌ازای $\hat{\boldsymbol\beta}_R$، آماره LM را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$LM=\mathbf{S}'(\hat{\boldsymbol\beta}_R)[\hat{\sigma}_R^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R) \qquad (9\text{-}91)$$

اگر تخمین‌های مقید با تخمین‌های غیرمقید یکسان باشند، آنگاه $\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R)$ به صفر نزدیک بوده و لذا مقدار LM کوچک می‌باشد. در این صورت فرضیه H_0 (یعنی وجود قیدها) رد نمی‌شود.

۱– در فصل دوم دیدیم که اگر بردار $\mathbf{z}$ توزیع نرمال با میانگین صفر داشته باشد، آنگاه $\mathbf{z}'[\mathrm{var}(\mathbf{z})]^{-1}\mathbf{z}$ توزیع χ^2 خواهد داشت.

حال در (۹۱-۹) به‌جای $\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R)$ قرار می‌دهیم:

$$LM = \left(\frac{\mathbf{X'y} - \mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}_R}{\hat\sigma_R^2}\right)' [\hat\sigma_R^2 (\mathbf{X'X})^{-1}] \left(\frac{\mathbf{X'y} - \mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}_R}{\hat\sigma_R^2}\right) \qquad (۹-۹۲)$$

$$= \frac{(\mathbf{X'y} - \mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}_R)'(\mathbf{X'X})^{-1}(\mathbf{X'y} - \mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}_R)}{\hat\sigma_R^2}$$

به‌جای $\mathbf{X'y}$ از رابطهٔ $\mathbf{X'y} - \mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR} = \mathbf{0}$ در (۹۲-۹) قرار می‌دهیم:

$$LM = \frac{(\hat{\boldsymbol\beta}_{UR} - \hat{\boldsymbol\beta}_R)'(\mathbf{X'X})(\hat{\boldsymbol\beta}_{UR} - \hat{\boldsymbol\beta}_R)}{\hat\sigma_R^2} \underset{asym}{\sim} \chi_m^2 \qquad (۹-۹۳)$$

اگر تخمین‌های مقید و غیرمقید به‌هم نزدیک باشند($\hat{\boldsymbol\beta}_{UR} \equiv \hat{\boldsymbol\beta}_R$) در این صورت آماره LM کوچک خواهد بود و فرضیه $H_0 : \mathbf{R\beta} = \mathbf{r}$ رد نمی‌شود.

از طرف دیگر اگر در (۹۲-۹) از $\mathbf{X'y} - \mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}_R = \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_R) = \mathbf{X'e}_R$ استفاده کنیم، می‌توان LM را به صورت زیر نوشت:

$$LM = \frac{(\mathbf{X'e}_R)'(\mathbf{X'X})^{-1}(\mathbf{X'e}_R)}{\hat\sigma_R^2} = \frac{\mathbf{e}_R'\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'e}_R}{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R/n} \qquad (۹-۹۴)$$

$$= n\frac{\mathbf{e}_R'\mathbf{X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'e}_R}{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R} = nR^2 \underset{asym}{\sim} \chi_m^2$$

R^2 ضریب تعیین در رگرسیون $\mathbf{e}_R$ (خطاهای رگرسیون مقید) روی Xها است[1].

۱- توجه شود که در رگرسیون $\mathbf{y} = \mathbf{X\beta} + \mathbf{u}$ که تخمین آن به‌صورت $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}$ است، ضریب تعیین برابر با $R^2 = \frac{\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}}{\mathbf{y'y}}$ است. اما صورت کسر را می‌توان چنین نوشت:

$\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = (\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})'(\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) = \hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta} = [(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}]'\mathbf{X'X}[(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}] = \mathbf{y'X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}$

بنابراین در رگرسیون $\mathbf{y}$ روی $\mathbf{X}$ ضریب تعیین برابر با $R^2 = \frac{\mathbf{y'X}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y}}{\mathbf{y'y}}$ است. مشابه این را می‌توان برای رگرسیون $\mathbf{e}$ روی $\mathbf{X}$ نوشت.

آماره LM را می‌توان بر حسب مجموع مجذور خطاهای مقید و غیرمقید نیز نوشت. بدین منظور ثابت می‌کنیم که صورت کسر LM برابر با $\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_{UR}'\mathbf{e}_{UR}$است. اثبات این رابطه را می‌توان با استفاده از تبدیل زیر انجام داد:

$$\mathbf{e}_R = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_R = \mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_R - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR} \qquad (۹-۹۵)$$

$$= (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR}) - \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR}) = \mathbf{e}_{UR} - \mathbf{X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR})$$

بنابراین، $\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R$ برابر است با:

$$\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R = [\mathbf{e}_{UR} - X(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR})]'[\mathbf{e}_{UR} - X(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR})] \qquad (۹-۹۶)$$

$$= \mathbf{e}_{UR}'\mathbf{e}_{UR} + (\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR})'\mathbf{X'X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR})$$

$$(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR})'\mathbf{X'X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R - \hat{\boldsymbol\beta}_{UR}) = \mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_{UR}'\mathbf{e}_{UR} \qquad (۹-۹۷)$$

بنابراین، اگر از رابطه فوق در (۹۳-۹) جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$LM = n\frac{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R - \mathbf{e}_{UR}'\mathbf{e}_{UR}}{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R} = n\left(1 - \frac{\mathbf{e}_{UR}'\mathbf{e}_{UR}}{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R}\right) \qquad (۹-۹۸)$$

علاوه‌بر آنچه که گفته شد، می‌توان آزمون LM را مستقیماً بر حسب ضریب لاگرانژ (λ) بیان نمود. بدین منظور رابطهٔ (۵۷-۹) را مجدداً درنظر بگیرید:

$$\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R) = \mathbf{R}'\boldsymbol\lambda \qquad (۹-۹۹)$$

طرفین رابطه فوق را در $\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R) = \mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol\lambda \qquad (۹-۱۰۰)$$

از رابطهٔ فوق λ را حساب می‌کنیم:

$$\boldsymbol\lambda = [\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R) \qquad (۹-۱۰۱)$$

λ بردار متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال است زیرا تابعی از $\hat{\boldsymbol\beta}$ است. اگر λ نزدیک به صفر باشد، آنگاه قیدها معنادار نخواهند بود. امید ریاضی λ برابر با صفر است:

$$E(\boldsymbol\lambda) = [\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}E[\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R)] = \mathbf{0} \quad , \quad E[\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol\beta}_R)] = \mathbf{0} \qquad (۹-۱۰۲)$$

واریانس λ برابر است با:

$$\begin{aligned}\text{var}(\boldsymbol{\lambda}) &= E(\boldsymbol{\lambda\lambda}')\\ &= E\left\{\left[[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)\right]\left[\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\right]\right\}\\ &= [\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}E\left[\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)'\right](\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\\ &= [\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\left[\sigma^{-2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\right](\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\\ &= \sigma^{-2}[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\end{aligned}$$

بنابراین، توزیع $\boldsymbol{\lambda}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\lambda} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{0}, \sigma^{-2}[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\right) \tag{۹-۱۰۳}$$

حال آماره LM را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$LM = \boldsymbol{\lambda}'[\text{var}(\boldsymbol{\lambda})]^{-1}\boldsymbol{\lambda} \sim \chi^2_m \tag{۹-۱۰۴}$$

با جایگذاری به جای $\text{var}(\boldsymbol{\lambda})$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}LM &= \boldsymbol{\lambda}'\left[\sigma^{-2}[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}\right]^{-1}\boldsymbol{\lambda}\\ &= \boldsymbol{\lambda}'\left[\sigma^2[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']\right]\boldsymbol{\lambda} = \sigma^2\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} \qquad (۹\text{-}۱۰۵)\\ &= \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{R}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}\right)^{-1}\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda})\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}\right)^{-1}(\mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda})\end{aligned}$$

از آنجا که $\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) = \mathbf{R}'\boldsymbol{\lambda}$ است، لذا همان نتیجه قبلی به دست می‌آید:

$$LM = \mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R)'\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{X}}{\sigma^2}\right)^{-1}\mathbf{S}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_R) \tag{۹-۱۰۶}$$

۹-۱۶ آزمون والد

آزمون والد به‌طور مستقیم به آزمون محدودیت‌ها می‌پردازد. به‌طورکلی، m محدودیت به‌صورت $\mathbf{R\beta}=\mathbf{r}$ یا $\mathbf{r}-\mathbf{R\beta}=\mathbf{0}$ داریم. این محدودیت‌ها در مدل مقید، به ازای $\hat{\boldsymbol{\beta}}_R$ برقرار هستند، اما در مدل غیرمقید به‌ازای $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ برقرار نخواهند بود. بنابراین، $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_R=\mathbf{0}$ و $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}\neq\mathbf{0}$ است. اگر محدودیت‌ها واقعاً به‌طور طبیعی برقرار باشند، آنگاه $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}=\mathbf{0}$ نیز تقریباً صفر خواهد بود. در آزمون والد، فرضیه $H_0:\mathbf{r}-\mathbf{R\beta}=\mathbf{0}$ آزمون می‌شود. برای آزمون این فرضیه، مدل غیرمقید (بدون اعمال قیدها) را تخمین می‌زنیم و از معیار $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ استفاده می‌کنیم. اگر $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ به صفر نزدیک باشد، فرضیه H_0 رد نمی‌شود. برای انجام این آزمون، ابتدا امید ریاضی و واریانس $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ را حساب می‌کنیم:

$$E(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) = \mathbf{r}-\mathbf{R}E(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) = \mathbf{r}-\mathbf{R\beta} \tag{۹-۱۰۷}$$

$$\begin{aligned}\text{var}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) &= E\left\{[(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})-(\mathbf{r}-\mathbf{R\beta})][(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})-(\mathbf{r}-\mathbf{R\beta})]'\right\}\\ &= E\left\{[-\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\boldsymbol{\beta})][-\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\boldsymbol{\beta})]'\right\}\\ &= \mathbf{R}E[(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}-\boldsymbol{\beta})']\mathbf{R}'\\ &= \mathbf{R}\,\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})\mathbf{R}' = \mathbf{R}\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' = \sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}' \qquad (۹\text{-}۱۰۸)\end{aligned}$$

زیرا واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ برابر با $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ است.

چون $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ تابع خطی از $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ است و $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ توزیع نرمال دارد، لذا $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ نیز توزیع نرمال دارد:

$$\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR} \sim \mathrm{N}\left(\mathbf{r}-\mathbf{R\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)$$

تحت فرضیه H_0، عبارت $\mathbf{r}-\mathbf{R\beta}$ برابر صفر است و لذا نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم که توزیع کای‌دو دارد:[1]

$$\begin{aligned}W &= (\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'[\text{var}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})]^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})\\ &= (\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'[\sigma^2\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}) \qquad (۹\text{-}۱۰۹)\\ &= \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})}{\sigma^2}\end{aligned}$$

این نسبت معروف به آماره والد است که توزیع کای‌دو با درجه آزادی m دارد. چون σ^2 مجهول است و با توجه به اینکه در آماره والد، از تخمین‌های غیرمقید استفاده می‌شود، لذا تخمین آن برابر با $\sigma^2_{UR}=\frac{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}{n}$ است که در این صورت، نسبت فوق دارای توزیع مجانبی کای‌دو خواهد بود. با جایگذاری به‌جای σ^2 خواهیم داشت:

$$W = n\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})'[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR})}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \tag{۹-۱۱۰}$$

اگر $\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{UR}$ به صفر نزدیک باشد، آنگاه مقدار W نیز صفر خواهد بود و فرضیه H_0 رد نمی‌شود.

۱- در فصل دوم ثابت شد که اگر بردار $\mathbf{z}$ توزیع نرمال با میانگین صفر داشته باشد، آنگاه $\mathbf{z}'[\text{var}(\mathbf{z})]^{-1}\mathbf{z}$ توزیع کای‌دو خواهد داشت.

از طرف دیگر می‌توان با استفاده از رابطه (۳۸-۹)، صورت کسر W را به‌گونه دیگری نوشت. بدین منظور، محاسبات زیر را بر اساس (۳۸-۹) انجام می‌دهیم:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR}=(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR}) \qquad (۹-۱۱۱)$$

طرفین را در $\mathbf{X'X}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{X'X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})=\mathbf{R}'[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR}) \qquad (۹-۱۱۲)$$

طرفین رابطه فوق را در $(\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})'$ ضرب می‌کنیم (البته در سمت راست به‌جای آن از (۱۱۱-۹) جایگذاری می‌کنیم):

$$(\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})'\mathbf{X'X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})=(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})'[\mathbf{R}(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{R}']^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{R}\hat{\boldsymbol\beta}_{UR}) \qquad (۹-۱۱۳)$$

از (۱۱۳-۹) در (۱۰۸-۹) جایگذاری می‌کنیم:

$$W=n\frac{(\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})'\mathbf{X'X}(\hat{\boldsymbol\beta}_R-\hat{\boldsymbol\beta}_{UR})}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \qquad (۹-۱۱۴)$$

رابطه فوق نیز نشان می‌دهد که اگر تخمین‌های مقید و غیرمقید تقریباً برابر باشند در این صورت، مقدار W صفر بوده و فرضیه H_0 رد خواهد شد.

حال از (۹۷-۹) در (۱۱۴-۹) جایگذاری می‌کنیم:

$$W=n\frac{\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R-\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \qquad (۹-۱۱۵)$$

با توجه به اینکه آماره F به‌صورت $F=\frac{n-K}{m}\frac{\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R-\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}$ است، می‌توان آماره والد را بر حسب F نوشت:

$$W=n\frac{m}{n-K}F_{m,n-K} \qquad (۹-۱۱۶)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که با افزایش حجم نمونه، W برابر با $mF_{m,n-K}$ خواهد شد.

از طرف دیگر تفاوت آماره والد و ضریب لاگرانژ در این است که مخرج کسر در اولی برابر با $\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}$ و در دومی برابر با $\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R$ است.

۱۷-۹ مقایسه آماره‌های نسبت درستنمایی، والد و ضریب لاگرانژ

در بخش‌های قبلی، سه آمارهٔ W ،LR و LM را تعریف کردیم که به‌طور خلاصه عبارتند از:

$$LR=-2\ln\lambda=n\ln\left(\frac{RSS_R}{RSS_{UR}}\right)=n\ln\left(\frac{\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}\right)$$
$$=n\ln\left(1+\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{RSS_{UR}}\right)=n\ln\left(1+\frac{W}{n}\right) \qquad (۹-۱۱۷)$$

$$W=n\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{RSS_{UR}}=n\frac{\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R-\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}{\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}} \qquad (۹-۱۱۸)$$

$$LM=n\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{RSS_R}=n\frac{\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R-\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}}{\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R} \qquad (۹-۱۱۹)$$

به‌منظور مقایسه این سه آزمون، ابتدا LR را با استفاده از بسط تیلور با تقریب مرتبهٔ دو می‌نویسیم[1]:

$$LR=n\ln\left(1+\frac{W}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\cong W-\frac{W^2}{2n} \qquad (۹-۱۲۰)$$

مقایسه LR و W نشان می‌دهد که $LR\le W$ است.

از طرف دیگر، مقایسه LM با W نشان می‌دهد که $LM\le W$ است، زیرا صورت کسرها برابر، ولی مخرج کسر LM بزرگتر است ($\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R\ge\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR}$).

بدین ترتیب از مقایسه این سه آماره، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:[2]

$$LM\le LR\le W \qquad (۹-۱۲۱)$$

۱- بسط مرتبهٔ دو عبارت است از:

$$LR=f(W)\cong f(0)+f'(0)(W-0)+\frac{f''(0)}{2}(W-0)^2=W-\frac{W^2}{2n}$$

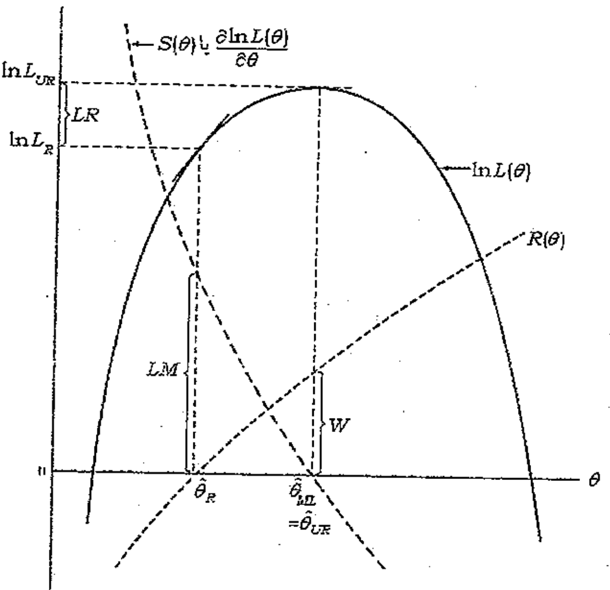
۲- با بسط مرتبهٔ دوم LR، می‌توان ثابت نمود که $LM\le W$ است. ابتدا LR را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$LR=n\ln\frac{RSS_R}{RSS_{UR}}=n\ln\frac{1}{1-\frac{LM}{n}}=n\ln\frac{n}{n-LM}$$

بسط مرتبه دوم LR حول $LM=0$ عبارت است از:

$$LR=\left(n\ln\frac{n}{n+0}\right)+n\frac{\partial LR}{\partial LM}\bigg|_{LM=0}(LM-0)+\frac{n}{2}\frac{\partial^2 LR}{\partial LM^2}\bigg|_{LM=0}(LM-0)^2=LM+2\frac{LM^2}{n}\Rightarrow LR\ge LM$$

وضعیت این سه آماره در نمودار زیر نشان داده شده است (این نمودار با فرض اینکه فقط یک پارامتر داریم، ترسیم شده است):



نمودار ۲-۹: آماره‌های نسبت درستنمایی (LR)، والد (W) و ضریب لاگرانژ (LM)

منحنی $\ln L(\theta)$ لگاریتم تابع درستنمایی است که به‌ازای $\hat{\theta}_{ML}$ به حداکثر می‌رسد که بیانگر «حداکثر غیرمقید» است و لذا $\hat{\theta}_{UR}=\hat{\theta}_{ML}$ می‌باشد. همچنین $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}$ (یا $S(\theta)$) که مشتق $\ln L(\theta)$ را نشان می‌دهد، یک منحنی نزولی است که بیانگر شرط لازم برای حداکثر شدن تابع درستنمایی است. تأمین شرط کافی مستلزم آن است که $\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}$ نزولی باشد، زیرا مشتق مرتبهٔ دوم $\ln L(\theta)$ بایستی منفی باشد. شرط لازم به‌ازای $\hat{\theta}_{ML}$ تأمین شده است ($S(\hat{\theta}_{UR})=0$ و $S(\hat{\theta}_R)\geq 0$). از طرف دیگر شرط لازم برای حداکثر شدن تابع درستنماییِ مقید، به‌ازای $\hat{\theta}_R$ تأمین می‌شود. $R(\theta)$ بیانگر قیدها است که به‌صورت $R\theta-r=0$ می‌باشند. بدیهی است که به‌ازای $\hat{\theta}_R$، قیدها تأمین می‌شوند و برابر صفر می‌باشند، ولی به‌ازای $\hat{\theta}_{UR}$ برابر صفر نیست ($R(\hat{\theta}_R)=0$ و $R(\hat{\theta}_{UR})\geq 0$).

به‌طور خلاصه، سه آماره مذکور به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱- آماره نسبت درستنمایی (LR) بیانگر «تفاضل تابع درستنمایی» به‌ازای «تخمین‌های مقید و غیرمقید» است.

۲- آماره والد (W) بیانگر «انحراف قید از صفر» به‌ازای «تخمین غیرمقید» است (یعنی میزان تأمین نشدن قید به‌ازای تخمین غیرمقید).

۳- آماره ضریب لاگرانژ (LM) بیانگر «انحراف شرط لازمِ غیرمقید» به‌ازای «تخمین مقید» است (یعنی میزان تأمین نشدن شرط حداکثر تابع درستنمایی به‌ازای $\hat{\theta}_R$).

بدیهی است که اگر قید خطی $R\beta=r$ برقرار باشد، آنگاه رگرسیون مقید و غیرمقید، یکسان خواهند بود. در این صورت، $\hat{\theta}_R$ به $\hat{\theta}_{UR}$ نزدیک می‌شود و هر سه آماره نیز به صفر نزدیک خواهند شد که فرضیه H_0 را رد نمی‌کنند.

نکته دیگری که در رابطه با آماره‌های LR و W می‌توان گفت این است که با افزایش حجم نمونه، با هم یکسان خواهند بود. بدین منظور، LR را درنظر بگیرید:

$$LR=-2\ln\lambda=n\ln(1+\frac{W}{n}) \qquad (۹-۱۲۲)$$

رابطه فوق را با افزایش n می‌توان به‌صورت زیر نوشت[1]:

$$LR=-2\ln\lambda=W \qquad (۹-۱۲۳)$$

بنابراین، با افزایش حجم نمونه، نتایج حاصل از هر سه روش، یکسان می‌باشد.

مسائل

۱-۹ متغیر Y را در نظر بگیرید که مقادیر صفر و یک را طبق تابع احتمال زیر اختیار می‌نماید:

$$f(Y)=\theta^{Y}(1-\theta)^{(1-Y)} \quad ; \; 0\leq\theta\leq 1 \quad , \quad Y=0,1$$

الف) امید ریاضی و واریانس Y را حساب کنید.

ب) اگر یک نمونه تصادفی n تایی از این توزیع انتخاب کنیم تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای θ چیست؟

۱- با توجه به رابطه $LR=n\ln(1+W/n)$، حد عبارت سمت راست، با استفاده از قاعده هوپیتال برابر با W است.

$$\lim_{n\to\infty} LR=\lim_{n\to\infty} n\ln(1+\frac{W}{n})=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+W/n)}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-W/n^2)}{(-1/n^2)}=W$$

بنابراین، با افزایش n رابطه $LR=-2\ln\lambda=W$ برقرار است که می‌توان آن را به‌صورت $\lambda=e^{-\frac{W}{2}}$ نوشت.

ج) واریانس تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی را حساب کنید.

۹-۲ نمونه‌ای شامل مشاهدات $x=1,2,3,4,5$ از توزیع نمایی با تابع چگالی $f(X)=\frac{1}{\theta}e^{-X/\theta}$ انتخاب شده است.

الف) تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای θ را به‌دست آورید.

ب) مقدار تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی را محاسبه کنید.

ج) امید ریاضی و واریانس تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی را حساب کنید.

۹-۳ رابطه بین آماره‌های نسبت درستنمایی، والد و ضریب لاگرانژ که به‌صورت $LM \leq LR \leq W$ می‌باشد، اثبات نمایید؟

۹-۴ در رگرسیون $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ که u_t توزیع نرمال دارد، امید ریاضی و واریانس $\hat{\sigma}^2_{OLS}$ و $\hat{\sigma}^2_{ML}$ را حساب کرده و مقایسه نمایید.

۹-۵ در معادله رگرسیون $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ توزیع جملات خطا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(u_t)=\lambda u_t^{-(1+\lambda)} \quad ; \quad 1\leq u_t<\infty \quad , \quad \lambda\geq 2$$

تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی را برای α، β و λ به‌دست آورید.

۹-۶ رابطه نسبت درستنمایی با آماره F را در آزمون محدودیت‌ها، به‌دست آورید.

۹-۷ ثابت کنید که برای معادله $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ نسبت درستنمایی فقط تابعی از مجموع خطاها (RSS) است.

۹-۸ ثابت کنید که $LR\geq W$ است (LR نسبت درستنمایی و W آماره والد است).

۹-۹ ثابت کنید که LM (ضریب لاگرانژ) برابر با nR^2 است (R^2 ضریب تعیین است که از برازش باقیمانده‌ها (e_t) روی متغیرهای توضیحی(X_{kt} ها) به‌دست می‌آید.

۹-۱۰ فرض کنید X توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 دارد. فرض کنید σ^2 معلوم باشد($\sigma^2=b^2$). می‌خواهیم فرضیه $H_0:\mu=a$ را در مقابل $\mu\neq a$ آزمون کنیم.

الف) نسبت درستنمایی (LR) را تشکیل دهید.

ب) آماره والد را برای آزمون فرضیه H_0 محاسبه کنید.

ج) آماره ضریب لاگرانژ را برای آزمون فرضیه H_0 حساب کنید.

د) اگر $\sigma^2=4$ و $H_0:\mu=2$ و $n=30$ باشد، بندهای الف، ب و ج را حل کنید.

۹-۱۱ X توزیع دونقطه‌ای (برنولی) به‌صورت $P(x)=p^x(1-p)^{1-x}$ با $x=0/1$ دارد. از این جامعه، نمونه‌ای به حجم . انتخاب می‌کنیم تا فرضیه $H_0:p=p_0$ را آزمون کنیم، آماره‌های LR، W و LM را برای آزمون این فرضیه تشکیل دهید.

فصل دهم

متغیرهای ابزاری(IV) و حداقل مربعات دومرحله‌ای(2SLS)

۱۰-۱ مقدمه

این فصل اختصاص به مباحثی در مورد متغیرهای توضیحی درون‌زا دارد. متغیرهای توضیحی درون‌زا می‌تواند با u_t همبستگی پیدا کند و تخمین‌ها را دچار مشکل سازد. همچنین ممکن است به‌دلیل نداشتن اطلاعات و یا به هر دلیل دیگری، یک یا چند متغیر توضیحی را حذف کنیم. در این شرایط تخمین‌زننده‌های OLS دچار اریب و ناسازگاری می‌شوند.

یکی از رویکردها برای حل مسئله درون‌زایی و حذف متغیرهای توضیحی، استفاده از متغیرهای ابزاری (IV) است. علاوه بر این، روش حداقل مربعات دومرحله‌ای (2SLS) نیز روش دیگری برای این مشکل است. در این فصل جزئیات این روش‌ها و خصوصیات تخمین‌زننده‌های IV و 2SLS را بررسی می‌کنیم. این دو روش از جملهٔ روش‌هایی هستند که در تخمین معادلات همزمان نیز مورد استفاده می‌باشند که در فصل نوزدهم بررسی خواهند شد.

۱۰-۲ متغیرهای ابزاری (IV) در رگرسیون ساده

همان‌طور که اشاره شد گاهی‌اوقات متغیرهای توضیحی با u همبستگی دارند و یا ممکن است به هر دلیلی، یکی از متغیرهای توضیحی را حذف کنیم. حذف متغیر توضیحی موجب اریب سایر ضرایب می‌شود.[1] در مواجهه با اریب متغیرهای حذف شده، سه گزینه داریم:

۱- فصل هشتم، مبحث حذف متغیرهای مهم را ببینید.

۱- می‌توان پیامدهای ناشی از مشکل اریب و ناسازگاری را نادیده گرفت،

۲- می‌توان به‌دنبال یافتن یک متغیر جایگزین برای «متغیر مشاهده‌نشده» بود و

۳- می‌توان فرض کرد که متغیر حذف شده در طول زمان تغییر نمی‌کند و لذا از مدل اثرات ثابت یا روش تفاضل‌گیری استفاده نمود (فصل بیستم).

بدیهی است که مورد اول وقتی قابل استفاده است که مقدار برآوردی و اریب آن، هم‌جهت باشند. برای مثال اگر یک پارامتر مثبت را تخمین می‌زنیم که اریب آن به سمت صفر است، در این صورت اگر به یک تخمین مثبت و معنادار برسیم، چون اریب آن به سمت صفر است، لذا می‌توان گفت که اثر آن را کمتر از حد برآورد کرده‌ایم (مانند اثر آموزش بر دستمزد). ولی اگر اریب به سمت بالا باشد، ممکن است به یک تخمین بسیار بزرگ برسیم که نمی‌توان هیچ قضاوت درستی در مورد آن نمود.

راه‌حل متغیر جایگزین می‌تواند به نتایج رضایت‌بخشی برسد، مشروط بر اینکه بتوانیم یک جانشین مناسب پیدا کنیم. این روش در تلاش است تا مشکل متغیر حذف شده را با معرفی یک متغیر جانشین، حل کند.

بحث را با مثال تعیین دستمزد ادامه می‌دهیم. فرض کنید دستمزد تابعی از سطح آموزش (تحصیلات) و توانایی است. تحصیلات قابل اندازه‌گیری است، ولی توانایی را نمی‌توان به‌صورت کمّی و دقیق اندازه‌گیری نمود.

$$W_t = \alpha + \beta E_t + \gamma A_t + v_t \qquad (۱۰-۱)$$

E_t و A_t به‌ترتیب آموزش و توانایی را نشان می‌دهند.

اگر متغیر جانشین برای توانایی نداشته باشیم، در این صورت معادله زیر را خواهیم داشت:

$$W_t = \alpha + \beta E_t + u_t \qquad (۱۰-۲)$$

اکنون متغیر A_t در u_t لحاظ شده است. اگر مدل فوق را با OLS برآورد کنیم، آنگاه تخمین β دچار اریب و ناسازگاری خواهد بود، مشروط بر اینکه E_t و A_t همبستگی داشته باشند. به‌عبارت دیگر حذف A_t موجب وابستگی E_t و u_t می‌شود که فرض «استقلال» متغیر توضیحی از جملهٔ خطا را نقض می‌کند. شکل عمومی معادله فوق به‌صورت $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ است که در آن، X_t ممکن است با u_t وابستگی داشته باشد.

روش متغیرهای ابزاری بر این مبنا استوار است که آیا X با u همبستگی دارد یا نه. اگر همبستگی نداشته باشند، می‌توان از OLS استفاده نمود. به‌هرحال به‌منظور دستیابی به تخمین‌زننده‌های سازگار برای α و β بایستی X و u مستقل باشند.

اگر X و u وابستگی داشته باشند، نیاز به اطلاعات بیشتری داریم تا با استفاده از آن بتوانیم تخمین‌های بهتری به‌دست آوریم. تصور کنید که متغیر قابل‌مشاهدهٔ Z را داریم که دو شرط زیر را تأمین می‌کند.

۱- Z با u همبستگی ندارد.

$$\text{cov}(Z,u)=0$$

۲- Z با X همبستگی دارد.

$$\text{cov}(Z,X)\neq 0$$

در این صورت، Z را یک متغیر ابزاری برای X می‌گویند. گاهی‌اوقات به‌جای شرایط فوق، به‌اختصار می‌گویند Z برون‌زا است.

در خصوص متغیرهای حذف شده، بحث فوق بدان معنا است که Z نباید اثر ناچیزی بر Y داشته باشد و همچنین Z نباید همبستگی با سایر عواملی (یعنی u) داشته باشد که بر Y تأثیر می‌گذارند.

لازم است بین دو شرط مذکور، تفاوت مهمی را در نظر بگیریم. از آنجا که شرط اول بیانگر کوواریانس بین Z و u است که u غیر قابل مشاهده است، لذا نمی‌توان آن را بررسی یا آزمون نمود. در واقع این یک فرض است که با توسل به رفتار اقتصادی یا هر چیز دیگری از آن استفاده می‌کنیم.

در مقابل، شرط دوم را که بیانگر همبستگی Z و X در جامعه است، می‌توان آزمون کرد. ساده‌ترین راه، تخمین رگرسیون X روی Z است.

$$X_t = \pi_0 + \pi_1 Z_t + \varepsilon_t \qquad (۱۰-۳)$$

که $\pi_1 = \dfrac{\text{cov}(X,Z)}{\text{var}(Z)}$ می‌باشد. آزمون فرضیه $H_0: \pi_1 = 0$ برای معنادار بودن همبستگی X و Z می‌باشد.

به‌هرحال اگر شرایط ۱ و ۲ تأمین شود می‌توان Z را به‌عنوان متغیر ابزاری برای تخمین β به‌کار برد. می‌توان ثابت کرد که استفاده از Z به تخمین سازگار β منجر می‌شود. بدین منظور اگر کوواریانس Z و Y را حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$$\begin{aligned}\text{cov}(Z,Y) &= E\left[(Z_t-\overline{Z})(Y_t-\overline{Y})\right]\\ &= E\left\{(Z_t-\overline{Z})[\beta(X_t-\overline{X})+(u_t-\overline{u})]\right\}\\ &= \beta\,\text{cov}(Z,X)+\text{cov}(Z,u)\\ &= \beta\,\text{cov}(Z,X) \quad , \quad \text{cov}(Z,u)=0\end{aligned} \tag{۱۰-۴}$$

بنابراین، با استفاده از رابطه فوق، β برابر است با:

$$\beta = \frac{\text{cov}(Z,Y)}{\text{cov}(Z,X)} \tag{۱۰-۵}$$

اگر از داده‌های نمونه استفاده کنیم، آنگاه تخمین‌زنندهٔ IV عبارت است از:

$$\hat{\beta}_{IV} = \frac{\sum z_t y_t / n}{\sum z_t x_t / n} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t x_t} \tag{۱۰-۶}$$

حروف کوچک برحسب انحراف از میانگین هستند با تخمین β می‌توان تخمین α را نیز به‌دست آورد:

$$\hat{\alpha}_{IV} = \overline{Y} - \hat{\beta}_{IV}\overline{X} \tag{۱۰-۷}$$

برای نشان دادن سازگاری تخمین‌زنندهٔ IV می‌توان از قانون اعداد بزرگ استفاده نمود. بدین منظور $\hat{\beta}_{IV}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\beta}_{IV} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t x_t} = \frac{\sum z_t Y_t}{\sum z_t x_t} = \sum w_t Y_t \quad ; \quad w_t = \frac{z_t}{\sum z_t x_t}$$

به‌جای Y_t قرار می‌دهیم[1]:

$$\hat{\beta}_{IV} = \beta + \sum w_t u_t \tag{۱۰-۸}$$

۱- توجه شود که روابط زیر برقرار است:

$$\sum w_t = \frac{\sum z_t}{\sum z_t x_t} = 0 \quad , \quad \sum z_t = 0 \quad , \quad \sum w_t^2 = \sum\left(\frac{z_t}{\sum z_t x_t}\right)^2 = \frac{\sum z_t^2}{(\sum z_t x_t)^2}$$

$\hat{\beta}_{IV}$ تخمین‌زنندهٔ سازگار β است، زیرا:

$$\text{plim}\,\hat{\beta}_{IV} = \beta + \frac{\text{plim}\sum z_t u_t / n}{\text{plim}\sum z_t x_t / n} = \beta + \frac{\text{cov}(Z,u)}{\text{cov}(Z,X)} = \beta$$

طبق شرایط ۱ و ۲، $\text{cov}(Z,u)=0$ و $\text{cov}(Z,X)\neq 0$ است.

روش دیگر برای یافتن تخمین‌زننده‌های IV این است که از معادلات نرمال استفاده کنیم. همان طور که در فصل سوم دیدیم، حداقل نمودن $\sum e_t^2$ برای معادله $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ منجر به معادلات نرمال به‌صورت زیر می‌شود:

$$\sum e_t = 0 \tag{۱۰-۹}$$

$$\sum e_t X_t = 0$$

اگر در معادلات نرمال به‌جای X_t از جانشین آن یعنی Z_t استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum e_t = 0 \tag{۱۰-۱۰}$$

$$\sum e_t Z_t = 0$$

با جایگذاری به‌جای $e_t = Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t$ خواهیم داشت:

$$\sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t) = 0 \tag{۱۰-۱۱}$$

$$\sum (Y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X_t)Z_t = 0$$

با حل معادله اول، $\hat{\alpha}_{IV} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$ به‌دست می‌آید که با جایگذاری در معادله دوم، $\hat{\beta}_{IV}$ به‌دست می‌آید که مشابه (۶-۱۰) است.

۳-۱۰ واریانس تخمین‌زنندهٔ IV

طبق (۸-۱۰) تخمین‌زنندهٔ IV عبارت است از:

$$\hat{\beta}_{IV} = \beta + \sum w_t u_t \quad , \quad w_t = \frac{z_t}{\sum z_t x_t}$$

امید ریاضی $\hat{\beta}_{IV}$ برابر است با:

$$E(\hat{\beta}_{IV}) = \beta + \sum E(w_t u_t) = \beta$$

زیرا $E(w_t u_t) = \frac{E(z_t u_t)}{\sum z_t x_t} = 0$ است.

واریانس $\hat{\beta}_{IV}$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{IV}) = E(\hat{\beta}_{IV}-\beta)^2 = E(\sum w_t u_t)^2$$
$$=\sum_t E(w_t^2 u_t^2)+\sum_t\sum_{\substack{s\\ t\neq s}} w_t w_s E(u_t u_s)=\sum_t E(w_t^2 u_t^2)$$

طبق فرض عدم‌خودهمبستگی، $E(u_t u_s)=0$ است.

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{IV}) = \sum w_t^2 E(u_t^2) = \sum w_t^2\sigma^2 = \sigma^2 \frac{\sum z_t^2}{(\sum z_t x_t)^2} \qquad (10-12)$$

اگر n افزایش یابد، آنگاه واریانس مجانبی $\hat{\beta}_{IV}$ برابراست با[1]:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{IV})=\sigma^2\frac{\sigma_z^2}{n\sigma_{xz}^2} \qquad (10-13)$$

که σ_z^2 واریانس Z و σ_{xz} کوواریانس X و Z می‌باشد. همچنین با استفاده از مجذور ضریب همبستگی X و Z، یعنی $\rho_{xz}^2=\frac{\sigma_{xz}^2}{\sigma_x^2\sigma_z^2}$، واریانس $\hat{\beta}_{IV}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{IV})=\frac{\sigma^2}{n\sigma_x^2\rho_{xz}^2} \qquad (10-14)$$

برآورد واریانس $\hat{\beta}_{IV}$ نیاز به $\hat{\sigma}^2$ دارد که برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum e_t^2}{n-2}\ ,\ e_t=Y_t-\hat{\alpha}_{IV}-\hat{\beta}_{IV}X_t \qquad (10-15)$$

همچنین ρ_{xz}^2 مجذور ضریب همبستگی بین X و Z است که با برآورد رگرسیون X روی Z به‌دست می‌آید و آن را با R_{xz}^2 (ضریب تعیین) نشان می‌دهیم.

از طرف دیگر، برآورد $n\sigma_x^2$ برابر با $\sum x_t^2$ است.[2] بدین‌ترتیب تخمین واریانس $\hat{\beta}_{IV}$ برابر است با:

۱- با افزایش n صورت کسر برابر با $n\sigma_z^2$ و مخرج کسر برابر با $n^2\,\mathrm{cov}(Z,X)$ می‌باشد.

۲- واریانس X عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_x^2=\frac{\sum x_t^2}{n}=\frac{\sum(X_t-\bar{X})^2}{n}=\frac{\sum X_t^2}{n}-\bar{X}^2$$

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{IV})=\frac{1}{R_{xz}^2}\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_t^2} \qquad (10-16)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که واریانس تخمین‌زنندهٔ IV در صورتی با واریانس تخمین‌زنندهٔ OLS یکسان است که $R_{xz}^2=1$ باشد. در این صورت $\hat{\beta}_{OLS}=\hat{\beta}_{IV}$ خواهد بود. علاوه بر این هرگاه Z جانشین خوبی برای X نباشد، در این صورت R_{xz}^2 کوچک خواهد شد و موجب بزرگ شدن واریانس $\hat{\beta}_{IV}$ می‌شود و لذا تمامی آزمون‌های فرضیه و استنتاج‌های آماری را بی‌اعتبار می‌کند.

۱۰-٤ ضریب تعیین (R^2)

طبق تعریف، ضریب تعیین برابر با نسبت تغییرات توضیح داده شده (ESS) به کل تغییرات (TSS) است:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{RSS}{TSS} \qquad (10-17)$$

توجه شود که RSS برابر با مجموع مجذور باقیمانده‌های IV است که از معادله $e_t=Y_t-\hat{\alpha}_{IV}-\hat{\beta}_{IV}X_t$ حساب می‌شوند. از طرف دیگر چون $RSS = TSS - ESS$ است، وقتی از تخمین‌زننده‌های IV استفاده می‌کنیم، امکان دارد که ESS بزرگ‌تر از TSS شود و لذا RSS منفی گردد.[1]

چون نمی‌توان TSS را بر حسب مجموع ESS و RSS تجزیه نمود، لذا R^2 تفسیر معمولی خود را ندارد. علاوه بر این نمی‌توان R^2 را برای محاسبه آماره F جهت معنادار بودن رگرسیون، مورد استفاده قرار داد.

۱- توجه شود که با استفاده از $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ رابطه زیر را داریم:

$$\mathrm{var}(Y)=\beta^2\,\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(u)+2\beta\,\mathrm{cov}(X,u)$$

طبق رابطه فوق، کل تغییر Y برابر است با:

$$TSS=ESS+RSS+2\beta\sum x_t u_t$$

چون جمله آخر برابر صفر نیست (زیرا به‌جای $\sum e_t X_t=0$ از $\sum e_t Z_t=0$ استفاده می‌شود)، لذا رابطه $TSS=ESS+RSS$ برقرار نمی‌باشد.

۱۰-۵ متغیرهای ابزاری در رگرسیون چند متغیره

ابتدا برای سادگی، رگرسیون دو متغیره را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + u_t \qquad (۱۰-۱۸)$$

فرض کنید که X_{3t} با u_t همبستگی دارد و لذا بایستی برای آن یک متغیر ابزاری معرفی کنیم. با معرفی Z_{3t} به‌جای X_{3t}، معادلات نرمال عبارتند از:

$$\sum e_t = 0 \Rightarrow \sum (Y_t - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_{2t} - \hat\beta_3 X_{3t}) = 0$$
$$\sum e_t X_{2t} = 0 \Rightarrow \sum (Y_t - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_{2t} - \hat\beta_3 X_{3t}) X_{2t} = 0 \qquad (۱۰-۱۹)$$
$$\sum e_t Z_{3t} = 0 \Rightarrow \sum (Y_t - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_{2t} - \hat\beta_3 X_{3t}) Z_{3t} = 0$$

اگر از معادله اول $\hat\beta_1$ را حساب کنیم، رابطه $\hat\beta_{1,IV} = \bar Y - \hat\beta_{2,IV}\bar X_2 - \hat\beta_{3,IV}\bar X_3$ به‌دست می‌آید که با جایگذاری در معادله دوم و سوم و ساده کردن آن، خواهیم داشت:

$$\sum x_{2t} y_t - \hat\beta_2 \sum x_{2t}^2 - \hat\beta_3 \sum x_{2t} x_{3t} = 0 \qquad (۱۰-۲۰)$$
$$\sum z_{3t} y_t - \hat\beta_2 \sum x_{2t} z_{3t} - \hat\beta_3 \sum x_{3t} z_{3t} = 0$$

شکل ماتریسی معادلات فوق عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \sum x_{2t}^2 & \sum x_{2t}x_{3t} \\ \sum x_{2t}z_{3t} & \sum x_{3t}z_{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat\beta_{2,IV} \\ \hat\beta_{3,IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{2t}y_t \\ \sum z_{3t}y_t \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۲۱)$$

با حل معادلات فوق، تخمین‌زننده‌های IV برای β_2 و β_3 به‌دست می‌آید.

از طرف دیگر می‌توان سیستم معادلات (۱۹-۱۰) را به‌صورت ماتریسی نوشت که شکل کلی آن عبارت است از:

$$(\mathbf{Z'X})\hat{\boldsymbol\beta}_{IV} = \mathbf{Z'y} \qquad (۱۰-۲۲)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & X_{31} \\ 1 & X_{22} & X_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & X_{3n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & X_{21} & Z_{31} \\ 1 & X_{22} & Z_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{2n} & Z_{3n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol\beta} = \begin{bmatrix} \hat\beta_1 \\ \hat\beta_2 \\ \hat\beta_3 \end{bmatrix}$$

چون برای X_{2t} متغیر ابزاری معرفی نکرده‌ایم لذا در ماتریس Z ستون مربوطه دقیقاً مشاهدات X_{2t} را نشان می‌دهد. با حل (۲۲-۱۰)، تخمین‌زنندهٔ IV عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{IV} = (\mathbf{Z'X})^{-1}\mathbf{Z'y} \qquad (۱۰-۲۳)$$

حال تصور کنید که برای هر متغیر توضیحی یک متغیر ابزاری معرفی شود. در این صورت معادلات نرمال به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum e_t = 0 \Rightarrow \sum (Y_t - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_{2t} - \hat\beta_3 X_{3t}) = 0$$
$$\sum e_t Z_{2t} = 0 \Rightarrow \sum (Y_t - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_{2t} - \hat\beta_3 X_{3t}) Z_{2t} = 0 \qquad (۱۰-۲۴)$$
$$\sum e_t Z_{3t} = 0 \Rightarrow \sum (Y_t - \hat\beta_1 - \hat\beta_2 X_{2t} - \hat\beta_3 X_{3t}) Z_{3t} = 0$$

معادلات فوق را ساده کرده و شکل ماتریسی آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} n & \sum X_{2t} & \sum X_{3t} \\ \sum Z_{2t} & \sum Z_{2t}X_{2t} & \sum Z_{2t}X_{3t} \\ \sum Z_{3t} & \sum Z_{3t}X_{2t} & \sum Z_{3t}X_{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat\beta_1 \\ \hat\beta_2 \\ \hat\beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y_t \\ \sum Z_{2t}Y_t \\ \sum Z_{3t}Y_t \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۲۵)$$

مجدداً به رابطه $(\mathbf{Z'X})\hat{\boldsymbol\beta}_{IV} = \mathbf{Z'y}$ می‌رسیم که مشابه (۲۲-۱۰) است، اما تفاوت آنها در این است که در اینجا هر ستون از ماتریس $\mathbf{Z}$ شامل یک متغیر ابزاری است:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & Z_{21} & Z_{31} \\ 1 & Z_{22} & Z_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Z_{2n} & Z_{3n} \end{bmatrix} \qquad (۱۰-۲۶)$$

حال بحث فوق را به حالت کلی تعمیم می‌دهیم. بدین منظور رگرسیون Kمتغیرهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \dots + \beta_K X_{Kt} + u_t$$

شکل ماتریسی این معادلات عبارت است از (فصل پنجم را ببینید):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol\beta + \mathbf{u}$$

مجموع مجذور خطاها را مانند آنچه که در فصل پنجم گفته شد، حساب کرده و نسبت به $\hat{\boldsymbol\beta}$ مشتق می‌گیریم که برابر است با:

$$\sum e_t^2 = \mathbf{e'e} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) = \mathbf{y'y} - 2\mathbf{y'X}\hat{\boldsymbol\beta} + \hat{\boldsymbol\beta}'\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta}$$
$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial \hat{\boldsymbol\beta}} = -2\mathbf{X'y} + 2\mathbf{X'X}\hat{\boldsymbol\beta} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X'}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) = \mathbf{0} \qquad (۱۰-۲۷)$$

عبارت داخل پرانتز برابر با بردار $\mathbf{e}$ می‌باشد. بنابراین $\mathbf{X'e=0}$ همان معادلات نرمال است. اگر به‌جای $\mathbf{X}$ از متغیرهای ابزاری استفاده کنیم، آنگاه در معادلات نرمال، به‌جای $\mathbf{X}$ ماتریس متغیرهای ابزاری ($\mathbf{Z}$) را قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{Z'e=0} \qquad (۱۰-۲۸)$$

توجه شود که بردار $\mathbf{Z}$ شامل متغیرهای Z_1، Z_2، ... و Z_K است که به‌ترتیب به‌جای X_1، X_2، ... و X_K استفاده شده‌اند. لذا فرض کرده‌ایم که برای هر متغیر توضیحی یک متغیر ابزاری تعریف شده است. البته همان‌طور که دیدیم ممکن است برخی از ستون‌های ماتریس $\mathbf{Z}$ شامل برخی از متغیرهای توضیحی (یعنی X ها) باشد. ولی به هر حال تعداد ستون‌های ماتریس $\mathbf{Z}$ دقیقاً برابر با تعداد ستون‌های ماتریس $\mathbf{X}$ است.

با حل $\mathbf{Z'e=0}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{Z'e=0} \Rightarrow \mathbf{Z'(y-X\hat{\beta})=0} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}=\mathbf{(Z'X)^{-1}Z'y} \qquad (۱۰-۲۹)$$

همان‌طور که دیدیم، تخمین‌زنندهٔ IV سازگار است. بدین منظور با جایگذاری به‌جای $\mathbf{y}$، تخمین‌زنندهٔ IV را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}=\mathbf{(Z'X)^{-1}Z'(X\beta+u)}=\boldsymbol{\beta}+\mathbf{(Z'X)^{-1}Z'u} \qquad (۱۰-۳۰)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ تخمین‌زننده سازگار است، زیرا:

$$\text{plim}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV})=\boldsymbol{\beta}+\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z'X}}{n}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z'u}}{n}\right)=\boldsymbol{\beta} \qquad (۱۰-۳۱)$$

زیرا $\text{plim}\frac{\mathbf{Z'u}}{n}=\mathbf{0}$ است و $\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z'X}}{n}\right)^{-1}$ برابر با معکوس ماتریس کوواریانس $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{X}$ است.

۱۰-۶ تخمین‌زنندهٔ IV در حالت عمومی

تا اینجا فرض کردیم که تعداد متغیرهای ابزاری با تعداد متغیرهای توضیحی برابر است. به‌همین دلیل با حل سیستم معادلات $\mathbf{Z'e=0}$ به‌جای $\mathbf{X'e=0}$، تخمین‌زنندهٔ IV را به‌دست آوریم که همهٔ ضرایب β_1، β_2، ... و β_K برآورد می‌شدند. در واقع تعداد معادلاتی که در سیستم معادلات $\mathbf{Z'e=0}$ وجود دارد دقیقاً برابر با تعداد ضرایب (یعنی K) است.

در حالت کلی تصور کنید که ماتریس $\mathbf{Z}$ بیانگر ماتریس متغیرهای ابزاری با m ستون باشد. بنابراین ماتریس $\mathbf{Z}$ یک ماتریس $n\times m$ است، در حالی‌که تعداد ضرایب برابر با K است. تا اینجا فرض کردیم که $m=K$ است و به‌همین دلیل، سیستم معادلات $\mathbf{Z'e=0}$ دارای K معادله است که با حل آن، ضرایب β_1 تا β_K به‌دست می‌آید. وقتی $m=K$ باشد آن را دقیقاً مشخص می‌گویند.

اگر $m<K$ باشد، تعداد معادلات کمتر از تعداد ضرایب است و لذا قابل حل نبوده که به آن «کمتر از حد مشخص» می‌گویند.

اگر $m>K$ باشد، تعداد معادلات بیشتر از تعداد ضرایب است و لذا برای ضرایب، بیش از یک جواب به‌دست می‌آید که آن را «بیش از حد مشخص» می‌گویند. در اینجا تعداد متغیرهای ابزاری بیش از تعداد متغیرهای توضیحی است. در این موارد، هیچ راهی برای کنار گذاشتن برخی از متغیرها و یا انتخاب از بین آنها وجود ندارد. لذا برای استفاده از تمامی اطلاعات (متغیرهای ابزاری)، ساده‌ترین راه این است که هر یک از متغیرهای توضیحی (X_{kt} ها) را روی تمامی متغیرهای ابزاری (Z) برازش کنیم:

$$X_{kt}=\pi_{1k}+\pi_{2k}Z_{2t}+\ldots+\pi_{mk}Z_{mt}+\varepsilon_{kt} \quad ; \quad k=1,\ldots,K \qquad (۱۰-۳۲)$$

شکل ماتریسی معادلات فوق عبارت است از:

$$\mathbf{X=Z\pi+\varepsilon} \qquad (۱۰-۳۳)$$

$\mathbf{X}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ ماتریس‌های $n\times K$، $\mathbf{Z}$ ماتریس $n\times m$، $\boldsymbol{\pi}$ ماتریس $m\times K$ است. با برآورد این سیستم معادلات، رابطهٔ $\mathbf{\hat{X}=Z\hat{\pi}}$ به‌دست می‌آید که $\hat{\boldsymbol{\pi}}=\mathbf{(Z'Z)^{-1}Z'X}$ می‌باشد. حال $\mathbf{\hat{X}=Z\hat{\pi}}$ را به‌عنوان ماتریس جانشین $\mathbf{X}$ به‌کار می‌بریم و در معادلات نرمال قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{\hat{X}'e=0} \Rightarrow \mathbf{\hat{X}'(y-X\beta)=0} \qquad (۱۰-۳۴)$$

سیستم معادلات فوق شامل K معادله است که از حل آن تخمین‌زنندهٔ IV به‌دست می‌آید:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}=\mathbf{(\hat{X}'X)^{-1}(\hat{X}'y)} \qquad (۱۰-۳۵)$$

با جایگذاری به‌جای $\mathbf{\hat{X}}$ از رابطه $\mathbf{\hat{X}=Z\hat{\pi}=Z(Z'Z)^{-1}Z'X}$ می‌توان تخمین‌زنندهٔ IV را به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}=\left[\mathbf{X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X'Z(Z'Z)^{-1}Z'y}\right]$$
$$=\mathbf{(X'QX)^{-1}(X'Qy)} \; ; \; \mathbf{Q=Z(Z'Z)^{-1}Z'} \qquad (۱۰-۳۶)$$

می‌توان ثابت کرد که $\hat{\beta}_{IV}$ سازگار است. بدین منظور از رابطه $\mathbf{y}=\mathbf{X}\beta+\mathbf{u}$ به‌جای $\mathbf{y}$ قرار داده و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\beta}_{IV}=\beta+(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{u})$$

سازگاری $\hat{\beta}_{IV}$ بیانگر آن است که $\text{plim}\hat{\beta}_{IV}=\beta$ می‌باشد. برای اثبات این موضوع، $\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{u}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{u}=\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{u}=\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n}\right)\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{u}}{n}\right)$$

و لذا خواهیم داشت:

$$\text{plim}\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{u}=\text{plim}\left(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{Z}}{n}\right)\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{Z}}{n}\right)^{-1}\text{plim}\left(\frac{\mathbf{Z}'\mathbf{u}}{n}\right)$$

$$=\Sigma_{xz}\Sigma_{zz}^{-1}\Sigma_{zu}=0$$

که Σ_{xz} ماتریس کوواریانس $\mathbf{X}$ و $\mathbf{Z}$، Σ_{zz} ماتریس واریانس $\mathbf{Z}$ و Σ_{zu} ماتریس کوواریانس $\mathbf{Z}$ و $\mathbf{u}$ است. طبق فرض، $\Sigma_{zu}=0$ است.

واریانس تخمین‌زنندهٔ IV عبارت است از:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{IV})=E\left[(\hat{\beta}_{IV}-\beta)(\hat{\beta}_{IV}-\beta)'\right]$$

$$=(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Q}E(\mathbf{u}\mathbf{u}')\mathbf{Q}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}$$

$$=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}\ ;\ E(\mathbf{u}\mathbf{u}')=\sigma^2\mathbf{I} \tag{۱۰-۳۷}$$

از آنجا که ماتریس $\mathbf{Q}$ هم‌قوه است لذا $\mathbf{Q}^2=\mathbf{Q}$ می‌باشد. از طرف دیگر دیدیم که $\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}$ معادل با $\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X}$ است که $\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{Z}\hat{\pi}$ و $\hat{\pi}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{X}$ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}'(\hat{\mathbf{X}}+\hat{\varepsilon})\ ;\ \mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}+\hat{\varepsilon}$$

$$=\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}+\hat{\mathbf{X}}'\hat{\varepsilon}=\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}} \tag{۱۰-۳۸}$$

زیرا طبق معادلات نرمال، $\hat{\mathbf{X}}'\hat{\varepsilon}=0$ است. بنابراین، واریانس $\hat{\beta}_{IV}$ برابر است با:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{IV})=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}\ ;\ \mathbf{Q}=\mathbf{Z}(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'$$

$$=\sigma^2(\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X})^{-1}=\sigma^2(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1} \tag{۱۰-۳۹}$$

۱۰-۷ تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات دومرحله‌ای (2SLS)[1]

در روش حداقل مربعات دومرحله‌ای (2SLS)، در دو مرحله از روش OLS استفاده می‌شود. در مرحله اول متغیرهای توضیحی که درون‌زا هستند (Xها) روی متغیرهای ابزاری برازش می‌شوند و در مرحله دوم به‌جای Xها از $\hat{X}$ها استفاده کرده و معادله موردنظر را برآورد می‌کنیم. به‌عنوان مثال فرض کنید که معادله زیر را داشته باشیم:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\beta_4Y_{t-1}+u_t \tag{۱۰-۴۰}$$

در این مدل Y_{t-1} ممکن است درون‌زا باشد. به‌ویژه اگر u_t دارای خودهمبستگی باشد، آنگاه Y_{t-1} با u_t همبستگی خواهد داشت[2]. برای حل این مشکل، از روش حداقل مربعات دومرحله‌ای استفاده می‌شود که مراحل آن به‌صورت زیر است:

۱- ابتدا Y_{t-1} را که با جملهٔ خطا همبستگی دارد روی تمام متغیرهای ابزاری برازش می‌کنیم. این متغیرهای ابزاری ممکن است فقط X_{2t} و X_{3t} و یا شامل متغیرهای دیگری باشد. به‌عنوان مثال، معادله زیر را برآورد می‌کنیم که علاوه بر متغیرهای توضیحی، شامل متغیر Z_t نیز می‌باشد:

$$Y_t=a_1+a_2X_{2t}+a_3X_{3t}+a_4Z_t+\varepsilon_t \tag{۱۰-۴۱}$$

با برآورد این مدل، می‌توان رابطه $Y_t=\hat{Y}_t+\hat{\varepsilon}_t$ نوشت.

۲- به‌جای Y_{t-1} از $Y_{t-1}=\hat{Y}_{t-1}+\hat{\varepsilon}_{t-1}$ قرار داده و معادله زیر را برآورد می‌کنیم:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+\beta_4\hat{Y}_{t-1}+v_t\ ,\ v_t=u_t+\beta_4\hat{\varepsilon}_{t-1} \tag{۱۰-۴۲}$$

چون $\hat{Y}_{t-1}$ مستقل از v_t است، لذا معادله فوق را می‌توان با OLS برآورد نمود.

حال بحث فوق را به حالت عمومی تعمیم می‌دهیم:

۱- در مرحله اول که معادله $\mathbf{y}=\mathbf{X}\beta+\mathbf{u}$ را داریم، ابتدا $\mathbf{X}$ را روی متغیرهای ابزاری برازش می‌کنیم:

$$\mathbf{X}=\mathbf{Z}\pi+\varepsilon \tag{۱۰-۴۳}$$

1- two stage least squares

۲- به‌عنوان مثال در مدل $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ که u_t دارای خودهمبستگی مرتبه اول به شکل $u_t=\rho u_{t-1}+\varepsilon_t$ است، با حذف خود همبستگی به مدل $Y_t=\alpha_0+\beta X_2+\beta\rho X_{t-1}+\rho Y_{t-1}+\varepsilon_t$ می‌رسیم. در این مدل، Y_{t-1} با ε_t همبستگی دارد (به فصل ششم مبحث خودهمبستگی مراجعه کنید).

این معادله را با روش OLS برآورد می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{Z}\hat{\pi} \; ; \; \hat{\pi}=(\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}(\mathbf{Z}'\mathbf{X}) \qquad (۱۰-۴۴)$$

۲- در معادله $\mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\mathbf{u}$ به‌جای $\mathbf{X}$ از رابطه $\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}+\hat{\varepsilon}$ قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{y}=(\hat{\mathbf{X}}+\hat{\varepsilon})\beta+\mathbf{u}=\hat{\mathbf{X}}\beta+\mathbf{v} \;,\; \mathbf{v}=\mathbf{u}+\hat{\varepsilon}\beta \qquad (۱۰-۴۵)$$

حال معادله فوق را با روش OLS برآورد می‌کنیم که معروف به تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات دومرحله‌ای است:

$$\hat{\beta}_{2SLS}=(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y} \qquad (۱۰-۴۶)$$

می‌توان ثابت کرد که تخمین‌زنندهٔ IV و 2SLS یکسان هستند. بدین منظور در $\hat{\beta}_{IV}=(\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{X})^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y}$ به‌جای $\mathbf{X}$ از $\mathbf{X}=\hat{\mathbf{X}}+\hat{\varepsilon}$ قرار می‌دهیم:

$$\hat{\beta}_{IV}=\left[\hat{\mathbf{X}}'(\hat{\mathbf{X}}+\hat{\varepsilon})\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y}$$
$$=\left[\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}}+\hat{\mathbf{X}}'\hat{\varepsilon}\right]^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y}=(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1}\hat{\mathbf{X}}'\mathbf{y}=\hat{\beta}_{2SLS} \qquad (۱۰-۴۸)$$

زیرا $\hat{\mathbf{X}}'\hat{\varepsilon}=\mathbf{o}$ است (طبق معادلات نرمال).

۱۰-۸ آماره F در روش متغیرهای ابزاری

تاکنون همواره از آماره F برای آزمون‌های مختلف که عمدتاً به‌صورت مقایسه رگرسیون‌های مقید و غیرمقید است، استفاده کرده‌ایم. در شرایطی که از متغیرهای ابزاری استفاده شود، آماره F دارای تفاوت اندکی می‌باشد که لازم است به آن توجه کنیم.

تا اینجا دیدیم که بر اساس متغیرهای ابزاری $\mathbf{Z}$، معادله $\mathbf{X}=\mathbf{Z}\pi+\varepsilon$ را برازش کرده و از $\hat{\mathbf{X}}$ به‌عنوان جانشین $\mathbf{X}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین معادله‌ای که با استفاده از آن β را برآورد می‌کنیم به‌صورت $\mathbf{y}=\hat{\mathbf{X}}\beta+\mathbf{v}$ است.

حال مدل مذکور را در دو حالت مقید و غیرمقید برآورد کرده و بردار باقیمانده‌ها (e) را حساب می‌کنیم:

غیر مقید: $\mathbf{e}_{UR}=\mathbf{y}-\hat{\mathbf{X}}\hat{\beta}_{IV,UR}$

مقید: $\mathbf{e}_{R}=\mathbf{y}-\hat{\mathbf{X}}\hat{\beta}_{IV,R}$

R برای مقید و UR برای غیرمقید می‌باشد. علاوه‌بر این، بردار خطاها را براساس تخمین‌زننده‌های IV برای رگرسیون غیرمقید به‌صورت $\mathbf{e}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\beta}_{IV,UR}$ حساب می‌کنیم.

براساس محاسبات فوق، آماره F را تشکیل می‌دهیم:

$$F_{q,n-K}=\frac{(\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R-\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR})/q}{\mathbf{e}'\mathbf{e}/(n-K)} \qquad (۱۰-۴۸)$$

q تعداد قیدها را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال برای آزمون معنادار بودن رگرسیون (یعنی آزمون فرضیه $(H_{\circ}:\beta_{۲}=...=\beta_K=\circ$)، مدل مقید به‌صورت $\mathbf{y}=\beta_۱\mathbf{i}+\mathbf{u}$ و مدل نامقید به‌صورت $\mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\mathbf{u}$ می‌باشد، که $\mathbf{i}'=[۱ \; ۱ \; \cdots \; ۱]$ است. لذا آماره F به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{K-۱,n-K}=\frac{(TSS-\mathbf{e}'_{UR}\mathbf{e}_{UR})/(K-۱)}{\mathbf{e}'\mathbf{e}/(n-K)}$$

چون در مدل مقید، تغییرات توضیح داده شده (ESS) برابر صفر است، لذا $TSS=\mathbf{e}'_R\mathbf{e}_R$ می‌باشد.

۱۰-۹ آزمون سارگان برای بررسی اعتبار متغیرهای ابزاری[1]

وقتی یک یا چند متغیر توضیحی با جملهٔ خطا همبستگی داشته باشند، به‌جای آنها از متغیرهای ابزاری استفاده می‌شود. این متغیر یا متغیرهای ابزاری نباید با جملهٔ خطا همبستگی داشته باشند. حال سؤال این است که متغیر ابزاری تا چه اندازه معتبر است. بدین منظور از آزمون سارگان استفاده می‌شود. این آزمون مبتنی بر همبستگی متغیرهای ابزاری با جملهٔ خطا است که طبق مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- ابتدا متغیرهای توضیحی را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

گروه ۱: متغیرهای توضیحی که با u_t همبستگی دارند که تعداد آنها برابر با q است.

گروه ۲: متغیرهای توضیحی که با u_t همبستگی ندارند که تعداد آنها برابر با $m=K-q$ است.

۲- متغیرهای ابزاری $Z_{۱t}$ تا Z_{st} را انتخاب می‌کنیم $(s \geq q)$.

۳- به‌جای متغیرهای توضیحی گروه ۱ ($X_{۱t}$ تا X_{qt}) از متغیرهای ابزاری $Z_{۱t}$ تا Z_{st} استفاده کرده و معادله رگرسیون را برآورد می‌کنیم. از این معادله، e_tها را حساب می‌کنیم.

۱- Sargan test: صدیقی اچ.آر.ای و کی.ا. لاولر، اقتصاد سنجی: رهیافت کاربردی، ترجمه شمس‌الله شیرین‌بخش، انتشارات آوای نور، ۱۳۸۶، ص ۲۳۱.

۴- جملات خطا (e_t) را روی متغیرهای توضیحی گروه ۲ (که مستقل از جملهٔ خطا هستند) و روی متغیرهای ابزاری، برازش کرده و R^2 آن را حساب می‌کنیم.

۵- آماره سارگان را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$S=(n-K)R^2 \sim \chi^2_{s-q} \qquad (10-50)$$

اگر مقدار آمارهٔ آزمون در ناحیهٔ بحرانی قرار گرفت، H_0 را رد می‌کنیم و نشان می‌دهد که ابزارها مناسب نیستند، زیرا جملات خطا با متغیرهای گروه ۲ وابستگی دارند. این در حالی است که فرض بر این بوده که متغیرهای ابزاری و متغیرهای توضیحی گروه ۲ (که فرض کردیم مستقل از u_t هستند) نباید با u_t همبستگی داشته باشند.

۱۰-۱۰ آزمون هاسمن

در بخش‌های قبلی دیدیم که واریانس تخمین‌زنندهٔ IV در مدل $\mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\mathbf{u}$، به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol\beta}_{IV})=\sigma^2\left[\mathbf{X'Q^{-1}X}\right]^{-1} \quad , \quad \mathbf{Q}=\mathbf{Z(Z'Z)^{-1}Z'} \qquad (10-51)$$

از طرف دیگر واریانس تخمین‌زنندهٔ OLS عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol\beta}_{OLS})=\sigma^2(\mathbf{X'X})^{-1} \qquad (10-52)$$

در خصوص تخمین‌زننده‌های OLS و IV نتایج زیر برقرار است:

۱- اگر متغیرهای توضیحی ($\mathbf{X}$) مستقل از جملهٔ خطا ($\mathbf{u}$) باشند، هر دو تخمین‌زننده، سازگار خواهند بود.

۲- ثابت می‌شود که واریانس تخمین‌زنندهٔ OLS بیشتر از واریانس تخمین‌زنندهٔ IV نیست.

۳- اگر متغیرهای توضیحی ($\mathbf{X}$) مستقل از جملهٔ خطا ($\mathbf{u}$) نباشند، تخمین‌زنندهٔ OLS ناسازگار و تخمین‌زننده IV سازگار خواهد بود.

با توجه به نکات مذکور، می‌توان آزمون هاسمن را طرح نمود:

فرضیه H_0 بیانگر آن است که هر دو تخمین‌زننده سازگار هستند. این فرضیه در صورتی صحیح است که $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$ مستقل می‌باشند.

فرضیه H_1 بیانگر آن است که $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$ مستقل نیستند و لذا IV سازگار ولی OLS ناسازگار است.

آزمون هاسمن مبتنی بر مقایسه واریانس تخمین‌زننده‌های IV و OLS است. لذا اگر $\mathbf{d}=\hat{\boldsymbol\beta}_{IV}-\hat{\boldsymbol\beta}_{OLS}$ باشد، آنگاه طبق فرضیه H_0، شرط $\mathrm{plim}\,\mathbf{d}=\mathbf{o}$ برقرار است، زیرا هر دو تخمین‌زننده، سازگارند. در واقع، آماره هاسمن مشابه آماره والد و آماره ضریب لاگرانژ[1] است که به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

$$H=\mathbf{d}'[\mathrm{var}(\mathbf{d})]^{-1}\mathbf{d} \qquad (10-53)$$

تحت فرضیه H_0، ثابت می‌شود که واریانس $\mathbf{d}$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\mathbf{d})=\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol\beta}_{IV}-\hat{\boldsymbol\beta}_{OLS})=\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol\beta}_{IV})-\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol\beta}_{OLS})$$
$$=\sigma^2\left[(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1}-(\mathbf{X'X})^{-1}\right] \qquad (10-54)$$

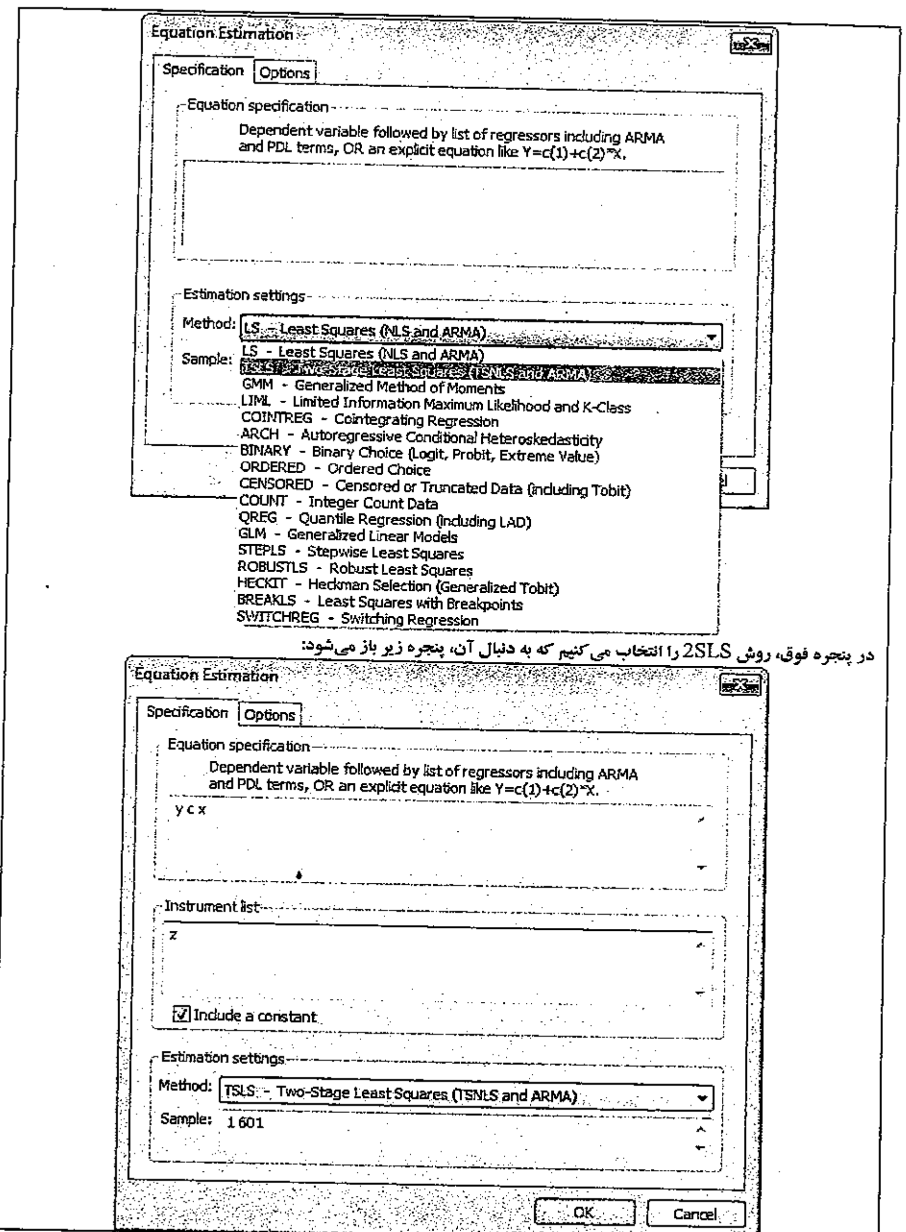
بنابراین، آماره هاسمن عبارت است از:

$$H=\frac{(\hat{\boldsymbol\beta}_{IV}-\hat{\boldsymbol\beta}_{OLS})'\left[(\hat{\mathbf{X}}'\hat{\mathbf{X}})^{-1}-(\mathbf{X'X})^{-1}\right]^{-1}(\hat{\boldsymbol\beta}_{IV}-\hat{\boldsymbol\beta}_{OLS})}{\hat\sigma^2} \qquad (10-55)$$

با رجوع به فصل نهم، می‌بینیم که آماره H مشابه آماره والد (W) است. آماره H توزیع χ^2 با درجه آزادی K دارد. اگر فرضیه H_0 درست باشد، آنگاه مقدار آماره H به سمت صفر گرایش دارد. ولی اگر H بزرگ باشد، فرضیه H_0 را رد می‌کند و نشان می‌دهد که این دو تخمین‌زننده، اختلاف معناداری دارند و لذا $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$ مستقل نیستند. نتیجه این است که استفاده از متغیرهای ابزاری، معتبر است و بهتر از روش OLS می‌باشد.

متغیرهای ابزاری در Eviews	فایل data23
مانند معادلات معمولی، ابتدا مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:	
estimate equation → Quick	

۱- به فصل نهم مراجعه شود.



در پنجره فوق، روش 2SLS را انتخاب می‌کنیم که به دنبال آن، پنجره زیر باز می‌شود:

در قسمت بالا، معادله مورد نظر و در قسمت Instrument list نام متغیرهای ابزاری را وارد می‌کنیم. با انتخاب OK نتایج تخمین به صورت زیر به دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA23::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Two-Stage Least Squares
Date: 01/18/14 Time: 20:37
Sample: 1 601
Included observations: 601
Instrument specification: Z
Constant added to instrument list

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-1.316500	0.624759	-2.107213	0.0355
X	0.085338	0.018773	4.545722	0.0000

R-squared	-0.011972	Mean dependent var	1.455907
Adjusted R-squared	-0.013662	S.D. dependent var	3.298758
S.E. of regression	3.321214	Sum squared resid	6607.249
F-statistic	20.66359	Durbin-Watson stat	0.854801
Prob(F-statistic)	0.000007	Second-Stage SSR	6301.152
J-statistic	2.47E-42	Instrument rank	2

عرض از مبدأ و شیب به ترتیب برابر با ۱/۳۱۶− و ۰/۰۸۵۳ است که در روش OLS برابر با ۰/۳۵۷۱ و ۰/۰۳۳۸ به دست می‌آید.

مسائل

۱−۱۰ متغیر ابزاری چه خصوصیاتی باید داشته باشد.

۲−۱۰ معادله $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ را داریم.

الف) تخمین $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ از OLS و واریانس آنها را بنویسید.

ب) اگر Z_t متغیر ابزاری برای X_t باشد، تخمین‌زنندهٔ IV برای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ را به‌دست آورده و واریانس آنها را حساب کنید.

ج) در چه صورتی $\hat{\beta}_{IV}=\hat{\beta}_{OLS}$ است.

د) در چه صورتی واریانس $\hat{\beta}$ در روش OLS و IV برابر خواهد بود.

۳−۱۰ درمسئله ۲−۱۰ اگر $\hat{\beta}_{IV}=\hat{\beta}_{OLS}$ باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{\alpha}_{IV}=\hat{\alpha}_{OLS}$ است.

۱۰-۴ شرط شناسایی در روش IV چیست و چه ضرورتی دارد؟

۱۰-۵ روش 2SLS چیست و مراحل آن را تشریح کنید.

۱۰-۶ ثابت کنید که تخمین‌زننده‌های 2SLS و IV برابرند.

۱۰-۷ آماره F برای آزمون معنادار بودن رگرسیون به‌کار می‌رود. تفاوت آماره F در روش IV و روش OLS چیست؟

۱۰-۸ مراحل آزمون سارگان را تشریح کنید.

۱۰-۹ مبنای آزمون هاسمن برای استفاده از متغیرهای ابزاری چیست؟

ضمیمه فصل دهم: متغیرهای ابزاری در Stata

متغیرهای ابزاری در Stata

فایل data23

بدین منظور مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

single-equation instrumental-variables regression → endogenous covariates → Statistics

ivregress - Single-equation instrumental-variables regression

Model | by/if/in | Weights | GMM | SE/Robust | Reporting

Dependent variable: y — متغیر وابسته

Independent variables: — متغیرهای توضیحی برونزا

Endogenous variables: x — متغیرهای توضیحی درونزا

Instrument variables: z — متغیرهای ابزاری

Estimator
- Two-stage least squares (2SLS)
- Limited-information maximum likelihood (LIML)
- Generalized method of moments (GMM)

Treatment of constant
- Suppress constant term
- Has user-supplied constant

OK | Cancel | Submit

بعد از وارد کردن اطلاعات مورد نظر، با انتخاب OK نتایج زیر به دست می‌آید:


```
. ivregress 2sls y (x = z)

Instrumental variables (2SLS) regression          Number of obs =     601
                                                  Wald chi2(1)  =   20.73
                                                  Prob > chi2   =  0.0000
                                                  R-squared     =       .
                                                  Root MSE      =  3.3157

           y |     Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+---------------------------------------------------------------
           x |  .0853376   .0187419     4.55   0.000     .0486041    .122071
       _cons |   -1.3165   .6237185    -2.11   0.035    -2.538966   -.0940342

Instrumented:  x
Instruments:   z
```

متغیرهای درونزا که به‌جای آنها متغیرهای ابزاری معرفی شده است (x)

متغیرهای ابزاری (z)

آزمون هاسمن

مراحل آزمون هاسمن برای استفاده از متغیرهای ابزاری عبارت است از:

۱- معادله را با روش OLS برآورد می‌کنیم.

reg y x

و نتیجه را با استفاده از فرمان زیر ذخیره می‌کنیم.

estimates store ls

۲- معادله را با روش IV برآورد می‌کنیم.

ivreg 2sls y (x=z)

نتیجه را با استفاده از فرمان زیر ذخیره می‌کنیم.

estimates store iv

۳- آزمون هاسمن را با اجرای فرمان زیر انجام می‌دهیم.

hausman iv ls, constant sigmamore

مواردی که در فرمان فوق استفاده شده‌اند، عبارتند از:

iv= روش متغیرهای ابزاری.

ls = روش حداقل مربعات معمولی.

constant= شامل جمله ثابت است.

sigmamore= از تخمین واریانس خطاهای حداقل مربعات معمولی استفاده شود.

نتیجه آزمون هاسمن عبارت است از:

```
. hausman iv ls, constant sigmamore

                 ---- Coefficients ----
             |      (b)          (B)            (b-B)     sqrt(diag(V_b-V_B))
             |      iv           ls          Difference          S.E.
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |   .0853376      .033822        .0515156        .0116817
       _cons |   -1.3165       .357114       -1.673614        .3795088
------------------------------------------------------------------------------
                 b = consistent under Ho and Ha; obtained from ivregress
  B = inconsistent under Ha, efficient under Ho; obtained from regress

  Test:  Ho:  difference in coefficients not systematic

              chi2(1) = (b-B)'[(V_b-V_B)^(-1)](b-B)
                      =       19.45
            Prob>chi2 =      0.0000
```

چون مقدار آماره آزمون که برابر با ۱۹/۴۵ است در ناحیه بحرانی قرار دارد (مقدار احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است) لذا فرضیه عدم‌همبستگی x و u رد می‌شود و به عبارت دیگر x درونزا است و لازم است که از متغیرهای ابزاری استفاده شود.

فصل یازدهم

مدل‌های غیرخطی

۱-۱۱ مقدمه

رگرسیون خطی را در فصل‌های قبلی بررسی کردیم و دیدیم که تحت فروض کلاسیک، می‌توان آن را با روش OLS برآورد نمود. علاوه براین، برخی مدل‌های غیرخطی که قابل تبدیل به خطی بودند نیز در فصل سوم بررسی شد. برخی از رگرسیون‌های غیرخطی را نمی‌توان تبدیل به خطی کرد و لذا تخمین آنها نیاز به روش‌های دیگری دارد. شکل کلی رگرسیون‌های غیرخطی بستگی به امید ریاضی شرطی دارد که در ابتدای فصل سوم بررسی شد. در این فصل، شکل کلی و عمومی معادلات غیر خطی را بررسی می‌کنیم. در حالت کلی، امید ریاضی شرطی Y به‌صورت $E(Y|\mathbf{X})=g(\mathbf{X},\boldsymbol{\beta})$ است که $\boldsymbol{\beta}$ ضرایب آن را نشان می‌دهد.

۲-۱۱ رگرسیون خطی

رگرسیون خطی بیانگر معادله‌ای است که نسبت‌به متغیرهای توضیحی و ضرایب، خطی باشد. شکل کلی یک معادله خطی به‌صورت زیر است:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2 X_{2t}+...+\beta_K X_{Kt}+u_t \qquad (11-1)$$

تحت فروض کلاسیک، ضرایب این معادله با استفاده از روش OLS برآورد می‌شود.

۱۱-۳ رگرسیون‌های غیرخطی قابل تبدیل به خطی

در فصل سوم اشاره‌ای به رگرسیون‌های غیرخطی شد که با استفاده از برخی تبدیل‌ها، آنها را به رگرسیون خطی تبدیل کردیم. برخی از این معادلات در مثال‌های زیر معرفی شده‌اند.

مثال ۱-۱۱: تابع نمایی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = ae^{\beta X_t}e^{u_t}$$

با لگاریتم‌گیری از طرفین خواهیم داشت:

$$\ln Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \quad , \quad \alpha = \ln a$$

مثال ۲-۱۱: تابع تولید کاب–داگلاس را در نظر بگیرید:

$$Y_t = AX_{2t}^{\beta_2}X_{3t}^{\beta_3}e^{u_t}$$

این تابع را می‌توان با لگاریتم‌گیری، به‌صورت خطی نوشت:

$$\ln Y_t = \beta_1 + \beta_2 \ln X_{2t} + \beta_3 \ln X_{3t} + u_t$$

مثال ۳-۱۱: تابع غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \frac{\alpha}{X_t} + \beta X_t^2 + u_t$$

تابع فوق را می‌توان با تبدیل‌های $Z_{1t} = \frac{1}{X_t}$ و $Z_{2t} = X_t^2$ به‌صورت یک رگرسیون خطی نوشت:

$$Y_t = \alpha Z_{1t} + \beta Z_{2t} + u_t$$

۱۱-۴ رگرسیون غیرخطی

رگرسیون غیرخطی بیانگر معادله‌ای است که در آن امید ریاضی شرطی Y_t تابع غیرخطی از متغیرهای توضیحی است. نمونه‌ای از رگرسیون غیرخطی را در مبحث خودهمبستگی دیدیم. مدل زیر دارای خودهمبستگی مرتبه اول است.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

اگر معادله اول را برای دوره $t-1$ نوشته و در ρ ضرب کرده و سپس از خودش کم کنیم، مدل زیر به‌دست می‌آید:

$$Y_t = \alpha(1-\rho) + \beta X_t - \beta\rho X_{t-1} + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

معادله فوق نسبت‌به ضرایب غیرخطی است. ضریب X_{t-1} برابر با حاصل‌ضرب ضرایب X_t و Y_{t-1} است.

شکل کلی یک معادله غیرخطی که فقط یک متغیر توضیحی داشته باشد عبارت است از:

$$Y_t = E(Y_t \mid X_t) + u_t = g(X_t, \boldsymbol{\beta}) + u_t \qquad (۱۱-۲)$$

در رگرسیون غیرخطی نیز مانند رگرسیون خطی، می‌خواهیم $\boldsymbol{\beta}$ را به‌گونه‌ای تعیین کنیم که مجموع مجذور خطاها حداقل شود. بدین منظور مجموع مجذور خطاها را که تابعی از $\boldsymbol{\beta}$ است با $Q(\boldsymbol{\beta})$ نشان می‌دهیم:

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \sum_t e_t^2 = \sum_t [Y_t - g(X_t, \boldsymbol{\beta})] \qquad (۱۱-۳)$$

شرط مرتبه اول برای حداقل شدن خطاها عبارت است از:

$$\frac{dQ(\boldsymbol{\beta})}{d\boldsymbol{\beta}} = 2\sum_t [Y_t - g(X_t, \boldsymbol{\beta})](-\frac{dg}{d\boldsymbol{\beta}}) = 0 \qquad (۱۱-۴)$$

مثال ۴-۱۱: معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t^{\beta_3} + u_t$$

مجموع مجذور خطاها عبارت است از:

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \sum_t (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t^{\hat{\beta}_3})^2$$

شرط لازم برای حداقل شدن مجموع مجذور خطا عبارتند از:

$$\frac{dQ}{d\hat{\beta}_1} = 2\sum (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t^{\hat{\beta}_3})(-1) = 0$$

$$\frac{dQ}{d\hat{\beta}_2} = 2\sum (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t^{\hat{\beta}_3})(-X_t^{\hat{\beta}_3}) = 0$$

$$\frac{dQ}{d\hat{\beta}_3} = 2\sum (Y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_t^{\hat{\beta}_3})(-\hat{\beta}_2\hat{\beta}_3 X_t^{\hat{\beta}_3}) = 0$$

با حل معادلات فوق، تخمین ضرایب β_1، β_2 و β_3 به‌دست می‌آید. اما بدیهی است که به‌دلیل غیرخطی بودن، نمی‌توان معادلات فوق را به‌سادگی حل نمود.

مثال ۵-۱۱: تابع تولید CES را در نظر بگیرید:

$$Y_t = A\left[\delta K_t^{-\rho} + (1-\delta)L_t^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}} e^{u_t}$$

لگاریتم تابع فوق عبارت است از:

$$\ln Y_t = \alpha - \frac{1}{\rho}\ln\left[\delta K_t^{-\rho} + (1-\delta)L_t^{-\rho}\right] + u_t$$

بنابراین، نمی‌توان تابع CES را به‌صورت یک معادله خطی نوشت. برای این معادله اگر مجموع مجذور خطاها را تشکیل داده و شرایط مرتبه اول را بنویسیم، نمی‌توان از حل آنها، تخمین ضرایب را به‌دست آورد.

حال رگرسیون غیرخطی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

رگرسیون غیرخطی عبارت از رگرسیونی است که شرایط مرتبه اول آن، تابع غیرخطی از ضرایب است.

بنابراین، چون معادله (۴-۱۱) نسبت‌به ضرایب، غیرخطی است، نمی‌توان با حل آنها، تخمین ضرایب را به‌دست آورد. بدین منظور از روش‌های تکراری برای حل معادلات استفاده می‌شود که در اینجا برخی از این روش‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱۱-۵ فروض مدل رگرسیون غیرخطی

فروض مدل رگرسیون غیرخطی تقریباً مشابه فروض کلاسیک در رگرسیون خطی است که در اینجا به مرور آنها می‌پردازیم.

۱- شکل کلی امید ریاضی شرطی Y عبارت است از:

$$E(Y_t | X_t) = g(X_t, \beta) \quad , \quad t = 1, \dots, n$$

فرض بر این است که g دوبار قابل مشتق‌گیری است.

۲- قابل شناسایی (قابل تخمین) بودن ضرایب: در رگرسیون خطی اگر متغیرهای توضیحی، همخطی کامل نداشته باشند، می‌توان همهٔ ضرایب را برآورد نمود. اما در رگرسیون غیرخطی ممکن است شکل تابع $g(X_t, \beta)$ به‌گونه‌ای باشد که امکان برآورد برخی از ضرایب وجود نداشته باشد.

۳- امید ریاضی جملهٔ خطا صفر است:

$$E\left[u_t | g(X_t, \beta)\right] = 0$$

بدین معنی که u_t با میانگین شرطی مشاهدات نمونه، همبستگی ندارد.

۴- واریانس u_t ثابت است:

$$\mathrm{var}\left[u_t | g(X_t, \beta)\right] = E\left[u_t^2 | g(X_t, \beta)\right] = \sigma^2$$

۵- u_tها خود همبستگی ندارند:

$$\mathrm{cov}\left[u_t, u_s | g(X_t, \beta)\right] = E\left[u_t u_s | g(X_t, \beta)\right] = 0 \quad , \quad t \neq s$$

۶- فرایند ایجادکنندهٔ داده‌ها: فرض می‌شود که فرایند ایجادکنندهٔ داده‌های X_t به‌گونه‌ای است که گشتاورهای مرتبه اول و دوم (میانگین و واریانس) به سمت یک مقدار ثابت همگرا هستند. این فرض بدان معنا است که فرایند ایجادکنندهٔ X_t نسبت‌به فرایند ایجادکنندهٔ u_t، اکیداً برونزا است.

۱۱-۶ تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات غیرخطی[1]

برای سادگی، رگرسیون غیرخطی زیر را در نظر بگیرید که فقط شامل یک پارامتر β می‌باشد. تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات غیرخطی (NLS) از حداقل کردن $Q(\beta)$ به‌دست می‌آید که عبارت است از:

$$\frac{dQ(\beta)}{d\beta} = -2\left[Y_t - g(X_t, \beta)\right]\frac{dg}{d\beta} = 0 \qquad (11\text{-}5)$$

β باید به‌گونه‌ای تعیین شود که شرط (۵-۱۱) را تأمین نماید.

برای حل معادله (۵-۱۱) روش‌های مختلفی ارائه شده است که عمدتاً مبتنی بر شیوه‌های تکراری برای یافتن جواب می‌باشند.

۱-۶-۱۱ الگوریتم گاوس-نیوتن[2]

الگوریتم گاوس- نیوتن مبتنی بر خطی کردن تابع g نسبت‌به ضریب β است. بدین منظور از تقریب مرتبه اول به‌ازای مقدار اولیه و دلخواه β_0 استفاده می‌کنیم (فرض کنید که یک ضریب و یک متغیر داریم):

$$g(X_t, \beta) \equiv g(X_t, \beta_0) + \left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta_0} (\beta - \beta_0) \qquad (11\text{-}6)$$

1- non-liner least squares
2- Gauss-Newton

توجه شود که هر چند β_0 مقدار اولیه و اختیاری است ولی بدیهی است که بایستی مقدار آن را در یک محدوده معقول تعیین کنیم.

استفاده از (۶-۱۱) بدان معنا است که رگرسیون غیرخطی (۴-۱۱)، را خطی کرده‌ایم:

$$Y_t = g(X_t,\beta)+u_t \Rightarrow Y_t = g(X_t,\beta_0)+\left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta_0}(\beta-\beta_0)+u_t$$

$$\underbrace{Y_t - g(X_t,\beta_0)+\left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta_0}\beta_0}_{Y_t^*(\beta_0)} = \left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta_0}\beta+u_t \qquad (11-7)$$

معادله (۷-۱۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t^*(\beta_0)=Z_t(\beta_0)\beta+u_t \quad ; \quad Z_t(\beta_0)=\left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta_0} \qquad (11-8)$$

$Z_t(\beta_0)$ تابعی از X_t است.

حال از (۶-۱۱) در $Q(\beta)$ جایگذاری کرده و با توجه به (۸-۱۱)، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Q(\beta)=\sum_t[Y_t-g(X_t,\beta)]^2$$

$$=\sum_t\left[Y_t-g(X_t,\beta_0)-\left.\frac{dg}{d\beta}\right|_{\beta_0}(\beta-\beta_0)\right]^2$$

$$=\sum_t\left[Y_t^*(\beta_0)-Z_t(\beta_0)\beta\right]^2 \qquad (11-9)$$

بنابراین، (۹-۱۱) مجموع مجذور خطاها برای معادله (۸-۱۱) است. واضح است که به‌ازای مقدار اولیه β_0، معادله (۸-۱۱) نسبت‌به β خطی است. در واقع، این خطی‌بودن به‌صورت تقریبی و به‌ازای β_0 می‌باشد.

برآورد β برای معادله (۸-۱۱) به‌ازای β_0 به‌صورت زیر است:

$$\frac{dQ(\beta)}{d\beta}=2\sum_t\left[Y_t^*(\beta_0)-Z_t(\beta_0)\beta\right](-Z_t(\beta_0))=0 \qquad (11-10)$$

با حل (۱۰-۱۱) تخمین β به‌دست می‌آید که آن را با β_1 نشان می‌دهیم:

$$\beta_1=\frac{\sum Z_t(\beta_0)Y_t^*(\beta_0)}{\sum Z_t(\beta_0)^2} \qquad (11-11)$$

بنابراین، با داشتن مقدار اولیه β_0، اولین تخمین ما از β برابر با β_1 می‌باشد. β_1 را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\beta_1=\frac{\sum_t Z_t(\beta_0)[Y_t-g_t(X_t,\beta_0)+Z_t(\beta_0)\beta_0]}{\sum_t Z_t(\beta_0)^2}$$

$$=\beta_0+\frac{\sum_t Z_t(\beta_0)[Y_t-g_t(X_t,\beta_0)]}{\sum_t Z_t(\beta_0)^2} \qquad (11-12)$$

بدین ترتیب با داشتن مقدار اولیهٔ β_0، اولین تخمین ما از β برابر با β_1 است. حال اگر مقدار اولیهٔ β_0 را که اختیاری بود با β_1 جایگذاری کنیم، آنگاه مجدداً $Q(\beta)$ را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$Q(\beta)=\sum_t\left[Y_t^*(\beta_1)-Z_t(\beta_1)\beta\right]^2 \qquad (11-13)$$

مشتق $Q(\beta)$ نسبت‌به β برابر است با:

$$\frac{dQ}{\alpha\beta}=2\sum_t\left[Y_t^*(\beta_1)-Z_t(\beta_1)\beta\right][-Z_t(\beta_1)]=0 \qquad (11-14)$$

با حل این معادله، دومین تخمین برای β به‌دست می‌آید:

$$\beta_2=\frac{\sum_t Z_t(\beta_1)Y_t^*(\beta_1)}{\sum_t Z_t(\beta_1)^2}$$

با جایگذاری به‌جای $Y_t^*(\beta_1)$، خواهیم داشت:

$$\beta_2=\frac{\sum_t Z_t(\beta_1)\,[Y_t-g(X_t,\beta_1)+Z_t(\beta_1)\beta_1]}{\sum_t Z_t(\beta_1)^2}$$

$$=\beta_1+\frac{\sum_t Z_t(\beta_1)\,[Y_t-g(X_t,\beta_1)]}{\sum_t Z_t(\beta_1)^2} \qquad (11-15)$$

اگر شیوه فوق را تکرار کنیم، تخمین‌های بعدی را نیز می‌توان به‌دست آورد. به‌طور کلی تخمین مرتبه $r+1$ام برابر است با:

$$\beta_{r+1} = \beta_r + \frac{\sum_t Z_t(\beta_r)[Y_t - g(X_t, \beta_r)]}{\sum_t Z_t(\beta_r)^2} \qquad (۱۱-۱۶)$$

رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\beta_{r+1} = \beta_r + \frac{1}{\sum_t Z_t(\beta_r)^2} \sum Z_t(\beta_r)[Y_t - g(X_t, \beta_r)]$$

$$= \beta_r - \frac{1}{2} \frac{1}{\sum_t Z_t(\beta_r)^2} \frac{dQ}{d\beta}\Big|_{\beta_r} \qquad (۱۱-۱۷)$$

زیرا $\frac{dQ}{d\beta}\Big|_{\beta_r} = -2\sum_t [Y_t - g(X_t, \beta_r)] \frac{dg}{d\beta}\Big|_{\beta_r}$ است.

مثال ۱۱-۶: فرض کنید که امید ریاضی شرطی Y برابر با $g(X_t, \beta) = e^{\beta X_t}$ باشد. در این صورت، رگرسیون غیرخطی زیر را داریم:

$$Y_t = e^{\beta X_t} + u_t$$

تقریب خطی تابع $g(X_t, \beta)$ به‌ازای β_0 عبارت از است:

$$g(X_t, \beta) = e^{\beta_0 X_t} + X_t e^{\beta_0 X_t}(\beta - \beta_0)$$
$$= e^{\beta_0 X_t} + Z_t(\beta_0)(\beta - \beta_0)$$

که $Z_t(\beta_0) = X_t e^{\beta_0 X_t}$ است.

به‌منظور تخمین β، ابتدا جدول زیر را تشکیل می‌دهیم. این جدول مقادیر مورد نیاز را برای تخمین β طبق فرمول (۱۱-۱۲) ارائه می‌کند.

جدول ۱۱-۱

Y_t	X_t	$g(X_t, \beta) = e^{\beta X_t}$	$Z_t(\beta) = X_t e^{\beta X_t}$	$Y_t - g(X_t, \beta)$
۰	۱	$g(1, \beta) = e^{\beta}$	$Z_1(\beta) = e^{\beta}$	$-e^{\beta}$
۱	۰	$g(0, \beta) = 1$	$Z_2(\beta) = 0$	۰
۱	۱	$g(1, \beta) = e^{\beta}$	$Z_3(\beta) = e^{\beta}$	$1 - e^{\beta}$
۲	۲	$g(2, \beta) = e^{2\beta}$	$Z_4(\beta) = 2e^{2\beta}$	$2 - e^{2\beta}$
۴	۲	$g(2, \beta) = e^{2\beta}$	$Z_5(\beta) = 2e^{2\beta}$	$2 - e^{2\beta}$

به‌ازای $\beta_0 = 1$ جدول (۱۱-۲) را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

جدول ۱۱-۲

Y_t	X_t	$g(X_t, 1)$	$Z_t(1) = X_t e^{X_t}$	$Y_t - g(X_t, 1)$
۰	۱	$e = ۲/۷۱۸$	$e = ۲/۷۱۸$	۲/۷۱۸-
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	$e = ۲/۷۱۸$	$e = ۲/۷۱۸$	۱/۷۱۸-
۲	۲	$e^2 = ۷/۳۸۹$	$2e^2 = ۱۴/۷۷۸$	۵/۳۸۹-
۴	۲	$e^2 = ۷/۳۸۹$	$2e^2 = ۱۴/۷۷۸$	۳/۳۸۹-

بنابراین تخمین β_1 برابر است با:

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{\sum_t Z_t(\beta_0)[Y_t - g(X_t, \beta_0)]}{\sum_t Z_t(\beta_0)^2} = 1 + \frac{-۱۴۱/۷۸}{۴۵۱/۵۶} = ۰/۶۸۶$$

حال $\beta_1 = ۰/۶۸۶$ را در جدول (۱۱-۱) به‌جای β_0 قرار داده و جدول زیر را به‌دست می‌آوریم:

جدول ۱۱-۳

Y_t	X_t	$g(X_t, ۰/۶۸۶)$	$Z_t(۰/۶۸۶)$	$Y_t - g(X_t, ۰/۶۸۶)$
۰	۱	۱/۹۸۵۷	۱/۹۸۵۷	۱/۹۸۵۷-
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱/۹۸۵۷	۱/۹۸۵۷	۱/۹۸۵۷-
۲	۲	۳/۹۴۳۲	۷/۸۸۶۵	۱/۹۴۳۲-
۴	۲	۳/۹۴۳۲	۷/۸۸۶۵	۰/۰۵۶۸

$$\beta_2 = \beta_1 + \frac{\sum_t Z_t(\beta_1)[Y_t - g(X_t, \beta_1)]}{\sum Z_t(\beta_1)^2} = ۰/۶۸۶ + \frac{-۲۰/۷۷۸}{۱۳۲/۲۷۹} = ۰/۵۲۸۹$$

حال $\beta_2 = ۰/۵۲۸۹$ را در جدول (۱۱-۱) قرار داده و جدول زیر را به‌دست می‌آوریم:

جدول ۱۱-۴

Y_t	X_t	$g(X_t, ۰/۵۲۸۹)$	$Z_t(۰/۵۲۸۹)$	$Y_t - g(X_t, ۰/۵۲۸۹)$
۰	۱	۱/۶۹۷۱	۱/۶۹۷۱	۱/۶۹۷۱-
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱/۶۹۷۱	۱/۶۹۷۱	۰/۶۹۷۱-
۲	۲	۲/۸۸	۵/۷۶۰۱	۰/۸۸-
۴	۲	۲/۸۸	۵/۷۶۰۱	۱/۱۲

$$\beta_۴=\beta_۳+\frac{\sum Z_t(\beta_۳)[Y_t-g(X_t,\beta_۳)]}{\sum Z_t(\beta_۳)^۲}=۰/۵۲۸۹+\frac{-۲/۶۸۱}{۷۲/۱۱۶۵}=۰/۴۹۱۷$$

$\beta_۴=۰/۴۹۱۷$ را در جدول (۱-۱۱) قرار داده و جدول زیر را به‌دست می‌آوریم:

جدول ۵-۱۱

Y_t	X_t	$g(X_t,۰/۴۹۱۷)$	$Z_t(۰/۴۹۱۷)$	$Y_t-g(X_t,۰/۴۹۱۷)$
۰	۱	۱/۶۳۵۱	۱/۶۹۷۱	-۱/۶۳۵۱
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱/۶۳۵۱	۱/۶۳۵۱	-۰/۶۳۵۱
۲	۲	۲/۶۷۳۶	۵/۳۴۷۳	-۰/۶۷۳۶
۴	۲	۲/۶۷۳۶	۵/۳۴۷۳	۱/۳۲۶۳

$$\beta_۵=\beta_۴+\frac{\sum Z_t(\beta_۴)[Y_t-g(X_t,\beta_۴)]}{\sum Z_t(\beta_۴)^۲}=۰/۴۹۱۷+\frac{-۰/۲۲۱۸}{۶۲/۵۳۴}=۰/۴۸۸۲$$

$\beta_۵=۰/۴۸۸۲$ را در جدول (۱-۱۱) قرار داده و جدول زیر را به‌دست می‌آوریم:

جدول ۶-۱۱

Y_t	X_t	$g(X_t,۰/۴۸۸۲)$	$Z_t(۰/۴۸۸۲)$	$Y_t-g(X_t,۰/۴۸۸۲)$
۰	۱	۱/۶۲۹۳	۱/۶۲۹۳	-۱/۶۲۹۳
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱/۶۲۹۳	۱/۶۲۹۳	-۰/۶۲۹۳
۲	۲	۲/۶۵۴۷	۵/۳۰۹۵	-۰/۶۵۴۷
۴	۲	۲/۶۵۴۷	۵/۳۰۹۵	۱/۳۴۵۳

$$\beta_۶=\beta_۵+\frac{\sum Z_t(\beta_۵)[Y_t-g(X_t,\beta_۵)]}{\sum Z_t(\beta_۵)}=۰/۴۸۸۲+\frac{-۰/۰۱۴}{۶۱/۶۹۰۳}=۰/۴۸۷۹$$

$\beta_۶=۰/۴۸۷۹$ را در جدول (۱-۱۱) قرار داده و جدول زیر را به‌دست می‌آوریم:

جدول ۷-۱۱

Y_t	X_t	$g(X_t,۰/۴۸۷۹)$	$Z_t(۰/۴۸۷۹)$	$Y_t-g(X_t,۰/۴۸۷۹)$
۰	۱	۱/۶۲۸۹	۱/۶۲۸۹	-۱/۶۲۸۹
۱	۰	۱	۰	۰
۱	۱	۱/۶۲۸۹	۱/۶۲۸۹	-۰/۶۲۸۹
۲	۲	۲/۶۵۳۵	۵/۳۰۷۱	-۰/۶۵۳۵
۴	۲	۲/۶۵۳۵	۵/۳۰۷۱	۱/۳۴۶۴

$$\beta_۷=\beta_۶+\frac{\sum Z_t(\beta_۶)[Y_t-g(X_t,\beta_۶)]}{\sum Z_t(\beta_۶)}=۰/۴۸۷۹+\frac{-۰/۰۰۰۸۹}{۶۱/۶۳۷۹}\cong ۰/۴۸۷۹$$

بدین‌ترتیب تخمین $\hat{\beta}=۰/۴۸۷۹$ به‌دست می‌آید.

برای تعمیم نتایج به‌دست آمده، از فرم ماتریسی استفاده می‌کنیم. ابتدا معادله $Y_t=g(X_t,\beta)+u_t$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}Y_۱&=g(X_۱,\beta)+u_۱\\ Y_۲&=g(X_۲,\beta)+u_۲\\ &\vdots\\ Y_n&=g(X_n,\beta)+u_n\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{y}=g(\mathbf{x},\beta)+\mathbf{u}$$

بنابراین $\mathbf{y}$، $\mathbf{g}$ و $\mathbf{u}$ بردارهای ستونی $n\times ۱$ هستند. X_t یک متغیر و β نیز یک ضریب است. مبحث فوق را می‌توان به حالتی تعمیم داد که $\mathbf{x}_t$ بردار متغیرهای توضیحی $\mathbf{x}'_t=(X_{۱t},X_{۲t},\dots,X_{Kt})$ و $\boldsymbol{\beta}$ نیز بردار ضرایب با ابعاد $K\times ۱$ باشد. در این صورت بسط تابع حول $\boldsymbol{\beta}'_۰=(\beta_{۱۰},\beta_{۲۰},\dots,\beta_{K۰})$ عبارت است از:

$$g(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\beta})=g(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\beta}_۰)+\sum_{k=۱}^{K}\frac{\partial g}{\partial \beta_k}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_۰}(\beta_k-\beta_{k۰}) \qquad (۱۱-۱۹)$$

$$=g(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\beta}_۰)+\sum_{k=۱}^{K}Z_t(\beta_{k۰})(\beta-\beta_{k۰})=g(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\beta}_۰)+\mathbf{z}'_t(\boldsymbol{\beta}_۰)(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_۰)$$

$$\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\beta}_۰)'=[Z_t(\beta_{۱۰})\ \cdots\ Z_t(\beta_{K۰})]\ ,\ (\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_۰)'=[\beta_۱-\beta_{۱۰}\ \cdots\ \beta_K-\beta_{K۰}]$$

$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_۰)$ برابر با ماتریس مشتق‌های $g(\mathbf{x}_t,\boldsymbol{\beta})$ نسبت‌به $\boldsymbol{\beta}$ به‌ازای $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}_۰$ است.

$$\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_۰)=\begin{bmatrix}\frac{\partial g(\mathbf{x}_۱,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_۱} & \frac{\partial g(\mathbf{x}_۱,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_۲} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{x}_۱,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_K}\\ \frac{\partial g(\mathbf{x}_۲,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_۱} & \frac{\partial g(\mathbf{x}_۲,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_۲} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{x}_۲,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_K}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial g(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_۱} & \frac{\partial g(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_۲} & \cdots & \frac{\partial g(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_K}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_۱(\beta_{۱۰}) & Z_۱(\beta_{۲۰}) & \cdots & Z_۱(\beta_{K۰})\\ Z_۲(\beta_{۱۰}) & Z_۲(\beta_{۲۰}) & \cdots & Z_۲(\beta_{K۰})\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Z_n(\beta_{۱۰}) & Z_n(\beta_{۲۰}) & \cdots & Z_n(\beta_{K۰})\end{bmatrix}$$

بنابراین $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_۰)$ ماتریس $n\times K$ است.

مجموع مجذور خطاها عبارت است از:

$$Q(\beta)=e'e=[y-g(X,\beta)]'[y-g(X,\beta)] \quad (۱۱-۲۰)$$

$g(X,\beta)$ بردار $n\times1$ است.

با جایگذاری از (۱۹-۱۱) به‌جای $g(X,\beta)$ و مرتب نمودن آن خواهیم داشت:

$$Q(\beta)=[y^*(\beta_0)-Z(\beta_0)\beta]'[y^*(\beta_0)-Z(\beta_0)\beta] \quad (۱۱-۲۱)$$

$Z(\beta_0)$ ماتریس $n\times K$ است و $y^*(\beta_0)=y-g(X,\beta_0)+Z(\beta_0)\beta_0$ است.

$$Q(\beta)=y'^*(\beta_0)y^*(\beta_0)-2\beta'Z'(\beta_0)y^*(\beta_0)+\beta'Z'(\beta_0)Z(\beta_0)\beta \quad (۱۱-۲۲)$$

با مشتق‌گیری نسبت‌به β خواهیم داشت:

$$\frac{dQ}{d\beta}=-2Z'(\beta_0)y^*(\beta_0)+2Z'(\beta_0)Z(\beta_0)\beta=0 \quad (۱۱-۲۳)$$

با حل معادله فوق، اولین تخمین β به‌دست می‌آید که بر حسب مقدار اولیهٔ β_0 می‌باشد:

$$\beta_1=[Z'(\beta_0)Z(\beta_0)]^{-1}[Z'(\beta_0)y^*(\beta_0)] \quad (۱۱-۲۴)$$

با جایگذاری به‌جای $y^*(\beta_0)$ و ساده نمودن آن، اولین تخمین β برابر است با:

$$\beta_1=\beta_0+[Z'(\beta_0)Z(\beta_0)]^{-1}[Z'(\beta_0)(y-g(X,\beta_0))] \quad (۱۱-۲۵)$$

حال β_1 را در (۲۲-۱۱) قرار داده و سپس با حداقل نمودن $Q(\beta)$ نسبت‌به β، دومین تخمین را به‌دست می‌آوریم. با تکرار این مراحل، تخمین $r+1$ام برای β عبارت است از:

$$\beta_{r+1}=\beta_r+[Z'(\beta_r)Z(\beta_r)]^{-1}[Z'(\beta_0)(y-g(X,\beta_0))] \quad (۱۱-۲۶)$$

و یا آن را مشابه (۱۷-۱۱) می‌نویسیم:

$$\beta_{r+1}=\beta_r-\frac{1}{2}[Z'(\beta_r)Z(\beta_r)]^{-1}\left.\frac{dQ}{d\beta}\right|_{\beta_0} \quad (۱۱-۲۷)$$

ثابت می‌شود که تخمین‌زنندهٔ NLS که از (۲۶-۱۱) به‌دست می‌آید، دارای توزیع مجانبی نرمال با امید ریاضی β و واریانس زیر می‌باشد:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{NLS})=\sigma^2[Z'(\beta_0)Z(\beta_0)]^{-1} \quad (۱۱-۲۸)$$

که تخمین σ^2 برابر است با:

$$\hat{\sigma}^2=\frac{Q(\hat{\beta}_{NLS})}{n-K}=\frac{e'e}{n-K}$$

مثال ۷-۱۱: در مثال ۶-۱۱ واریانس تخمین‌زننده NLS را حساب می‌کنیم:

$$\hat{\beta}_{NLS}=0/4879 \quad , \quad \hat{Y}_t=e^{0/4879X_t}$$

جدول ۸-۱۱

Y_t	$\hat{Y}_t$	$e_t=Y_t-\hat{Y}_t$	$S(\beta)=e_t^2$	$Z_t(\hat{\beta}_{NLS})$	$Z_t(\hat{\beta}_{NLS})^2$
۰	۱/۶۲۸۹	-۱/۶۲۸۹	۲/۶۵۳۳	۱/۶۲۸۹	۲/۶۵۳۵
۱	۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱/۶۲۸۹	-۱/۶۲۸۹	۰/۳۹۵۵	۱/۶۲۸۹	۲/۶۵۳۵
۲	۲/۶۵۳۳	۰/۶۵۳۳	۰/۴۲۶۸	۵/۳۰۷۱	۲۸/۱۶۵۴
۴	۲/۶۵۳۳	۲/۶۵۳۳	۱/۸۱۳۶	۵/۳۰۷۱	۲۸/۱۶۵۴
			۵/۲۸۹۲		۶۱/۶۳۷۹

$$\hat{\sigma}^2=\frac{Q(\hat{\beta}_{NLS})}{n-K}=\frac{5/2892}{5-1}=1/322$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_{NLS})=\hat{\sigma}^2[Z'(\hat{\beta}_{NLS})Z(\hat{\beta}_{NLS})]$$

$$=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_t Z_t(\hat{\beta}_{NLS})^2}=\frac{1/333}{11/6379}=0/0214$$

بنابراین آماره t برای معنادار بودن β برابر است با:

$$t=\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_{NLS})}}=\frac{0/4879}{\sqrt{0/0214}}=3/33$$

۲-۶-۱۱ الگوریتم نیوتن- رافسون[1]

در بخش قبلی دیدیم که شرط مرتبه اول برای حداقل شدن مجموع مجذور خطاها (یعنی $Q(\beta)$) به‌صورت زیر است (برای سادگی فرض کنید که فقط یک ضریب داشته باشیم):

$$q(\beta)=\frac{dQ(\beta)}{d\beta}=-2\sum_t\left[Y_t-g(X_t,\beta)\right]\frac{dg}{d\beta} \tag{11-29}$$

در اینجا، شرط مرتبه اول را با $q(\beta)$ نشان داده‌ایم. شرط حداقل شدن $Q(\beta)$ این است که $q(\beta)=0$ باشد. حال $q(\beta)$ را با تقریب خطی به‌ازای β_0 می‌نویسیم و برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$q(\beta)=q(\beta_0)+\left.\frac{dq}{d\beta}\right|_{\beta_0}(\beta-\beta_0) \tag{11-30}$$

$\frac{dq}{d\beta}$ مشتق مرتبه دوم تابع $Q(\beta)$ است که آن را با $h(\beta_0)$ نشان می‌دهیم. لذا $h(\beta_0)$ برابر است با:

$$h(\beta_0)=\left.\frac{dq}{d\beta}\right|_{\beta_0}=\left.\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right|_{\beta_0} \tag{11-31}$$

اگر (۳۰-۱۱) را برای β حل کنیم، اولین تخمین β به‌دست می‌آید که آن را با β_1 نشان می‌دهیم:

$$\beta_1=\beta_0-h(\beta_0)^{-1}q(\beta_0)=\beta_0\left[\left.\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right|_{\beta_0}\right]^{-1}\left[\left.\frac{dQ}{d\beta}\right|_{\beta_0}\right]$$

با استفاده از نتیجهٔ فوق، $r+1$امین تخمین β برابر است با:

$$\beta_{r+1}=\beta_r-\left[h(\beta_r)\right]^{-1}q(\beta_r)=\beta_r-\left[\left.\frac{d^2Q}{d\beta^2}\right|_{\beta_r}\right]^{-1}\left[\left.\frac{dQ}{d\beta}\right|_{\beta_r}\right] \tag{11-32}$$

با تعمیم نتیجهٔ فوق به حالت K پارامتری، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\beta}_{r+1}=\boldsymbol{\beta}_r-\left[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_r)\right]^{-1}\mathbf{q}(\boldsymbol{\beta}_r) \tag{11-33}$$

1- Newton-Raphson

$\mathbf{q}(\boldsymbol{\beta})$ بردار ستونی $K\times1$ است که عناصر آن بیانگر مشتق Q نسبت‌به ضرایب $(\frac{\partial Q}{\partial\beta_k})$ می‌باشد. H ماتریس هشین است که عناصر آن بیانگر مشتق‌های جزئی مرتبه دوم نسبت‌به $\boldsymbol{\beta}$ است:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})=\frac{\partial^2Q}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'} \tag{11-34}$$

هر یک از عناصر ماتریس $\mathbf{H}$ برابر است با:

$$\frac{\partial^2Q}{\partial\beta_k\partial\beta_j} \tag{11-35}$$

۳-۶-۱۱ مقایسه الگوریتم‌های گاوس- نیوتن و نیوتن- رافسون

۱- تخمین β_{r+1} در الگوریتم گاوس- نیوتن طبق (۱۷-۱۱) و در الگوریتم نیوتن- رافسون طبق (۳۲-۱۱) برای حالت یک پارامتری عبارت است از:

گاوس- نیوتن: $$\beta_{r+1}=\beta_r-\frac{1}{2}\left[\sum_t Z_t(\beta_r)^2\right]^{-1}\left.\frac{\partial Q}{\partial\beta}\right|_{\beta_r} \tag{11-36}$$

نیوتن- رافسون: $$\beta_{r+1}=\beta_r-\left[\left.\frac{\partial^2Q}{\partial\beta^2}\right|_{\beta_r}\right]^{-1}\left.\frac{\partial Q}{\partial\beta}\right|_{\beta_r} \tag{11-37}$$

روابط فوق طبق (۲۷-۱۱) و (۳۲-۱۱) برای حالت K پارامتری عبارت است از:

گاوس- نیوتن: $$\boldsymbol{\beta}_{r+1}=\boldsymbol{\beta}_r-\frac{1}{2}\left[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta}_r)\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_r)\right]^{-1}\left.\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right|_{\beta_r} \tag{11-38}$$

نیوتن- رافسون: $$\boldsymbol{\beta}_{r+1}=\boldsymbol{\beta}_r-\left[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_r)\right]^{-1}\left.\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right|_{\beta_r} \tag{11-39}$$

۲- مشتق مرتبه دوم $Q(\boldsymbol{\beta})$ عبارت است از:

گاوس- نیوتن: $$\frac{\partial^2Q}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=2\left[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta})\right]$$

نیوتن- رافسون: $$\frac{\partial^2Q}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) \tag{11-40}$$

۳- امید ریاضی $h(\beta)$ عبارت است از:

$$E\left[h(\beta)\right]=2\sum_t Z'(\beta)^2 \tag{11-41}$$

زیرا با توجه‌به اینکه $E(Y_t|X_t)=g(X_t,\beta)$ است، امیدریاضی $Y_t-g(X_t,\beta)$ برابر صفر می‌باشد.

در حالت K پارامتری، خواهیم داشت:

$$E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})]=۲\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}) \qquad (۱۱-۴۲)$$

۴- با جایگذاری از (۱۱-۴۲) به‌جای $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}_۱)$ در (۱۱-۳۹) خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\beta}_{r+۱}=\boldsymbol{\beta}_r-۲[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta})]^{-۱}\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\beta}}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r} \qquad (۱۱-۴۳)$$

بنابراین رابطه نزدیکی بین این دو الگوریتم وجود دارد.

۵- واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{NLS}$ طبق الگوریتم گاوس- نیوتن برابر با $\sigma^۲[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta})]^{-۱}$ و در الگوریتم نیوتن- رافسون برابر با $۲\sigma^۲E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})]^{-۱}$ است.

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{NLS})=\sigma^۲[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta})]^{-۱}\cong ۲\sigma^۲E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})]^{-۱} \qquad (۱۱-۴۴)$$

مثال ۸-۱۱: در مثال ۶-۱۱، β را با الگوریتم نیوتن- رافسون برآورد می‌کنیم:

$$Y_t=e^{\beta X_t}+u_t$$

در الگوریتم نیوتن- رافسون، تخمین β عبارت است از:

$$\beta_{r+۱}=\beta_r-\left[\frac{d^۲Q}{d\beta^۲}\bigg|_{\beta_r}\right]^{-۱}\left[\frac{dQ}{d\beta}\bigg|_{\beta_r}\right]$$

$$=\beta_r-[h(\beta_r)]^{-۱}[q(\beta_r)]$$

مجموع مجذور خطاها عبارت است از:

$$Q(\beta)=\sum_t(Y_t-e^{\beta X_t})^۲$$

مشتق‌های مرتبه اول و دوم را حساب می‌کنیم:

$$q(\beta)=\frac{dQ(\beta)}{d\beta}=-۲\sum_t(Y_t-e^{\beta X_t})X_te^{\beta X_t}=\sum_t a_t(\beta)$$

$$h(\beta)=\frac{d^۲Q(\beta)}{d\beta^۲}=-۲\sum_t\left[(Y_t-۲e^{\beta X_t})X_t^۲e^{\beta X_t}\right]=\sum_t b_t(\beta)$$

که $a_t(\beta)=-۲(Y_t-e^{\beta X_t})X_te^{\beta X_t}$ و $b_t(\beta)=-۲(Y_t-۲e^{\beta X_t})X_t^۲e^{\beta X_t}$ است.

به‌ازای $\beta_۰=۱$ مقادیر زیر را داریم:

جدول ۹-۱۱

Y_t	X_t	$a_t(۱)$	$b_t(۱)$
۰	۱	۱۴/۷۷۸	۲۹/۵۵۶۲
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۹/۳۴۱۵	۲۴/۱۲
۲	۲	۱۵۹/۲۸۰	۷۵۵/۳۴
۴	۲	۱۰۰/۱۶۷۷	۶۳۷/۱۲
		۲۸۳/۵۶	۱۴۴۶/۱۴

$$\beta_۱=۱-(۱۴۴۶/۱۴)^{-۱}(۲۸۳/۵۶)=۰/۸۰۳۹$$

حال با استفاده از $\beta=۰/۸۰۳۹$ و با انجام محاسبات لازم، جدول زیر را به‌دست می‌آوریم:

جدول ۱۰-۱۱

Y_t	X_t	$a_t(۰/۸۰۳۹)$	$b_t(۰/۸۰۳۹)$
۰	۱	۹/۹۸	۱۹/۹۷
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۵/۵۱	۱۵/۵۰
۲	۲	۵۹/۷۴	۳۱۸/۸۲
۴	۲	۱۹/۸۰	۲۳۸/۹۵
		۹۵/۰۴	۵۹۳/۲۴

$$\beta_۲=۰/۸۰۳۹-(۵۹۳/۲۴)^{-۱}(۹۵/۰۴)=۰/۶۴۳۷$$

با استفاده از $\beta_۲=۰/۶۴۳۷$ مقادیر جدید a_t و b_t را حساب کرده و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۱۱-۱۱

Y_t	X_t	$a_t(۰/۶۴۳۷)$	$b_t(۰/۶۴۳۷)$
۰	۱	۷/۲۴۶۶	۱۴/۴۹۳
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۳/۴۳۹	۱۰/۱۸۶
۲	۲	۲۳/۵۲۷	۱۵۲/۰۸
۴	۲	-۵/۴۵۹	۹۴/۱۰۸
		۲۸/۷۵	۲۷۱/۳۶۹

$$\beta_۳=۰/۶۴۳۷-(۲۷۱/۳۶۹)^{-۱}(۲۸/۷۵)=۰/۵۳۷۷$$

با استفاده از β=۰/۵۳۷۷ مقادیر جدید a_t و b_t را حساب کرده و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۱۲-۱۱

Y_t	X_t	a_t(۰/۵۳۷۷)	b_t(۰/۵۳۷۷)
۰	۱	۵/۸۶۳	۱۱/۷۳۵
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۲/۴۳۸	۸/۳۰۱
۲	۲	۱۰/۹۲۱	۹۰/۵۸۵
۴	۲	−۱۲/۵۳۰	۴۳/۱۸۳
		۶۹/۶	۱۵۴/۲۹

β_4=۰/۵۳۷۷−(۱۵۴/۲۹)$^{-1}$(۶/۶۹)=۰/۴۹۴۴

براساس β=۰/۴۹۴۴ مقادیر جدید a_t و b_t را حساب کرده و جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۱۳-۱۱

Y_t	X_t	a_t(۰/۴۹۴۴)	b_t(۰/۴۹۴۴)
۰	۱	۵/۳۷۶	۱۰/۷۵۲
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۲/۰۹۷۰	۷/۴۷
۲	۲	۷/۴۰	۷۲/۶۰
۴	۲	−۱۴/۱۰۷	۲۹/۵۹
		۰/۷۶۳۹	۱۲۰/۴۱

β_5=۰/۴۹۴۴−(۱۲۰/۴۱)$^{-1}$(۰/۷۶۳۹)=۰/۴۸۸۰

با استفاده از β=۰/۴۸۸ مقادیر جدید a_t و b_t را حساب کرده و جدول را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۱۴-۶

Y_t	X_t	a_t(۰/۴۸۸)	b_t(۰/۴۸۸)
۰	۱	۵/۳۰۸	۱۰/۶۱
۱	۰	۰	۰
۱	۱	۲/۰۴۹	۷/۳۶
۲	۲	۶/۹۴۰	۷۰/۲۲
۴	۲	−۱۴/۲۹	۲۷/۷۶
		۰/۰۰۷۶	۱۱۵/۹۵

β_6=۰/۴۸۸−(۱۱۵/۹۵)$^{-1}$(۰/۰۰۷۶)=۰/۴۸۷۹

اگر تکرار بعدی را نیز انجام دهیم، تخمین β تغییری نمی‌کند و لذا $\hat{\beta}_{NLS}$=۰/۴۸۷۹ خواهد بود. برای محاسبه واریانس $\hat{\beta}_{NLS}$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

جدول ۱۵-۱۱

Y_t	X_t	$\hat{Y}_t=e^{0/4879X_t}$	$e_t=Y_t-\hat{Y}_t$	e_t^2
۰	۱	۱/۶۲۸۹	−۱/۶۲۸۹	۲/۶۵۳
۱	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱/۶۲۸۹	−۰/۶۵۳۳	۰/۳۹۵۵
۲	۲	۳/۶۵۳۳	−۰/۶۵۳۳	۰/۴۲۶۸
۴	۲	۲/۶۵۳۳	۱/۳۴۶۷	۱/۸۱۳۶
			۰	۵/۲۸۹

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum e_t^2}{n-1}=\frac{۵/۲۸۹}{۴}=۱/۳۲۲$$

با توجه به اینکه در آخرین تکرار (یعنی جدول ۱۴-۱۱) مقدار $h(\hat{\beta})$=۱۱۵/۹۵ به‌دست آمد، واریانس $\hat{\beta}$ برابر است با:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_{NLS})=۲\hat{\sigma}^2\left[h(\hat{\beta})\right]^{-1}=۲(۱/۳۲۲)(۱۱۵/۹۵)^{-1}=۰/۰۲۲۸$$

در روش گاوس− نیوتن، واریانس $\hat{\beta}$ برابر با ۰/۰۲۱۴ به‌دست آمد، ولی در اینجا برابر با ۰/۰۲۲۸ می‌باشد. آماره t برای معنادار بودن β عبارت است از:

$$t=\frac{\hat{\beta}}{\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\beta}_{NLS})}}=\frac{۰/۴۸۷۹}{\sqrt{۰/۰۲۲۸}}=\frac{۰/۴۸۷۹}{۰/۱۵۱}=۳/۲۳$$

۷-۱۱ روش حداکثر درستنمایی

مدل غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t=g(X_t,\beta)+u_t$$

شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{X},\boldsymbol{\beta})+\mathbf{u}$$

و مجموع مجذور خطا در حالت یک پارامتری به‌صورت زیر است:

$$Q(\beta)=\sum\left[Y_t-g(X_t,\beta)\right]^2$$

و در حالت K پارامتری عبارت است از:

$$Q(\boldsymbol{\beta})=\left[\mathbf{y}-\mathbf{g}(\mathbf{X},\boldsymbol{\beta})\right]'\left[\mathbf{y}-\mathbf{g}(\mathbf{X},\boldsymbol{\beta})\right]$$

مشتق $Q(\boldsymbol{\beta})$ عبارت است از:

$$\frac{dQ(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}$$

که در حالت K پارامتری، بردار مشتق‌ها را داریم که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{dQ}{d\boldsymbol{\beta}'}=\left[\frac{\partial Q}{\partial \beta_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial Q}{\partial \beta_K}\right]$$

ابتدا مروری بر مدل‌های خطی می‌کنیم. تابع درستنمایی برای مدل خطی $\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}$ به‌صورت زیر است.

$$L=\frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{\Omega}|}}e^{-\frac{1}{2}\mathbf{u}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{u}}$$

که $\mathbf{u}$ بردار متغیرهای نرمال با میانگین صفر و واریانس $\boldsymbol{\Omega}$ می‌باشد. اگر $\boldsymbol{\Omega}=\sigma^2\mathbf{I}$ باشد، آنگاه تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L=\frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{\Omega}|}}e^{-\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^n}}e^{-\frac{\sum u_i^2}{2\sigma^2}}$$

از طرف دیگر، در رگرسیون خطی، توزیع Y به تبع توزیع u نرمال است و لذا تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L=\frac{1}{\sqrt{2\pi|\boldsymbol{\Omega}|}}e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^n}}e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2}}$$

حال اگر معادله رگرسیون غیرخطی باشد، آنگاه تابع چگالی Y عبارت است از[1]:

$$f(Y_t)=f(u_t)\left|\frac{du_t}{dY_t}\right| \qquad (11\text{-}45)$$

در رگرسیون خطی، $\frac{du_t}{dY_t}=1$ است.

در فصل نهم، قضایا و روابطی برای روش حداکثر درستنمایی به‌دست آمد که به‌طور خلاصه عبارتند از:

۱- قضیه کرامر- رائو بیان می‌کند که کران پایین برای واریانس تخمین‌زنندهٔ پارامتر γ عبارت است از:

۱- جزئیات این مباحث را می‌توانید در کتاب‌های آمار پی‌گیری نمود. به‌عنوان نمونه رجوع شود به: سوری، علی (۱۳۹۰) آمار، احتمال و استنتاج آماری، نشر نور علم، چاپ سوم، فصل دهم.

$$\text{var}(\hat{\gamma})\geq\frac{1}{E\left[\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}\right]^2} \qquad (11\text{-}46)$$

۲- ماتریس هشین یا ماتریس مشتق‌های جزئی مرتبه دوم عبارت است از:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma})=\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}\partial \boldsymbol{\gamma}'} \qquad (11\text{-}47)$$

۳- ثابت شد که برابری زیر برقرار است:

$$E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}'}\right)\right]=-E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}\partial \boldsymbol{\gamma}'}\right] \qquad (11\text{-}48)$$

۴- منفی امید ریاضی ماتریس هشین معروف به ماتریس اطلاعات[1] است (فصل نهم را ببینید):

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma})=-E[H(\boldsymbol{\gamma})]=-E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}\partial \boldsymbol{\gamma}'}\right]=-E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}'}\right)\right]$$

برای توزیع نرمال، ماتریس اطلاعات به‌ازای ضرایب $\boldsymbol{\beta}$ و σ^2 عبارت است از:

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma})=-E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\gamma})]=-E\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \boldsymbol{\beta}'} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \sigma^2}\\ \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \sigma^2} & \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2\partial \sigma^2}\end{bmatrix}$$

$$=-E\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{X}'\mathbf{X} & -\frac{\mathbf{X}'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2}\\ -\frac{\mathbf{X}'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2} & -\frac{n}{2\sigma^4}+\frac{\mathbf{u}'\mathbf{u}}{\sigma^6}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} & 0\\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n}\end{bmatrix} \qquad (11\text{-}50)$$

۵- مشتق مرتبه اول تابع درستنمایی معروف به تابع امتیاز[2] است:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma})=\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \qquad (11\text{-}51)$$

امید ریاضی $\mathbf{S}(\boldsymbol{\gamma})$ برابر صفر و واریانس آن برابر با ماتریس اطلاعات است.

۶- واریانس تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی برابر با معکوس ماتریس اطلاعات است:

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{ML})=\mathbf{I}(\boldsymbol{\gamma})^{-1} \qquad (11\text{-}52)$$

1- information matrix
2- score function

بنابراین، واریانس تخمین‌زنندهٔ β و σ^2 عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\hat{\gamma}_{ML})=\mathbf{I}(\gamma)^{-1}\Rightarrow\begin{bmatrix}\mathrm{var}(\hat{\beta})\\ \mathrm{var}(\hat{\sigma}^2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} & 0\\ 0 & \frac{2\sigma^4}{n}\end{bmatrix} \qquad (11-53)$$

حال بحث را برای رگرسیون غیرخطی به‌کار می‌بریم:

$$\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{X},\beta)+\mathbf{u} \quad \text{و} \quad \mathbf{u}\sim \mathrm{N}(0,\Omega) \qquad (11-54)$$

که $\Omega=\sigma^2\mathbf{I}$ است.

تابع درستنمایی برای مدل غیرخطی عبارت است از:

$$L(\beta,\sigma^2)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{[y-g(X,\beta)]'[y-g(X,\beta)]}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{Q(\beta)}{2\sigma^2}} \qquad (11-55)$$

و لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L(\beta,\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{Q(\beta)}{2\sigma^2} \qquad (11-56)$$

ابتدا تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای σ^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=0\Rightarrow-\frac{2}{2\sigma^2}+\frac{Q(\beta)}{2\sigma^4}=0\Rightarrow\hat{\sigma}^2_{ML}=\frac{Q(\beta)}{n} \qquad (11-57)$$

حال به‌جای σ^2 در (۵۶-۱۱) قرار می‌دهیم:

$$\ln L(\beta)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\frac{Q(\beta)}{2n}-\frac{n}{2}=(-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\ln n)-\frac{n}{2}\ln Q(\beta) \qquad (11-58)$$

معادله فوق نشان می‌دهد که حداکثر نمودن تابع درستنمایی معادل با حداقل نمودن $Q(\beta)$ است و لذا بایستی نتایج با روش حداقل مربعات غیرخطی، یکسان باشد. لذا $\hat{\gamma}_{ML}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{ML}\\ \hat{\sigma}^2_{ML}\end{bmatrix}$ توزیع نرمال با خصوصیات زیر دارد:

$$\hat{\gamma}_{ML}\sim \mathrm{N}(\gamma,\mathbf{I}(\gamma)^{-1})$$

که ماتریس اطلاعات $\mathbf{I}(\gamma)$ برابر است با:

$$\mathbf{I}(\gamma)=-E[\mathbf{H}(\gamma)]=-E\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta\partial\beta'} & \frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta\partial\sigma^2}\\ \frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta\partial\sigma^2} & \frac{\partial^2\ln L}{(\partial\sigma^2)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{Z}'(\beta)\mathbf{Z}(\beta)}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{n}{2\sigma^4}\end{bmatrix} \qquad (11-59)$$

برای به‌دست آوردن تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی از سه روش استفاده می‌شود که شامل الگوریتم نیوتن- رافسون، روش امتیازدهی[1] و الگوریتم BHHH[2] می‌باشد.

الگوریتم نیوتن- رافسون، از بسط تابع امتیاز (مشتق مرتبه اول از لگاریتم درستنمایی) حول β_0 استفاده می‌کند.

$$\mathbf{S}(\beta)\equiv\mathbf{S}(\beta_0)+\left.\frac{d\mathbf{S}}{d\beta}\right|_{\beta_0}(\beta-\beta_0)\ ;\ \mathbf{S}(\beta)=\frac{d\ln L}{d\beta} \qquad (11-60)$$

شرط حداکثر شدن تابع درستنمایی این است که $\mathbf{S}(\beta)=0$ باشد:

$$\mathbf{S}(\beta)\equiv\mathbf{S}(\beta_0)+\left.\frac{d\mathbf{S}}{d\beta}\right|_{\beta_0}(\beta-\beta_0)=0\Rightarrow\beta_1=\beta_0+\left(\left.\frac{d\mathbf{S}}{d\beta}\right|_{\beta_0}\right)^{-1}\mathbf{S}(\beta_0)$$

با جایگذاری به‌جای $\mathbf{S}(\beta_1)$ و $\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\beta}$ خواهیم داشت:

$$\beta_1=\beta_0-\left[\left.\frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right|_{\beta_0}\right]^{-1}\left.\frac{d\ln L}{d\beta}\right|_{\beta_0}=\beta_0-[\mathbf{H}(\beta_0)]^{-1}\left.\frac{dL}{d\beta}\right|_{\beta_0} \qquad (11-61)$$

نتیجهٔ فوق را برای تخمین مرحله $r+1$ام تعمیم می‌دهیم:

$$\beta_{r+1}=\beta_r-[\mathbf{H}(\beta_r)]^{-1}\left.\frac{\partial\ln L}{\partial\beta}\right|_{\beta_r} \qquad (11-62)$$

چون $\mathbf{H}(\beta_r)=\frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta\partial\beta'}=-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial\beta\partial\beta'}$ و $\frac{\partial^2\ln L}{\partial\beta}=-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial Q}{\partial\beta}$ است، لذا ملاحظه می‌شود که در اینجا نیز همان نتایج حداقل مربعات غیرخطی به‌دست می‌آید.

$$\beta_{r+1}=\beta_r-\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left.\frac{\partial^2 Q}{\partial\beta\partial\beta'}\right|_{\beta_r}\right]^{-1}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left.\frac{\partial Q}{\partial\beta}\right|_{\beta_r}\right] \qquad (11-63)$$

1- scoring
2- Berndt, Hall, Hall and Hausman

$$=\boldsymbol{\beta}_r-\left[-\frac{\partial^2 Q}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r}\right]^{-1}\left[\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r}\right]$$

در روش امتیازدهی، به‌جای ماتریس هشین از امید ریاضی آن استفاده می‌شود که معروف به ماتریس هشین انتظاری است. از طرف دیگر دیدیم که $-E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})]$ برابر با ماتریس اطلاعات است. امید ریاضی ماتریس هشین عبارت است از:

$$E[\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})]=E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\right]=-\frac{\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta})\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2} \qquad (۱۱-۶۴)$$

اگر به‌جای ماتریس $\mathbf{H}$، امید ریاضی آن را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\beta}_{r+1}=\boldsymbol{\beta}_r-\left[-\frac{1}{\sigma^2}\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta}_r)\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_r)\right]^{-1}\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r}\right]$$

$$=\boldsymbol{\beta}_r-\frac{1}{2}[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta}_r)\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_r)]^{-1}\left[\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\beta}}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r}\right] \qquad (۱۱-۶۵)$$

بنابراین، روش امتیازدهی با الگوریتم نیوتن- رافسون یکسان است.

در روش امتیازدهی، واریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ برابر است با:

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{I}(\boldsymbol{\beta})^{-1}=-[E(\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}))]^{-1}=\sigma^2[\mathbf{Z}'(\boldsymbol{\beta}_r)\mathbf{Z}(\boldsymbol{\beta}_r)]^{-1} \qquad (۱۱-۶۶)$$

در الگوریتم BHHH به‌جای مشتق مرتبه دوم تابع درستنمایی از حاصل‌ضرب مشتق مرتبه اول استفاده می‌شود. مشتق مرتبه دوم به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=\sum_t\frac{\partial^2 \ln L_t}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'} \qquad (۱۱-۶۷)$$

$L_t=f(u_t)$ و $\ln L=\sum_t \ln L_t$ است. در الگوریتم BHHH از عبارت زیر استفاده می‌شود:

$$\left[\sum_t\left(\frac{\partial \ln L_t}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right)\left(\frac{\partial \ln L_t}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\right)\right] \qquad (۱۱-۶۸)$$

بنابراین، تخمین $\boldsymbol{\beta}$ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\beta}_{r+1}=\boldsymbol{\beta}_r+\left[\sum_t\left(\frac{\partial \ln L_t}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right)\left(\frac{\partial \ln L_t}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\right)\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r}\right]^{-1}\left[\frac{\partial \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}}\bigg|_{\boldsymbol{\beta}_r}\right] \qquad (۱۱-۶۹)$$

برآورد مدل‌های غیرخطی در Eviews

فایل data9

به‌منظور برآورد مدل‌های غیرخطی از مثالی که در جدول (۵-۱۱) ارائه شده استفاده می‌کنیم.

Y_t	X_t
۰	۱
۱	۰
۱	۱
۲	۲
٤	۲

ابتدا با استفاده از Quick → Estimate Equation پنجرهٔ زیر را باز کرده و در قسمت Equation Specification معادله موردنظر را وارد می‌کنیم. در اینجا معادله $Y_t=e^{\beta X_t}$ را به‌صورت $Y=\exp(C(1)*X)$ وارد می‌کنیم:

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

```
y=exp(c(1)*x)
```

Estimation settings

Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)

Sample: 1 5

OK | Cancel

با انتخاب OK نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید که با نتایج قبلی که به‌صورت دستی حساب کردیم، یکسان است:

Equation: UNTITLED Workfile: GLM::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/10/13 Time: 19:55
Sample: 1 5
Included observations: 5
Convergence achieved after 1 iteration
Y=EXP(C(1)*X)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.487935	0.146472	3.331253	0.0291

R-squared	0.425086	Mean dependent var	1.600000
Adjusted R-squared	0.425086	S.D. dependent var	1.516575
S.E. of regression	1.149914	Akaike info criterion	3.294108
Sum squared resid	5.289211	Schwarz criterion	3.215996
Log likelihood	-7.235271	Hannan-Quinn criter.	3.084462
Durbin-Watson stat	1.332836		

روش دیگر برای برآورد برخی معادلات غیرخطی، استفاده از روش GLM [1] است. به عنوان مثال برای تخمین $Y = e^{\beta X}$ می‌توان در پنجرهٔ Equation Estimation ابتدا نام متغیرهای وابسته و توضیحی را وارد می‌کنیم و روش GLM را انتخاب می‌کنیم.

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

y x

Estimation settings

Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)

Sample:

LS - Least Squares (NLS and ARMA)
GMM - Generalized Method of Moments
LIML - Limited Information Maximum Likelihood and K-Class
COINTREG - Cointegrating Regression
ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
BINARY - Binary Choice (Logit, Probit, Extreme Value)
ORDERED - Ordered Choice
CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
COUNT - Integer Count Data
QREG - Quantile Regression (including LAD)
GLM - Generalized Linear Models
STEPLS - Stepwise Least Squares
ROBUSTLS - Robust Least Squares
HECKIT - Heckman Selection (Generalized Tobit)
BREAKLS - Least Squares with Breakpoints
SWITCHREG - Switching Regression

در پنجره فوق می‌توان نوع توزیع را در قسمت Family انتخاب نمود که ما نرمال را انتخاب کرده‌ایم. انواع توزیع‌هایی که در اینجا ارائه شده است، عبارتند از:

Family: Normal

Link function:

Estimation settin

Method: GLM

Sample: 1 5

Normal
Poisson
Binomial Count
Binomial Proportion
Negative Binomial (k)
Gamma
Inverse Gaussian
Exponential Mean
Power Mean (p)
Binomial Squared

1- generalized linear models

علاوه بر این، نوع برخی از توابع در قسمت Link function معرفی شده‌اند که می‌توان آنها را انتخاب کرد. به عنوان مثال $Y_t = e^{\beta X_t}$ را می‌توان با انتخاب log در نظر گرفت.

Link function: Log

Estimation settin

Method: GLM

Sample: 1 5

Identity
Log
Log-Complement
Logit
Probit
Log-Log
Complementary Log-Log
Inverse
Power (p)
Power Odds Ratio (p)
Box-Cox (p)
Box-Cox Odds Ratio (p)

با انتخاب OK نتایج به‌دست می‌آید.

علاوه بر این برای استفاده از الگوریتم‌های مختلف، می‌توان در پنجرهٔ Equation Estimation گزینه options را انتخاب نمود که پنجرهٔ زیر باز می‌شود. در این پنجره می‌توان هر یک از الگوریتم‌های مختلف را انتخاب نمود.

Equation Estimation

Specification | Options

Specification options

Offset:

Frequency weights:

Weights: None

Weight series:

Scaling: EViews default

Dispersion Options

Method: Default (Pearson Chi-Sq.)

Coefficient covariance options

Covariance method: Default

Information matrix: Hessian - expected

☑ d.f. Adjustment

Estimation options

Optimization Algorithm: BHHH ← الگوریتم‌ها

Starting Values: EViews Supplied ← انتخاب مقدار اولیه

Max Iterations: 500

Convergence: 0.0001 ☐ Display settings

IRLS Iterations: 0

OK | Cancel

۱۱-۸ آزمون محدودیت‌ها در مدل‌های غیرخطی

مشابه مدل‌های خطی می‌توان آزمون محدودیت‌ها را در مدل‌های غیرخطی انجام داد. بدین منظور ابتدا رگرسیون موردنظر را بدون هیچ قیدی تخمین زده و مجموع مجذور خطاهای آن را با

$RSS_{UR}=Q(\hat{\beta}_{UR})$ نشان می‌دهیم. سپس با اعمال قیدها، مجدداً رگرسیون را تخمین زده و مجموع مجذور خطاهای آن را با $RSS_R=Q(\hat{\beta}_R)$ نشان می‌دهیم. فرض کنید که m قید داریم که به‌صورت $\mathbf{R(\beta)=r}$ می‌باشد. $\mathbf{R(\beta)}$ ممکن است خطی یا غیرخطی باشد. برای آزمون فرضیه می‌توان از روش‌های زیر استفاده نمود:[1]

۱– **آماره F :** نسبت F عبارت است از:

$$F=\frac{[Q(\hat{\beta}_R)-Q(\hat{\beta}_{UR})]/m}{Q(\hat{\beta}_{UR})/(n-K)}$$

m تعداد محدودیت‌ها و K تعداد ضرایب است. توجه شود که نسبت فوق، تقریباً توزیع F دارد.

۲– **آزمون والد:** آزمون والد برای معنادار بودن قیدها با استفاده از معیار زیر انجام می‌شود:

$$W=[\mathbf{R}(\hat{\beta}_{UR})-\mathbf{r}][\mathbf{R}(\hat{\beta}_{UR})\hat{\mathbf{V}}\mathbf{R}'(\hat{\beta}_{UR})]^{-1}[\mathbf{R}(\hat{\beta}_{UR})-\mathbf{r}]$$

$$\hat{\mathbf{V}}=\mathrm{var}(\hat{\beta}_{UR})$$

W توزیع مجانبی کای‌دو با درجه آزادی m دارد.

۳– **ضریب لاگرانژ:** آماره LM برای معنادار بودن قیدها عبارت است از:

$$LM=\frac{\mathbf{e}_R'\mathbf{Z}'(\hat{\beta}_R)[\mathbf{Z}'(\hat{\beta}_R)\mathbf{Z}(\hat{\beta}_R)]^{-1}\mathbf{Z}(\hat{\beta}_R)\mathbf{e}_R}{\mathbf{e}_R'\mathbf{e}_R/n}$$

LM توزیع مجانبی کای‌دو با درجه آزادی m دارد. $\mathbf{e}_R$ جملهٔ خطا برای رگرسیون مقید و $\mathbf{Z}'(\hat{\beta}_R)$ مقادیر $\mathbf{Z}$ به ازای تخمین‌های مقید می‌باشد.

آزمون محدودیت‌ها در Eviews فایل data9

آزمون محدودیت‌ها را با مثال زیر بررسی می‌کنیم.

Y_t	X_t
۰	۱
۱	۰
۱	۱
۲	۲
۴	۲

۱– جزئیات این روش‌ها در فصل نهم بحث شده است.

مدل غیرخطی $Y_t=\alpha e^{\beta X_t}+u_t$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم آزمون برابری $\alpha=\beta$ را انجام دهیم. برای تخمین غیرمقید این معادله، در پنجرهٔ Equation Estimation آن را به‌صورت $\mathrm{Y=C(1)*exp(C(2)*X)}$ می‌نویسیم. نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: GLM::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/11/13 Time: 13:27
Sample: 1 5
Included observations: 5
Convergence achieved after 5 iterations
Y=C(1)*EXP(C(2)*X)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.162567	0.330056	0.492545	0.6561
C(2)	1.453813	1.036154	1.403085	0.2552

R-squared	0.643595	Mean dependent var	1.600000
Adjusted R-squared	0.524793	S.D. dependent var	1.516575
S.E. of regression	1.045455	Akaike info criterion	3.215956
Sum squared resid	3.278928	Schwarz criterion	3.059731
Log likelihood	-6.039890	Hannan-Quinn criter.	2.796664
Durbin-Watson stat	2.524237		

برای تخمین مقید، معادله موردنظر را به‌صورت $\mathrm{Y=C(1)*exp(C(1)*X)}$ می‌نویسیم. نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: GLM::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/11/13 Time: 13:32
Sample: 1 5
Included observations: 5
Convergence achieved after 4 iterations
Y=C(1)*EXP(C(1)*X)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	0.686302	0.073205	9.375029	0.0007

R-squared	0.537017	Mean dependent var	1.600000
Adjusted R-squared	0.537017	S.D. dependent var	1.516575
S.E. of regression	1.031921	Akaike info criterion	3.077577
Sum squared resid	4.259441	Schwarz criterion	2.999465
Log likelihood	-6.693943	Hannan-Quinn criter.	2.867931
Durbin-Watson stat	1.734767		

آماره F برابر است با:

$$Q(\hat{\beta}_{UR})=\text{۳/۲۷۸۹}$$

$$Q(\hat{\beta}_{R})=\text{۴/۲۵۹۴}$$

$$F=\frac{(\text{۴/۲۵۹۴}-\text{۳/۲۷۸۹})/\text{۱}}{\text{۳/۲۷۸۹}/(\text{۵}-\text{۲})}=\text{۰/۸۹۷۱}$$

چون $F_{\text{۰/۰۵،۱،۳}}=\text{۱۰/۱}$ است، لذا $F=\text{۰/۸۹۷}$ در ناحیه بحرانی قرار ندارد و فرضیه برابری $\alpha=\beta$ رد نمی‌شود. علاوه بر این، مشابه آزمون محدودیت‌ها می‌توان آزمون والد را انجام داد. بدین منظور در پنجرهٔ نتایج مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

View → Coefficient Diagnostics → Wald Test

Equation: UNTITLED Workfile: GLM::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

- Representations
- Estimation Output
- Actual,Fitted,Residual ▸
- ARMA Structure...
- Gradients and Derivatives ▸
- Covariance Matrix
- Coefficient Diagnostics ▸
  - Scaled Coefficients
  - Confidence Intervals...
  - Confidence Ellipse...
  - Variance Inflation Factors
  - Coefficient Variance Decomposition
  - Wald Test- Coefficient Restrictions...
  - Omitted Variables Test - Likelihood Ratio...
  - Redundant Variables Test - Likelihood Ratio...
  - Factor Breakpoint Test...
- Residual Diagnostics ▸
- Stability Diagnostics ▸
- Label

df	Probability
3	0.4138
(1, 3)	0.4138
1	0.3440

Restrictions are linear in coefficients

با انتخاب مسیر مذکور، پنجرهٔ زیر باز می‌شود که محدودیت‌ها را در آن وارد می‌کنیم. در اینجا یک محدودیت داریم که آن را به‌صورت $C(\text{۱})=C(\text{۲})$ وارد می‌کنیم.

Wald Test

Coefficient restrictions separated by commas

c(1)=c(2)

Examples

C(1)=0, C(3)=2*C(4)

OK | Cancel

با انتخاب OK نتایج آزمون محدودیت‌ها به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: GLM::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats

Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
t-statistic	-0.946363	3	0.4138
F-statistic	0.895603	(1, 3)	0.4138
Chi-square	0.895603	1	0.3440

Null Hypothesis: C(1)=C(2)
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(1) - C(2)	-1.291245	1.364430

Restrictions are linear in coefficients.

$F=\text{۰/۸۹۵}$ در ناحیه بحرانی قرار ندارد و لذا فرضیه H_0 رد نمی‌شود. یعنی برابری $\alpha=\beta$ یا $C(\text{۱})=C(\text{۲})$ رد نمی‌شود.

در اینجا محدودیت‌ها به‌صورت خطی تعریف شده‌اند. می‌توان محدودیت‌ها را به‌صورت‌های دیگری نیز معرفی نمود. مثلاً $\alpha=\sqrt{\beta}$ که آن را به‌صورت C(1)=C(2)^0.5 وارد می‌کنیم. یا می‌توان دو محدودیت را معرفی نمود، مانند $\alpha=\text{۱}$ و $\beta=\text{۰/۵}$ که آنها را به‌صورت $C(\text{۱})=\text{۱}$ و $C(\text{۲})=\text{۰/۵}$ وارد می‌کنیم:

Wald Test

Coefficient restrictions separated by commas

c(1)=1, c(2)=.5

Examples

C(1)=0, C(3)=2*C(4)

OK | Cancel

نتایج آزمون در جدول زیر نشان داده شده است:

```
Equation: UNTITLED   Workfile: GLM::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats
Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic      Value        df        Probability
F-statistic         93.44539     (2, 3)    0.0020
Chi-square          186.8908     2         0.0000

Null Hypothesis: C(1)=1, C(2)=.5
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)      Value        Std. Err.
-1 + C(1)                         -0.837433    0.330052
-0.5 + C(2)                       0.953814     1.036163

Restrictions are linear in coefficients.
```

چون $F = ۹۳/۴۴$ در ناحیه بحرانی قرار دارد، لذا فرضیه H_0 رد می‌شود و ضرایب نمی‌توانند به‌صورت $\alpha = ۱$ و $\beta = ۰/۵$ باشند. اعمال این قیدها، رگرسیون را به شدت تغییر می‌دهد و لذا این قیود معنادار هستند.

مسائل

۱۱-۱ فرض کنید که $E(Y_t|X_t) = g(X_t)$ باشد. رگرسیون $Y_t = g(X_t) + u_t$ را تبدیل به یک معادله خطی کنید.

۱۱-۲ فرض کنید که $E(Y_t|X_t) = g(X_t)$ باشد. رگرسیون $Y_t = g(X_t) + u_t$ با تقریب مرتبه ۲ بر حسب X_t بنویسید.

۱۱-۳ فرض کنید تابع تولید به‌صورت CES (کشش جانشینی ثابت) باشد.

$$Y_t = A\left[\sigma K^{-\rho} + (1-\sigma)L^{-\rho}\right]^{-1/\rho}$$

الف) تابع فوق را با تقریب مرتبه اول بنویسید.

ب) تابع فوق را با تقریب مرتبه دوم بنویسید.

ضمیمه فصل یازدهم: معادلات غیر خطی در Stata

برآورد معادلات غیر خطی در Stata

فایل data15

در فصل سوم روش برآورد معادلات غیرخطی در Stata را بررسی کردیم. در اینجا نیز مجدداً مثال ساده ای را که در این فصل بررسی کردیم، برآورد می‌کنیم. این مثال به صورت $Y_t = e^{\beta X_t}$ می‌باشد. بدین منظور مسیر زیر را ادنبال می‌کنیم:

nonlinear least squares → Linear models and related → Statistics

```
nl - Nonlinear least-squares estimation
Model | Model 2 | by/if/in | Weights | SE/Robust | Reporting | Opt options
(•) Enter a substitutable expression
( ) Use a preprogrammed substitutable expression
( ) Use a function evaluator program
Dependent variable:     Substitutable expression:
y                       exp({b0}*x)                          Create...
Variables: (optional)
Initial values: (optional)
                                          OK   Cancel   Submit
```

متغیر وابسته — معادله غیر خطی

و یا می‌توان از فرمان زیر استفاده نمود:

nl (y=exp({b0}*x))

نتیجه روش حداقل مربعات غیرخطی عبارت است از:

```
. nl (y=exp({b0}*x))
(obs = 5)

Iteration 0:  residual SS =  9.300976
Iteration 1:  residual SS =   5.42235
Iteration 2:  residual SS =  5.290349
Iteration 3:  residual SS =  5.289216
Iteration 4:  residual SS =  5.289211
Iteration 5:  residual SS =  5.289211
Iteration 6:  residual SS =  5.289211

      Source |       SS       df       MS          Number of obs =        5
-------------+------------------------------       R-squared     =   0.7596
       Model |  16.7107889     1  16.7107889       Adj R-squared =   0.6995
    Residual |  5.28921106     4  1.32230276       Root MSE      = 1.149914
-------------+------------------------------       Res. dev.     = 14.47054
       Total |          22     5         4.4

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         /b0 |   .4879348    .1464715    3.33   0.029     .0812646     .894605
------------------------------------------------------------------------------
```

بنابراین، ضریب β برابر با ۰/٤٨٧٩ می‌باشد.

فصل دوازدهم

مدل‌های با وقفه توزیعی

۱-۱۲ مقدمه

در بسیاری از مدل‌های اقتصادی و مالی، تأثیرگذاری متغیرهای توضیحی با تأخیرهای قابل توجهی مواجه‌اند. به‌عنوان مثال اثر یک سیاست پولی انبساطی بر متغیرهای موردنظر، با تأخیر ظاهر می‌شود. اثر سرمایه‌گذاری‌های جدید بر ایجاد ظرفیت تولید و مقدار تولید دارای تأخیرهای قابل توجهی است. اثر وقایع و اخبار بر قیمت سهام ممکن است دارای تأخیر باشد. این تأخیرها می‌تواند ناشی از ساختار اقتصادی و یا ناشی از رفتار و واکنش احتیاط‌آمیز کارگزاران اقتصادی به سیاست‌ها و وقایع باشد. در این خصوص مبانی نظری مختلفی وجود دارد، مانند نظریه درآمد دائمی، اصل شتاب سرمایه‌گذاری، فرضیه انتظارات تطبیقی، فرضیه تعدیلات جزئی و... . به هر حال، در مطالعات کاربردی، اثر متغیرهای توضیحی به‌طور آنی اتفاق نمی‌افتد بلکه بخشی از آن را ممکن است در همان لحظه مشاهده کنیم و بخش دیگر نیازمند گذشت زمان باشد. مدل‌هایی که برای بررسی اثرات تأخیری ارائه می‌شوند، معروف به مدل‌های با وقفه توزیعی[1] هستند که در این فصل به بررسی آنها می‌پردازیم.

۲-۱۲ اثرات تأخیری

اثرات تأخیری بیانگر آن است که اگر مقدار X امروز تغییر کند اثر آن در امروز و روزهای آینده ظاهر خواهد شد. به عبارت دیگر تغییرات Y در زمان حال، وابسته به تغییر X در زمان حال و زمان‌های گذشته است. شکل کلی یک مدل با وقفه توزیعی به‌صورت زیر می‌باشد:

1- distributed lag

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \ldots + \beta_K X_{t-K} + u_t$$
$$= \alpha + \sum_{j=0}^{K} \beta_j X_{t-j} + u_t \qquad (۱۲-۱)$$

معادله فوق نشان می‌دهد که اثر X بر Y می‌تواند تا K سال ادامه یابد و بعد از آن صفر می‌شود. در مواردی ممکن است وقفه‌ها تا بی‌نهایت $(K=\infty)$ ادامه یابد.

با استفاده از (۱۲-۱) می‌توان اثر تغییر X بر Y را با وقفه‌های مختلف محاسبه نمود. به‌عنوان مثال اگر X در سال $t-j$ تغییر کند، اثر آن بر Y در سال t برابر است با:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_{t-j}} = \beta_j \quad ; \quad j = 0,1,\ldots,K \qquad (۱۲-۲)$$

حال اگر واقعاً اثر تغییر X، K سال ادامه داشته باشد، در این صورت کل اثر تغییر در X برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{K} \beta_j = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_K \quad ; \quad \beta_{K+1} = 0 \qquad (۱۲-۳)$$

اگر بخواهیم بخشی از اثر تغییر X بر Y را محاسبه کنیم، (مثلاً در طول s دوره) آنگاه می‌توان از فرمول زیر استفاده نمود:

$$\sum_{j=0}^{s} \beta_j = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_s \quad ; \quad s = 0,1,\cdots,K \qquad (۱۲-۴)$$

فرمول (۱۲-۳) نشان می‌دهد که برای مشاهدهٔ کل اثر X بایستی K دوره بگذرد. در حالی که فرمول (۱۲-۴) نشان می‌دهد که برای مشاهده بخشی یا درصدی از اثر X بایستی s دوره بگذرد. با استفاده از این دو فرمول می‌توان معیارهای دیگری مانند میانه و میانگین وقفه را محاسبه نمود که برای اندازه‌گیری اثرات تأخیری، اهمیت ویژه‌ای دارند.

میانه وقفه

میانه وقفه نشان می‌دهد که چقدر زمان باید بگذرد تا نیمی از کل اثرات X را مشاهده کنیم. از آنجا که کل اثر X توسط فرمول (۱۲-۳) و اثر X تا s سال توسط فرمول (۱۲-۴) داده شده است، لذا می‌توان بدین صورت گفت که s چه زمانی باید باشد تا نتیجهٔ فرمول (۱۲-۴) معادل با $\frac{1}{2}$ فرمول (۱۲-۳) گردد.

$$\sum_{j=0}^{s} \beta_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{K} \beta_j \qquad (۱۲-۵)$$

همان‌طور که بعداً خواهیم دید با حل معادله فوق مقدار s به‌دست می‌آید که برابر با میانه می‌باشد. بدیهی است که برای تعیین میانه بایستی تخمین β_jها را داشته باشیم. برای محاسبه s (میانه) شروع به جمع‌زدن β_jها می‌کنیم و آن تعداد از β_jها که جمع‌شان برابر با $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\beta_j$ شود، بیانگر میانه است.

مثال ۱-۹: فرض کنید $K=5$ باشد که $\hat\beta_0 = 1/2$، $\hat\beta_1 = 1$، $\hat\beta_2 = 0/8$، $\hat\beta_3 = 0/6$، $\hat\beta_4 = 0/4$ و $\hat\beta_5 = 0/2$ باشد (بدیهی است که $\hat\beta_{5+1} = \hat\beta_6 = 0$ است).

کل اثرات تغییر در X $= 1/2+1+0/8+0/6+0/4+0/2 = 4/2$

نصف اثرات $= \frac{1}{2}(4/2) = 2/1$

حال β_jها را تا جایی جمع می‌زنیم که رقم ۲/۱ را پوشش می‌دهد. در اینجا با مجموع $\beta_0 + \beta_1$ رقم ۲/۱ پوشش داده می‌شود:

$$\beta_0 + \beta_1 = 1/2 + 1 = 2/2$$

بنابراین در پایان دورهٔ ۱، حداقل نیمی از اثر X را می‌توان مشاهده کرد.

مشابه میانه می‌توان چارک‌ها را نیز حساب کرد. به‌عنوان مثال برای محاسبه چارک اول باید s را به گونه‌ای تعیین کنیم تا از مجموع β_jها به رقم $\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\beta_j$ برسیم، یعنی ۲۵ درصد از اثرات X را مشاهده کنیم. همچنین برای چارک سوم بایستی s را طوری تعیین کنیم که رقم $\frac{3}{4}\sum_{j=1}^{n}\beta_j$ به‌دست آید، یعنی ۷۵ درصد از اثرات X را مشاهده کنیم. بدیهی است که چارک دوم برابر با میانه است. در حالت کلی می‌توان بحث را بدین صورت عنوان کرد که s برابر با چه مقداری باشد تا a درصد از کل اثر X را مشاهده کنیم که در این صورت در فرمول (۱۲-۵) به‌جای $\frac{1}{2}$ عدد a را قرار می‌دهیم.

مثال ۲-۹: در مثال ۱-۹ برای محاسبه چارک سوم ابتدا $\frac{3}{4}\sum_{j=0}^{K}\hat\beta_j = \frac{3}{4}(4/2) = 3/15$ را حساب کرده و سپس $\hat\beta_j$ها را جمع می‌زنیم تا جایی که به رقم ۳/۱۵ برسیم. چون $\hat\beta_0 + \hat\beta_1 + \hat\beta_2 + \hat\beta_3 = 3/6$ است، لذا با گذشت ۳ دوره می‌توان حداقل ۷۵ درصد از اثر X را مشاهده نمود.

میانگین وقفه

میانگین وقفه نشان می‌دهد که برای مشاهده اثر یک واحد تغییر در X به‌طور متوسط چند وقفه نیاز است. میانگین وقفه را به‌صورت میانگین وزنی وقفه‌ها حساب می‌کنیم:

$$\text{میانگین وقفه} = \frac{\sum_{j=0}^{K}\beta_j j}{\sum_{j=0}^{K}\beta_j} \qquad (۱۲-۶)$$

j بیانگر وقفه و β_j وزن وقفه jام می‌باشد.

مثال ۳-۱۲: در مثال ۱-۱۲ میانگین وقفه برابر است با:

$$\text{میانگین وقفه} = \frac{\sum_{j=0}^{K}\beta_j j}{\sum_{j=0}^{K}\beta_j} = \frac{1/2(0)+1(1)+0/8(2)+0/6(3)+0/4(4)+0/2(5)}{1/2+1+0/8+0/6+0/4+0/2}$$

$$= \frac{7/0}{4/2} = 1/67$$

بنابراین، به‌طور متوسط ۱/۶۷ وقفه (زمان) نیاز است تا ۱ واحد از اثر X را مشاهده کنیم.

۳-۱۰ تخمین مدل‌های با وقفهٔ توزیعی

هرچند بحث نظری در خصوص اثرات تأخیری نسبتاً ساده می‌باشد، ولی از لحاظ کاربردی با مشکلاتی مواجه است.

یکی از این مشکلات، مربوط به مقدار و علامت β_jها است. در عمل تخمین β_jها با مقادیر و علامت‌هایی مواجه می‌شود که تفسیر و تحلیل آنها را بسیار مشکل و حتی غیرممکن می‌سازد. به‌عنوان مثال اگر $K=5$ باشد، آنگاه بایستی ۶ ضریب β_j را تخمین بزنیم که از نظر علامت و مقدار، نتایج مغشوشی به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال، در حالی که انتظار داریم β_jهای مثبت به‌دست آید برخی از آنها مثبت و برخی منفی خواهند بود.

مشکل دیگر مربوط به کاهش درجه آزادی است. درجه آزادی مدل (۱-۱۲) برابر با $n-(K+2)-K$ یا $n-2(K+1)$ می‌باشد. $K+2$ تعداد ضرایب و K نیز برابر با تعداد وقفه‌ها

است. در واقع هر وقفه‌ای که به مدل اضافه شود، درجه آزادی را ۲ واحد کاهش می‌دهد، زیرا از یک طرف یکی از مشاهدات از دست می‌رود و از طرف دیگر یک ضریب اضافه می‌شود.

به‌عنوان مثال در مدل $Y_t=\alpha+\beta_0 X_t+\beta_1 X_{t-1}+u_t$، وجود X_{t-1} موجب می‌شود که اولین مشاهده را نتوانیم استفاده کنیم. همچنین ضریب β_1 را نیز باید برآورد کنیم که بدین طریق درجه آزادی را ۲ واحد کاهش داده است. در حالی که در مدل $Y_t=\alpha+\beta_0 X_t+u_t$ درجه آزادی برابر با $n-2$ است ولی در مدل مذکور برابر با $n-4$ می‌باشد. اگر $K=2$ باشد، آنگاه X_{t-2} نیز اضافه می‌شود که در این صورت، جدول مشاهدات عبارت است از:

Y_t	X_t	X_{t-1}	X_{t-2}
Y_1	X_1	–	–
Y_2	X_2	X_1	–
Y_3	X_3	X_2	X_1
Y_4	X_4	X_3	X_2
⋮	⋮	⋮	⋮
Y_n	X_n	X_{n-1}	X_{n-2}

جدول فوق نشان می‌دهد که اگر معادله شامل X_{t-2} نیز باشد، نمی‌توان مشاهدات اول و دوم (سطر اول و دوم در جدول) را استفاده نمود. از طرف دیگر چون ۳ ضریب را باید برآورد کنیم، درجه آزادی برابر با $n-2(2+1)=n-6$ خواهد شد.

بنابراین افزایش وقفه‌ها به شدت درجه آزادی را کاهش می‌دهد. به‌گونه‌ای که اگر $n=20$ و $K=5$ باشد، آنگاه درجه آزادی برابر با $n-2(K+1)=8$ خواهد بود.

برای حل مشکلات مذکور، معمولاً از روش‌هایی استفاده می‌شود که قیودی را بر ساختار β_jها اعمال می‌کنند. این قیود می‌تواند تخمین β_jها را از لحاظ مقدار و علامت، منطقی کند و همچنین می‌تواند از کاهش درجه آزادی جلوگیری نماید. پنج روش عمده در این خصوص وجود دارد که شامل روش وقفه خطی[1]، روش Vمعکوس، روش آلمون[2]، روش پاسکال و تبدیل کویک[3] می‌باشد.

1- linear lag
2- Almon
3- Koyek tranformation

تخمین مدل با وقفه توزیعی در Eviews

معادله $Y_t=\alpha+\sum_{j=0}^{3}\beta_j X_{t-j}+u_t$ را در نظر بگیرید. برای تخمین این معادله می‌توان آن را با فرمان LS برآورد کرد:

LS Y C X X(−1) X(−2) X(−3)

علاوه بر این می‌توان آن را به‌صورت زیر نیز برآورد نمود:

LS Y C X(0 to −3)

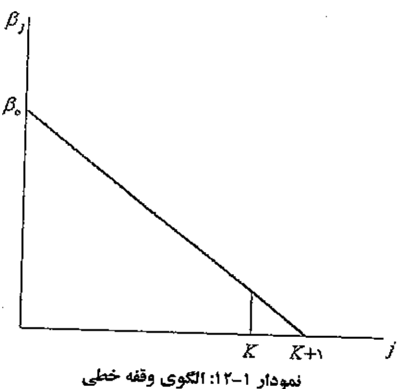
نتایج تخمین در پنجرهٔ Equation نشان داده می‌شود که مشابه معادلات معمولی است.

۱۲-۴ الگوی وقفه خطی[1]

یکی از محدودیت‌هایی که می‌توان بر ضرایب تحمیل کرد آن است که فرض کنیم β_jها همراه با افزایش وقفه، به‌صورت خطی کاهش می‌یابند. اگر تصور بر این است که اثر X بر Y تا وقفه Kام ادامه دارد و در $K+1$ به صفر می‌رسد، می‌توان آن را به‌صورت زیر فرمول‌بندی نمود:

$$\beta_j=\beta_0(1-\frac{j}{K+1}) \quad ; \quad j=1,2,\ldots,K \qquad (۱۲-۷)$$

بنابراین β_j تابع خطی از وقفه‌ها (j) است که روند آن در نمودار زیر نشان داده شده است.



نمودار ۱-۱۲: الگوی وقفه خطی

با فرض مثبت بودن β_0، ملاحظه می‌شود که با افزایش وقفه‌ها، مقدار β_j به‌صورت خطی کاهش می‌یابد.

1- linear lag

برای تعیین β_jها فقط نیاز به تخمین β_0 داریم. بدین منظور از (۱۲-۷) به‌جای β_j در معادله (۱۲-۱) قرار می‌دهیم:

$$Y_t=\alpha+\beta_0\sum_{j=0}^{K}\left(1-\frac{j}{K+1}\right)X_{t-j}+u_t=\alpha+\beta_0 Z_t+u_t \qquad (۱۲-۸)$$

که Z_t برابر است با:

$$Z_t=\sum_{j=0}^{K}\left(1-\frac{j}{K+1}\right)X_{t-j}$$

مثال ۴-۱۲: فرض کنید که $K=5$ باشد. در این صورت، Z_t برابر است با:

$$Z_t=\sum_{j=0}^{5}(1-\frac{j}{6})X_{t-j}=X_t+\frac{5}{6}X_{t-1}+\frac{4}{6}X_{t-2}+\frac{3}{6}X_{t-3}+\frac{2}{6}X_{t-4}+\frac{1}{6}X_{t-5}$$

و ضرایب عبارتند از:

$$\beta_0\ ,\ \beta_1=\frac{4}{6}\beta_0\ ,\ \beta_2=\frac{3}{6}\beta_0\ ,\ \beta_3=\frac{2}{6}\beta_0\ ,\ \beta_4=\frac{1}{6}\beta_0\ ,\ \beta_5=\frac{5}{6}\beta_0\ ,\ \beta_6=0$$

بنابراین، درجه آزادی معادله (۱۲-۸) برابر با $n-K-2$ است که K تعداد وقفه‌ها و عدد ۲ نیز تعداد ضرایب (β_0,α) را نشان می‌دهد. در حالی که در مدل (۱۲-۱) درجه آزادی برابر با $n-2(K+1)$ می‌باشد.

طبق معادله (۱۲-۸) اثر تغییر X بر Y به‌ازای وقفهٔ jام برابر است با:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_{t-j}}=\beta_j=\beta_0(1-\frac{j}{K+1}) \quad ; \quad j=0,1,\cdots,K \qquad (۱۲-۹)$$

یکی از مشکلات این روش، تعیین مقدار K است که مبنای خاصی برای تعیین آن وجود ندارد. البته می‌توان با تغییر مقدار K از معیارهای اطلاعات برای تعیین K استفاده نمود.[1]

در مدل وقفهٔ خطی، کل اثرات تغییر در X بر Y برابر است با[2]:

$$\sum_{j=0}^{K}\beta_j=\sum_{j=0}^{K}\beta_0(1-\frac{j}{K+1})=\frac{\beta_0 K}{2} \qquad (۱۲-۱۰)$$

۱- فصل سیزدهم بخش ۱۰-۱۳ را ببینید.

۲- با توجه به $\sum_{j=0}^{K}j=\frac{K(K+1)}{2}$، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=0}^{K}\beta_0(1-\frac{j}{K+1})=\beta_0(K-\frac{K(K+1)}{2(K+1)})=\beta_0\frac{K}{2}$$

میانگین وقفه را می‌توان با جایگذاری از (۱۲-۷) به‌جای β_j در (۱۲-۶)، به‌دست آورد[1]:

$$\text{میانگین وقفه} = \frac{\sum_{j=0}^{K}\beta_j j}{\sum_{j=0}^{K}\beta_j} = \frac{\beta_0 K(K+2)/6}{\beta_0 K/2} = \frac{K+2}{3} \qquad (۱۲\text{-}۱۱)$$

معیارهای دیگر از قبیل میانهٔ وقفه را نیز می‌توان محاسبه نمود.[2]

برآورد مدل وقفه خطی در Eviews

به منظور برآورد مدل (۱۲-۸)، ابتدا Z_t را با فرمان genr حساب می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای $K=5$ ، Z_t برابر است با:

$$\text{genr}\quad Z = X + \frac{5}{6}*X(-1) + \frac{4}{6}*X(-2) + \frac{3}{6}*X(-3) + \frac{2}{6}*X(-4) + \frac{1}{6}*X(-5)$$

بعد از محاسبه Z، معادله (۱۲-۸) را با فرمان LS برآورد می‌کنیم:

LS Y C Z

که C مقدار تخمینی α و ضریب Z نیز مقدار تخمینی β_0 است. بعد از تخمین $\hat{\beta}_0$ بقیه ضرایب را با فرمول $\hat{\beta}_j = \hat{\beta}_0(1-\frac{j}{K+1})$ حساب می‌کنیم.

۱۲-۵ الگوی وقفه V معکوس

یکی از مشکلات روش وقفه خطی آن است که اثرات تأخیری را همواره نزولی و یا صعودی در نظر می‌گیرد. برای حل این مشکل، روش V معکوس معرفی شده است که فرض می‌کند اثرات تأخیری، ابتدا صعودی و سپس نزولی است، در این روش، ساختار ضرایب به‌صورت زیر معرفی می‌شود:

۱- صورت کسر برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{K}\beta_j j = \sum_{j=0}^{K}\beta_0(1-\frac{j}{K+1})j = \beta_0\frac{K(K+2)}{6}$$

برای محاسبه عبارت فوق، از $\sum_{j=0}^{K} j = \frac{K(K+1)}{2}$ و $\sum_{j=0}^{K} j^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$ استفاده شده است.

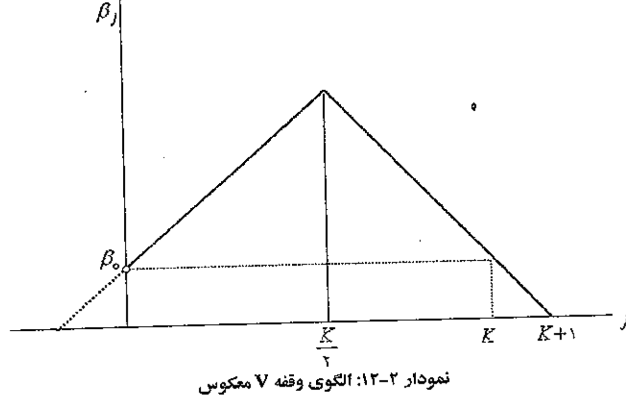
2 میانه وقفه برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{s}\beta_0(1-\frac{j}{K+1}) = \frac{1}{2}\frac{\beta_0 K}{2} \Rightarrow s = \frac{K}{2}+\frac{1}{2}-\sqrt{2K^2+2K+1}$$

توجه شود که $\sum_{j=0}^{s}\beta_0(1-\frac{j}{K+1})$ برابر با $\beta_0(s-\frac{s(s+1)}{2(K+1)})$ است.

در اینجا دو ریشه برای s به‌دست می‌آید که برای رعایت شرط $s<K$ بایستی ریشه کوچکتر را انتخاب کنیم.

$$\beta_j = \begin{cases} 0 & j=-1 \\ \beta_0(1+j) & j=0,1,\cdots,\frac{K}{2} \\ \beta_0[(K+1)-j] & j=\frac{K}{2}+1,\cdots,K \\ 0 & j=K+1 \end{cases} \qquad (۱۲\text{-}۱۲)$$



نمودار ۱۲-۲: الگوی وقفه V معکوس

به منظور برآورد ضرایب مدل (۱۲-۱)، ابتدا به‌جای β_j قرار داده و سپس آن را ساده می‌کنیم:

$$Y_t = \alpha + \beta_0\left[\sum_{j=0}^{\frac{K}{2}}(1+j)X_{t-j} + \sum_{j=\frac{K}{2}+1}^{K}(K+1-j)X_{t-j}\right] + u_t = \alpha + \beta_0 Z_t + u_t \qquad (۱۲\text{-}۱۳)$$

عبارت داخل کروشه با Z_t نشان داده شده است.

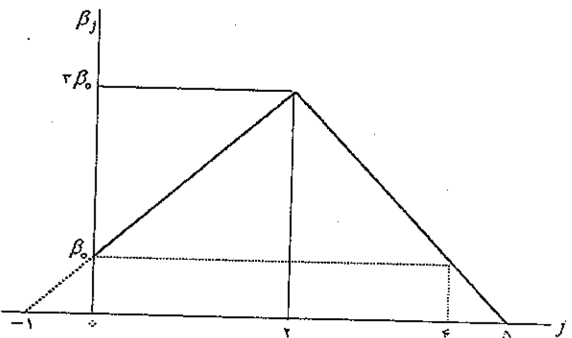
مثال ۱۲-۵: فرض کنید $K=4$ باشد. در این صورت مدل (۱۲-۱۳) عبارت است از:

$$Z_t = \sum_{j=0}^{2}(1+j)X_{t-j} + \sum_{j=3}^{4}(5-j)X_{t-j}$$
$$= X_t + 2X_{t-1} + 3X_{t-2} + 2X_{t-3} + X_{t-4} \qquad (۱۲\text{-}۱۴)$$

β_j نیز برابر است با:

$$\beta_j = \begin{cases}(1+j)\beta_0 & j=0,1,2 \\ (5-j)\beta_0 & j=3,4\end{cases} \qquad (۱۲\text{-}۱۵)$$

$$\beta_0,\ \beta_1=2\beta_0,\ \beta_2=3\beta_0,\ \beta_3=2\beta_0,\ \beta_4=\beta_0,\ \beta_5=0$$



برآورد مدل V معکوس در Eviews

به‌منظور برآورد مدل (۱۳-۱۲)، ابتدا Z_t را با فرمان genr حساب می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای K = ۴ ، Z_t طبق (۱۴-۱۲) برابر است با:

```
genr  Z=X+2*X(-1)+3*X(-2)+2*X(-3)+X(-4)
```

سپس مدل (۱۳-۱۲) را با فرمان LS برآورد می‌کنیم.

```
LS Y C Z
```

ضریب Z برابر با $\hat{\beta}_\circ$ است که براساس آن می‌توان سایر $\hat{\beta}_j$ها را طبق (۱۵-۱۲) محاسبه نمود.

۶-۱۲ الگوی وقفه چندجمله‌ای: روش آلمون

مشکل وقفه خطی این است که فرض می‌کند تأثیر X به‌صورت خطی و یکنواخت در حال کاهش است. الگوی V معکوس نیز افزایش خطی و سپس کاهش خطی را نشان می‌دهد. در حالی که ممکن است اثر X ابتدا حالت افزایشی داشته و سپس شروع به کاهش کند و با گذشت زمان به صفر برسد. روش آلمون (۱۹۶۵) یا چندجمله‌ای آلمون برای حل این مشکل مطرح شده است. در این روش برای β_j یک معادله درجه r تعریف می‌شود:

$$\beta_j = a_\circ + a_1 j + a_2 j^2 \cdots + a_r j^r \qquad (۱۶-۱۲)$$

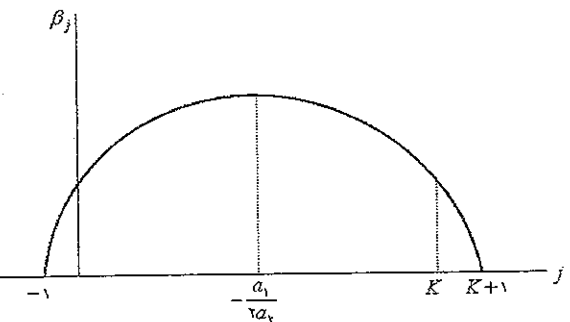
به‌عنوان مثال به‌ازای $r = ۲$ ، β_j برابر است با:

$$\beta_j = a_\circ + a_1 j + a_2 j^2 \qquad (۱۷-۱۲)$$

مقادیر β_j برابر است با:

$$\beta_\circ = a_\circ$$
$$\beta_1 = a_\circ + a_1 + a_2$$
$$\beta_2 = a_\circ + ۲a_1 + ۴a_2$$
$$\beta_3 = a_\circ + ۳a_1 + ۹a_2$$
$$\vdots$$
$$\beta_K = a_\circ + Ka_1 + K^2 a_2$$

شکل کلی β_j بستگی به ضرایب $a_\circ$، a_1 و a_2 دارد. به‌عنوان مثال به‌ازای $a_\circ > \circ$، $a_1 > \circ$ و $a_2 < \circ$، نمودار زیر را خواهیم داشت:



نمودار ۳-۱۲: الگوی وقفه چندجمله‌ای درجه دو

برای تعیین β_j نیاز به تخمین $a_\circ$، a_1 و a_2 داریم. بدین منظور به‌جای β_j در معادله (۱-۱۲) قرار می‌دهیم:

$$Y_t = \alpha + \sum_{j=\circ}^{K} \beta_j X_{t-j} + u_t = \alpha + \sum_{j=\circ}^{K} (a_\circ + a_1 j + a_2 j^2) X_{t-j} + u_t$$

با مرتب نمودن معادله فوق، خواهیم داشت:

$$Y_t = \alpha + a_\circ \sum_{j=\circ}^{K} X_{t-j} + a_1 \sum_{j=\circ}^{K} j X_{t-j} + a_2 \sum_{j=\circ}^{K} j^2 X_{t-j} + u_t$$
$$= \alpha + a_\circ Z_{\circ t} + a_1 Z_{1t} + a_2 Z_{2t} + u_t \qquad (۱۸-۱۲)$$

به‌عنوان مثال اگر $K = ۵$ باشد، Zها برابرند با:

$$Z_{0t}=\sum_{j=0}^{5} X_{t-j}=X_t+X_{t-1}+X_{t-2}+X_{t-3}+X_{t-4}+X_{t-5}$$

$$Z_{1t}=\sum_{j=0}^{5} jX_{t-j}=X_{t-1}+2X_{t-2}+3X_{t-3}+4X_{t-4}+5X_{t-5} \qquad (12-19)$$

$$Z_{2t}=\sum_{j=0}^{5} j^2X_{t-j}=X_{t-1}+4X_{t-2}+9X_{t-3}+16X_{t-4}+25X_{t-5}$$

برای تعیین درجه چندجمله‌ای (یعنی r) هیچ قاعدهٔ مشخصی وجود ندارد. در عمل می‌توان با آزمون و خطا مقدار r را تعیین نمود. برای تعیین مقدار بهینه r می‌توان از معیارهایی مانند حداکثر شدن $\bar{R}^2$ یا حداقل شدن معیارهای اطلاعات مانند آکائیک و شوارتز- بیزین استفاده نمود.

نکته دیگری که در روش آلمون وجود دارد آن است که می‌توان محدودیت‌هایی را بر ضرایب چندجمله‌ای (۱۶-۱۲) اعمال نمود. به‌عنوان مثال در (۱۷-۱۲) می‌توان قید $\beta_{-1}=0$ را اعمال نمود که به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\beta_{-1}=a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2=0 \Rightarrow a_0=a_1-a_2 \qquad (12-20)$$

بنابراین مقدار a_0 تعیین می‌شود که با قرار دادن در (۱۷-۱۲) خواهیم داشت:

$$\beta_j=(a_1-a_2)+a_1j+a_2j^2=a_1(1+j)+a_2(-1+j^2)$$

در اینجا فقط دو ضریب a_1 و a_2 را بایستی برآورد کنیم. اگر در معادله (۱۸-۱۲) به‌جای a_0 قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Y_t=\alpha+(a_1-a_2)Z_{0t}+a_1Z_{1t}+a_2Z_{2t}+u_t \qquad (12-21)$$

$$=\alpha+a_1(Z_{0t}+Z_{1t})+a_2(Z_{2t}-Z_{0t})+u_t \;=\alpha+a_1W_{1t}+a_2W_{2t}$$

که $W_{1t}=Z_{0t}+Z_{1t}$ و $W_{2t}=Z_{2t}+Z_{0t}$ است.

علاوه‌براین، می‌توان قیدهای دیگر را نیز وارد نمود و یا آنها را با روش والد، آزمون کرد. یکی از قیدهای مهم دیگر این است که به‌ازای وقفه $K+1$ مقدار $\beta_{K+1}=0$ باشد. به‌عنوان مثال اگر دو قید $\beta_{-1}=0$ و $\beta_{K+1}=0$ را همزمان اعمال کنیم، برای چندجمله‌ای درجهٔ دو خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\beta_{-1}=a_0+a_1(-1)+a_2(-1)^2=0\\ \beta_{3+1}=a_0+a_1(3+1)+a_2(3+1)^2=0\end{cases}$$

با ساده کردن معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$a_0-a_1+a_2=0$$

$$a_0+4a_1+16a_2=0$$

با حل این دو معادله، خواهیم داشت:

$$a_0=-4a_2 \quad , \quad a_1=-3a_2 \qquad (12-22)$$

با جایگذاری در فرمول β_j خواهیم داشت:

$$\beta_j=a_0+a_1j+a_2j^2=-4a_2-3a_2j+a_2j^2 \qquad (12-23)$$

$$=a_2(-4-3j+j^2)$$

بنابراین، فقط نیاز به برآورد a_2 داریم. با قراردادن (۲۳-۱۲) در مدل (۱-۱۲)، نتیجهٔ آن عبارت است از:

$$Y_t=\alpha+\sum_{j=0}^{K}a_2(-4-3j+j^2)X_{t-j}+u_t$$

$$=\alpha+a_2Z_t+u_t \qquad (12-24)$$

که Z_t برابر است با:

$$Z_t=\sum_{j=0}^{K}(-4-3j+j^2)X_{t-j} \qquad (12-25)$$

با برآورد معادله (۲۴-۱۲) مقدار $\hat{\alpha}$ و $\hat{a}_2$ به‌دست می‌آید و براساس آن می‌توان $\hat{\beta}_j$ را از معادله (۲۳-۱۲) محاسبه کرد. به‌ازای $K=3$ مقدار Z_t برابر است با:

$$Z_t=-4X_t-6X_{t-1}-6X_{t-2}-4X_{t-3} \qquad (12-26)$$

روش آلمون در Eviews فایل data10

معادله $Y_t=\alpha+\sum_{j=0}^{3}\beta_jX_{t-j}+u_t$ را در نظر بگیرید. در این معادله برای ضریب β_j، چندجمله‌ای درجهٔ ۲ را به‌صورت $\beta_j=a_0+a_1j+a_2j^2$ تعریف می‌کنیم. بنابراین معادله رگرسیون به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y_t=\alpha+a_0Z_{0t}+a_1Z_{1t}+a_2Z_{2t}+u_t$$

که Zها عبارتند از:

$$Z_{0t}=X_t+X_{t-1}+X_{t-2}+X_{t-3}$$
$$Z_{1t}=X_{t-1}+2X_{t-2}+3X_{t-3}$$
$$Z_{2t}=X_{t-1}+4X_{t-2}+9X_{t-3}$$

ابتدا Zها را با فرمان genr حساب می‌کنیم. به‌عنان مثال Z_0 را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

genr Z0=X+X(-1)+X(-2)+X(-3)

حال با فرمان زیر، معادله را برآورد می‌کنیم:

LS Y C Z0 Z1 Z2

نتایج در پنجره زیر نشان داده شده است:

Equation: UNTITLED Workfile: ALMON::Demo\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 06/02/13 Time: 12:28
Sample (adjusted): 1953Q2 1996Q4
Included observations: 175 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	645.0667	42.70913	15.10372	0.0000
Z0	-1.308629	5.279782	-0.247857	0.8045
Z1	6.853719	8.328654	0.822908	0.4117
Z2	-1.572957	2.626538	-0.598871	0.5501

R-squared	0.017540	Mean dependent var	647.8988
Adjusted R-squared	0.000304	S.D. dependent var	564.6625
S.E. of regression	564.5768	Akaike info criterion	15.53262
Sum squared resid	54505722	Schwarz criterion	15.60496
Log likelihood	-1355.104	Hannan-Quinn criter.	15.56196
F-statistic	1.017612	Durbin-Watson stat	0.009561
Prob(F-statistic)	0.386303		

ضرایب تخمینی عبارتند از:

$$\hat{\alpha}=۶۴۵/۰۷ , \hat{a}_0=-۱/۳۰۹ , \hat{a}_1=۶/۸۵۴ , \hat{a}_2=-۱/۵۷۳$$

هر یک از β_j ها را با استفاده از $\hat{\beta}_j=-۱/۳۰۹+۶/۸۵۴j-۱/۵۷۳j^2$ حساب می‌کنیم:

$$\hat{\beta}_0=-۱/۳۰۹ \quad , \quad \hat{\beta}_1=۳/۹۷۲ \quad , \quad \hat{\beta}_2=۶/۱۰۷ \quad , \quad \hat{\beta}_3=۵/۰۹۵$$

مجموع β_j ها برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{3}\beta_j=۱۳/۸۶۶$$

روش دیگر برای استفاده از چندجمله‌ای آلمون، استفاده از فرمان زیر است:

LS Y C PDL(X, K, r)

PDL همان متغیر Z است که در Eviews تعریف شده است.[1] در حالت کلی، K تعداد وقفه‌های مدل و r درجهٔ چندجمله‌ای آلمون است. در این مثال $K=۳$ و $r=۲$ است. با اجرای فرمان LS Y C PDL(X, 3, 2) نتایج تخمین در پنجره زیر نشان داده می‌شود:

1- Polynomial Distributed Lags

Equation: UNTITLED Workfile: ALMON::Demo\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 06/02/13 Time: 12:40
Sample (adjusted): 1953Q2 1996Q4
Included observations: 175 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	645.0667	42.70913	15.10372	0.0000
PDL01	3.972132	4.015654	0.989162	0.3240
PDL02	3.707804	3.880443	0.955510	0.3407
PDL03	-1.572957	2.626538	-0.598871	0.5501

R-squared	0.017540	Mean dependent var	647.8988
Adjusted R-squared	0.000304	S.D. dependent var	564.6625
S.E. of regression	564.5768	Akaike info criterion	15.53262
Sum squared resid	54505722	Schwarz criterion	15.60496
Log likelihood	-1355.104	Hannan-Quinn criter.	15.56196
F-statistic	1.017612	Durbin-Watson stat	0.009561
Prob(F-statistic)	0.386303		

Lag Distribution of X	i	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
	0	-1.30863	5.27976	-0.24786
	1	3.97213	4.01565	0.98916
	2	6.10698	3.99956	1.52691
	3	5.09591	5.48927	0.92834
	Sum of Lags	13.8664	8.84019	1.56856

در این پنجره، C برابر α است. در مقابل PDLها نیز بقیه ضرایب نشان داده شده است. اما توجه شود که ضرایب PDL مشابه ضرایب Z یعنی a_0، a_1 و ... نمی‌باشد، زیرا در Eviews چندجمله‌ای آلمون به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\beta_j=\gamma_1+\gamma_2(j-A)+\gamma_3(j-A)^2$$

که $A=\frac{K}{2}$ برای γ_iهای زوج و $A=\frac{K-1}{2}$ برای γ_i های فرد می‌باشد. به‌عنوان مثال برای $K=۳$ داریم:

$$\beta_j=\gamma_1+\gamma_2(j-1)+\gamma_3(j-1)^2=(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3)+(\gamma_2-2\gamma_3)j+\gamma_3 j^2$$

معادله فوق را اگر با $\beta_j=a_0+a_1 j+a_2 j^2$ مقایسه کنیم، خواهیم داشت:

$$a_0=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3$$
$$a_1=\gamma_2-2\gamma_3$$
$$a_2=\gamma_3$$

بنابراین، ضرایب PDL بیانگر تخمین γ_1، γ_2 و... می‌باشد.

به‌هرحال β_j ها را می‌توان هم با استفاده از γ_i ها و هم از a_i ها محاسبه نمود که یکسان هستند. در قسمت پایین پنجرهٔ فوق، تخمین β_j ها ارائه شده است (ستون Coefficient) که در مقابل آنها انحراف معیار و آماره t نیز ارائه شده است. همچنین نمودار β_j در مقابل وقفه‌ها رسم شده است. در زیر ستون Coefficient مجموع ضرایب $(\sum_{j=0}\beta_j)$ ارائه شده که کل تأثیر X بر Y (اثر بلندمدت) را نشان می‌دهد که برابر با ۱۳/۸۶۶ است.

برای آزمون وجود قیدها (مانند $a_0=a_1-a_2$ که در (۱۲-۱۷) به‌دست آمد) می‌توان از آزمون والد استفاده نمود (فصل

نیم آزمون والد را ببینید). علاوه بر این، اگر به‌عنوان مثال محدودیت $a_\circ = a_\backprime - a_\Upsilon$ برقرار باشد، می‌توان آن را در تخمین ضرایب لحاظ نمود. بدین منظور از فرمان زیر استفاده می‌شود:

LS Y C PDL(X,K,r,m)

که m تعداد قیدها است. اگر $m = ۱$ را قرار دهیم، به معنی وارد کردن قید $\beta_{-۱} = ۰$ (یعنی $a_۰ = a_۱ - a_۲$) است. در این حالت با تخمین مدل، ضرایب β_j با اعمال قید مذکور به‌دست می‌آید.

LS Y C PDL(X,3,2,1)

نتایج عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: ALMON::Demo\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 06/02/13 Time: 12:47
Sample (adjusted): 1953Q2 1996Q4
Included observations: 175 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	645.5815	42.63286	15.14282	0.0000
PDL01	1.606974	4.430423	0.362713	0.7173
PDL02	-0.078447	1.358425	-0.057748	0.9540

R-squared	0.014997	Mean dependent var	647.8988
Adjusted R-squared	0.003544	S.D. dependent var	564.6625
S.E. of regression	563.6611	Akaike info criterion	15.52378
Sum squared resid	54646773	Schwarz criterion	15.57803
Log likelihood	-1355.331	Hannan-Quinn criter.	15.54578
F-statistic	1.309402	Durbin-Watson stat	0.007719
Prob(F-statistic)	0.272659		

Lag Distribution of X	i	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
	0	1.52853	3.10719	0.49193
	1	2.90016	3.67217	0.78977
	2	4.11490	2.64689	1.55462
	3	5.17275	5.47915	0.94408
	Sum of Lags	13.7163	8.82298	1.55462

ضرایب عبارتند از:

$$\hat{\alpha} = ۶۴۵/۰۶۷ \quad , \quad \hat{\beta}_۰ = ۱/۵۲۸ \quad , \quad \hat{\beta}_۱ = ۲/۹ \quad , \quad \hat{\beta}_۲ = ۴/۱۱۵ \quad , \quad \hat{\beta}_۳ = ۵/۱۷۳$$

و مجموع ضرایب برابر با ۱۳/۷۱۶ می‌باشد.

همچنین برای تخمین مدل (۱۸-۱۲) که قید $\beta_{-۱} = ۰$ یا $a_۰ = a_۱ - a_۲$ را دربر دارد، می‌توان فرمان زیر را اجرا نمود:

LS Y C Z0+Z1 Z2-Z0

Equation: UNTITLED Workfile: ALMON::Demo\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 06/02/13 Time: 12:54
Sample (adjusted): 1953Q2 1996Q4
Included observations: 175 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	645.5815	42.63286	15.14282	0.0000
Z0+Z1	1.450081	1.836087	0.789767	0.4308
Z2-Z0	-0.078447	1.358425	-0.057748	0.9540

R-squared	0.014997	Mean dependent var	647.8988
Adjusted R-squared	0.003544	S.D. dependent var	564.6625
S.E. of regression	563.6611	Akaike info criterion	15.52378
Sum squared resid	54646773	Schwarz criterion	15.57803
Log likelihood	-1355.331	Hannan-Quinn criter.	15.54578
F-statistic	1.309402	Durbin-Watson stat	0.007719
Prob(F-statistic)	0.272659		

تخمین ضرایب به‌صورت زیر است:

$$\hat{\alpha} = ۶۴۵/۵۸۱ \quad , \quad \hat{a}_۱ = ۱/۴۵ \quad , \quad \hat{a}_۲ = -۰/۰۷۸$$

و $\hat{a}_۰$ نیز برابر است با:

$$\hat{a}_۰ = \hat{a}_۱ - \hat{a}_۲ = ۱/۳۷۲$$

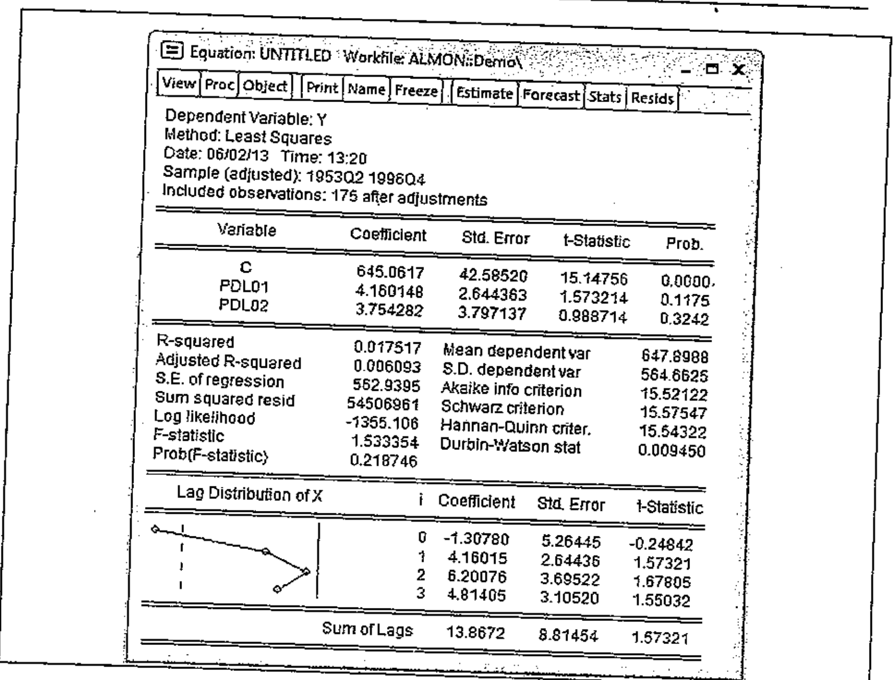
و $\hat{\beta}_j$ برابر است با:

$$\hat{\beta}_j = ۱/۵۲۸ + ۱/۴۵j - ۰/۰۷۸j^۲$$

$$\hat{\beta}_۰ = ۱/۵۲۸ \quad , \quad \hat{\beta}_۱ = ۲/۹ \quad , \quad \hat{\beta}_۲ = ۴/۱۱۶ \quad , \quad \hat{\beta}_۳ = ۵/۱۷۶$$

اگر دو قید $\beta_{-۱} = ۰$ و $\beta_{r+۱} = ۰$ را اعمال کنیم، مدل (۲۱-۱۲) را خواهیم داشت که ضرایب $\hat{\beta}_j$ طبق (۲۰-۱۲) حساب می‌شوند. در این صورت از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

LS Y C PDL(X,3,2,2)


Equation: UNTITLED Workfile: ALMON::Demo\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 06/02/13 Time: 13:20
Sample (adjusted): 1953Q2 1996Q4
Included observations: 175 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	645.0617	42.58520	15.14756	0.0000
PDL01	4.160148	2.644363	1.573214	0.1175
PDL02	3.754282	3.797137	0.988714	0.3242

R-squared	0.017517	Mean dependent var	647.8988
Adjusted R-squared	0.006093	S.D. dependent var	564.6625
S.E. of regression	562.9395	Akaike info criterion	15.52122
Sum squared resid	54506961	Schwarz criterion	15.57547
Log likelihood	-1355.106	Hannan-Quinn criter.	15.54322
F-statistic	1.533354	Durbin-Watson stat	0.009450
Prob(F-statistic)	0.218746		

Lag Distribution of X	i	Coefficient	Std. Error	t-Statistic
	0	-1.30780	5.26445	-0.24842
	1	4.16015	2.64436	1.57321
	2	6.20076	3.69522	1.67805
	3	4.81405	3.10520	1.55032
Sum of Lags		13.8672	8.81454	1.57321

۱۲-۷ مدل‌های با وقفهٔ نامحدود: تبدیل کویک[1]

در برخی موارد، زمان پایانی اثرات تأخیری را نمی‌توان تعیین نمود. یا ممکن است هر تغییری در X، برای مدت طولانی Y را تحت تأثیر قرار دهد. به‌همین دلیل از وقفه‌های نامحدود استفاده می‌کنند. شکل کلی این مدل‌ها مانند معادله (۱۲-۲۷) است که در آن $K=\infty$ می‌باشد:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + u_t$$

$$= \alpha + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k X_{t-k} + u_t \qquad (۱۲-۲۷)$$

در اینجا نیز اگر X در سال t-j تغییر کند اثر آن بر Y_t برابر با β_j می‌باشد:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_{t-j}} = \beta_j \qquad j = 0,1,2,\ldots$$

مجموع اثرات از سال t-s تا سال t برابر است با:

1- Koyek

$$\sum_{j=0}^{s} \beta_j = \beta_0 + \beta_1 + \cdots + \beta_s \qquad (۱۲-۲۸)$$

و مجموع کل اثرات (اثر بلندمدت) برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots$$

بدیهی است که تعداد ضرایب مدل (۱۲-۲۷) بسیار زیاد است و لذا لازم است محدودیت‌هایی را بر ساختار ضرایب اعمال کنیم. تبدیل کویک روش مناسبی برای حل این مشکل است. فرض اساسی در تبدیل کویک این است که ضرایب به‌طور هندسی در حال کاهش هستند. بدین منظور ساختار ضرایب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta_j = \beta_0 \lambda^j \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad (۱۲-۳۰)$$

که $0 \le \lambda \le 1$ است. با جایگذاری (۱۲-۳۰) در (۱۲-۲۷) خواهیم داشت:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \cdots + u_t$$

$$= \alpha + \beta_0 (X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \cdots) + u_t \qquad (۱۲-۳۱)$$

$$= \alpha + \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i X_{t-i} + u_t$$

برای تخمین مدل (۱۲-۲۷)، ابتدا آن را برای زمان $t-1$ نوشته و در λ ضرب می‌کنیم:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \beta_0 (\lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \lambda^3 X_{t-3} + \cdots) + \lambda u_{t-1} \qquad (۱۲-۳۲)$$

حال (۱۲-۳۲) را از (۱۲-۳۱) کم می‌کنیم:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = (\alpha - \lambda\alpha) + \beta_0 X_t + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

$$Y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t \quad , \quad v_t = u_t - \lambda u_{t-1} \qquad (۱۲-۳۳)$$

مدل (۱۲-۳۳) فقط سه پارامتر α، β_0 و λ دارد که با تخمین آنها می‌توان β_j ها را نیز از رابطه (۱۲-۳۰) به‌دست آورد.

مشکلات تخمین

مدل (۱۲-۳۳) دارای برخی مشکلات می‌باشد، زیرا در سمت راست آن متغیر Y_{t-1} ظاهر شده است که بیانگر متغیر وابستهٔ تأخیری است. یعنی Y_{t-1} به‌عنوان متغیر توضیحی وارد این مدل شده

است. همان‌طور که Y_t تصادفی است Y_{t-1} ممکن است این ویژگی را داشته باشد. در حالی که یکی از فروض معادلات رگرسیون این است که متغیرهای توضیحی، غیر تصادفی هستند. به‌هرحال اگر Y_{t-1} تصادفی باشد ولی مستقل از جزء خطا باشد، مشکل چندانی را ایجاد نمی‌کند ولی اگر با جزء خطا همبستگی داشته باشد، تخمین‌زننده‌های OLS کارا نخواهند بود. معادله (۳۳-۱۲) نشان می‌دهد که بین Y_{t-1} و v_t همبستگی وجود دارد زیرا $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$ است.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_{t-1}, v_t) &= E[(Y_{t-1} - E(Y_{t-1}))(v_t - E(v_t))] \\ &= E\left(Y_{t-1} - (\alpha + \beta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j X_{t-j-1})\right)(u_t - \lambda u_{t-1}) \\ &= -\lambda E(Y_{t-1} u_{t-1})\end{aligned}$$

زیرا X_{t-j} ها با جملات اختلال رابطه‌ای ندارند و u_t مستقل از Y_t است. حال با جایگذاری به‌جای Y_{t-1} از (۶۰-۱۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(Y_{t-1}, v_t) &= -\lambda E[(\alpha + \beta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j X_{t-j-1} + u_{t-1}) u_{t-1}] \\ &= -\lambda E(u_{t-1}^2) = -\lambda \sigma^2\end{aligned} \tag{۱۲-۳۴}$$

بدین ترتیب متغیر توضیحی Y_{t-1} مستقل از جزء خطا نمی‌باشد.

مشکل دیگر این است که جمله اختلال به‌صورت $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}$ می‌باشد که بیانگر وجود خود همبستگی در این مدل است.

$$\begin{aligned}&v_t = u_t - \lambda u_{t-1} \ , \ v_{t-1} = u_{t-1} - \lambda u_{t-2} \\ &\operatorname{cov}(v_t, v_{t-1}) = E(v_t v_{t-1}) = -\lambda E(u_{t-1}^2) = -\lambda \sigma^2\end{aligned} \tag{۱۲-۳۵}$$

بدین ترتیب، این مدل دارای خودهمبستگی مرتبه اول می‌باشد.

اثرات بلندمدت (کل اثرات)

برای محاسبه کل اثرات X بر Y از (۲۷-۱۲) استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_0 \lambda^j = \frac{\beta_0}{1-\lambda} \tag{۱۲-۳۶}$$

تأثیر تغییر در X_{t-j} بر Y_t برابر است با:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_{t-j}} = \beta_j = \beta_0 \lambda^j \quad , \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{۱۲-۳۷}$$

اما اگر $j=0$ را در نظر بگیریم آنگاه بر اساس (۳۷-۱۲) رابطه $\frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t} = \beta_0$ به‌دست می‌آید که اثر آنی X بر Y است.

میانگین وقفه

میانگین وقفه (میانگین jها) طبق (۶-۱۲) برابر است با:

$$\text{میانگین وقفه} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j j}{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_0 \lambda^j j}{\sum_{j=0}^{\infty} \beta_0 \lambda^j} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j j}{\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j} = \frac{\lambda}{1-\lambda} \tag{۱۲-۳۸}$$

این رابطه بیانگر میانگین وزنی jها است و نشان می‌دهد که اثر یک واحد تغییر در X بر Y به‌طور متوسط در چه مدت زمانی به‌وقوع می‌پیوندد.

میانه وقفه

میانه وقفه طبق (۵-۱۲) برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{s-1} \beta_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Rightarrow \sum_{j=0}^{s-1} \beta_0 \lambda^j = \frac{1}{2} \frac{\beta_0}{1-\lambda} \tag{۱۲-۳۹}$$

چون رابطه $\sum_{j=0}^{s-1} \beta_0 \lambda^j = \beta_0 \frac{1-\lambda^s}{1-\lambda}$ برقرار است، لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\beta_0 \frac{1-\lambda^s}{1-\lambda} = \frac{1}{2} \frac{\beta_0}{1-\lambda} \Rightarrow \lambda^s = \frac{1}{2} \\ &\lambda^s = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln \lambda^s = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow s \ln \lambda = -\ln 2 \Rightarrow s = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda} \\ &\text{میانه وقفه} = -\frac{\ln 2}{\ln \lambda}\end{aligned} \tag{۱۲-۴۰}$$

فرض کنید به‌ازای مقدار معینی از λ، میانه وقفه برابر با ۵ شود، در این صورت نشان می‌دهد که بعد از گذشت ۵ سال، نیمی از اثرات X بر Y را مشاهده خواهیم کرد. بدیهی است که نیمی دیگر از سال ششم به بعد به‌وقوع خواهد پیوست.

در حالت کلی اگر بخواهیم به جای ۵۰ درصد، a درصد از کل اثرات را مشاهده کنیم، در فرمول (۳۹-۱۲) به‌جای $\frac{1}{2}$ عدد a را قرار می‌دهیم:

$$\sum_{j=0}^{s-1}\beta_0\lambda^j = a\frac{\beta_0}{1-\lambda} \Rightarrow \beta_0\frac{1-\lambda^s}{1-\lambda} = a\frac{\beta_0}{1-\lambda} \Rightarrow \lambda^s = 1-a \Rightarrow s = \frac{\ln(1-a)}{\ln\lambda} \qquad (۱۲-۴۱)$$

رابطه فوق بیان می‌دارد که برای مشاهده a درصد از اثر X، نیاز به گذشت s دوره داریم. اگر $a=۰/۲۵$ باشد، s بیانگر چارک اول و اگر $a=۰/۷۵$ باشد، s بیانگر چارک سوم خواهد بود.

قایل data10

تبدیل کویک در Eviews

برای برآورد مدل کویک، ابتدا معادله (۱۲-۳۳) را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

```
LS Y C X Y(-1)
```

Equation: UNTITLED Workfile: ALMON::Demo\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 09/25/13 Time: 21:21
Sample (adjusted): 1952Q3 1996Q4
Included observations: 178 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.369001	0.687945	3.443588	0.0007
X	0.048486	0.051602	0.939615	0.3487
Y(-1)	0.912544	0.000820	1234.520	0.0000

R-squared	0.999885	Mean dependent var	638.5360
Adjusted R-squared	0.999884	S.D. dependent var	564.4308
S.E. of regression	6.080625	Akaike info criterion	6.464802
Sum squared resid	6470.450	Schwarz criterion	6.518428
Log likelihood	-572.3674	Hannan-Quinn criter.	6.486549
F-statistic	762462.3	Durbin-Watson stat	1.298411
Prob(F-statistic)	0.000000		

ضرایب به صورت زیر هستند:

$C=\alpha(1-\lambda)=۲/۳۶۹ \qquad \beta_0=۰/۰۴۸۴۸۶ \qquad \lambda=۰/۹۱۲۵۴۴$

بنابراین، $\alpha=\frac{C}{1-\lambda}=\frac{۲/۳۶۹}{۱-۰/۹۱۲۵۴۴}=۲۷/۰۸۷۹۱$ و $\beta_j=\beta_0\lambda^j=۰/۰۴۸۴۸۶(.۹۱۲۵۴۴)^j$ می‌باشد.

۸-۱۲ الگوی وقفه پاسکال

در تبدیل کویک فرض بر این است که اثرات تأخیری همواره نزولی هستند. در حالی که اثرات تأخیری می‌تواند ابتدا صعودی و سپس نزولی باشد. در تبدیل کویک از رابطه $\beta_j=\beta_0\lambda^j$ استفاده می‌شود که در حالت کلی می‌توان آن را به‌صورت $\beta_j=\beta_0 W_j$ نوشت. در تبدیل کویک

$W_j=\lambda^j$ است که همواره نزولی است. حال می‌توان از تبدیل پاسکال استفاده نمود که از انعطاف بیشتری برخوردار است:

$$\beta_j=\beta_0 W_j \quad , \quad W_j=a_j(1-\lambda)^r\lambda^j \quad , \quad j=0,1,\ldots \qquad (۱۲-۴۲)$$

r ثابت است و $a_j=\frac{(r+j-1)!}{j!(r-1)!}$ می‌باشد. به‌عنوان مثال به‌ازای $r=1$، W_j همواره نزولی است:

$$W_j=(1-\lambda)\lambda^j \quad , \quad j=0,1,\ldots \qquad (۱۲-۴۴)$$

زیرا $a_j=1$ می‌باشد. بنابراین، $r=1$ مشابه با تبدیل کویک است که ضرایب، همواره نزولی هستند.

به‌ازای $r=2$ خواهیم داشت:

$$W_j=\frac{(j+1)!}{j!}(1-\lambda)^2\lambda^j=(1+j)(1-\lambda)^2\lambda^j \qquad (۱۲-۴۳)$$

به‌طورکلی به‌ازای $r\geq 2$، W_j ابتدا صعودی و سپس نزولی می‌شود. علاوه بر این، روند W_j بستگی به λ نیز دارد.

به‌منظور آشنایی بیشتر با روش پاسکال، حالت خاص $r=2$ را در نظر بگیرید:

$$r=2\Rightarrow \beta_j=\beta_0(1+j)(1-\lambda)^2\lambda^j \qquad (۱۲-۴۵)$$

از (۱۲-۴۵) به‌جای β_j در مدل (۱۲-۲۷) قرار می‌دهیم:

$$Y_t=\alpha+\beta_0(1-\lambda)^2\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)\lambda^j X_{t-j}+u_t \qquad (۱۲-۴۶)$$

مدل فوق دارای سه ضریب α، β_0 و λ می‌باشد. برای برآورد این ضرایب، ابتدا معادله (۱۲-۴۶) را با یک تأخیر نوشته و در -2λ ضرب می‌کنیم:

$$-2\lambda Y_{t-1}=-2\lambda\alpha-2\lambda\beta_0(1-\lambda)^2\sum_{j=0}^{\infty}(1+\lambda^j)X_{t-j-1}-2\lambda u_{t-1} \qquad (۱۲-۴۷)$$

سپس معادله (۱۲-۴۶) را با دو تأخیر نوشته و در λ^2 ضرب می‌کنیم:

$$\lambda^2 Y_{t-2}=\lambda^2\alpha+\beta_0\lambda^2(1-\lambda^2)^2+\sum_{j=0}^{\infty}(1+j)\lambda^j X_{t-j-2}+\lambda^2 u_{t-2} \qquad (۱۲-۴۸)$$

حال سه معادله (۱۲-۴۶)، (۱۲-۴۷) و (۱۲-۴۸) را با هم جمع زده و ساده می‌کنیم:

$$Y_t = \alpha(1-\lambda)^2 + \beta_0(1-\lambda)^2 X_t + 2\lambda Y_{t-1} - \lambda^2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (۱۲-۴۹)$$

که $\varepsilon_t = u_t - 2\lambda u_{t-1} + \lambda^2 u_{t-2}$ است. با تخمین مدل فوق، ضرایب α، β_0 و λ به‌دست می‌آیند. با داشتن λ می‌توان از فرمول (۱۲-۴۵) وزن‌ها (W_j) را حساب کرده و سپس سایر β_iها را از رابطه $\beta_j = \beta_0 W_j$ به‌دست آورد. بدیهی است که تخمین مدل (۱۲-۴۹) مشکلات خاص خود را دارد، زیرا جزء خطای آن دارای خودهمبستگی مرتبه دوم است. از طرف دیگر، جزء خطای آن مستقل از متغیرهای توضیحی Y_{t-1} و Y_{t-2} نمی‌باشد.

الگوی وقفهٔ پاسکال در Eviews

با توجه به مقدار r ابتدا برای β_j رابطه (۱۲-۴۲) را نوشته و سپس آن را در (۱۲-۳۷) جایگزین می‌کنیم. مشابه آنچه که برای $r = 2$ انجام دادیم معادله موردنظر را به‌دست می‌آوریم. به‌عنوان مثال برای $r = 2$ معادله (۱۲-۴۹) به‌دست می‌آید که تخمین آن با فرمان LS به‌صورت زیر انجام می‌شود:

```
LS Y C X Y(-1) Y(-2)
```

۱۲-۹ مبانی نظری مدل‌های با وقفهٔ توزیعی

سؤالی که در رابطه با مدل‌های باوقفه توزیعی، به‌ویژه تبدیل کویک، مطرح می‌شود این است که مبنای نظری این روش چیست؟ معمولاً در این رابطه دو مبنا را ذکر می‌کنند که یکی «فرضیه تعدیلات جزئی»[1] و دیگری «فرضیه انتظارات تطبیقی»[2] است.

برای بررسی فرضیه تعدیلات جزئی تصور کنید که مدل زیر را داشته باشیم:

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad (۱۲-۸۰)$$

Y^* بیانگر مقدار مطلوب Y است. به‌عنوان مثال مقدار مطلوب سرمایه تابعی از متغیر X (مثلاً درآمد ملی) می‌باشد. اما موجودی مطلوب سرمایه یا به‌طورکلی مقدار مطلوب Y قابل مشاهد نمی‌باشد. فرض کنید که رفتار سرمایه‌گذاری از فرضیهٔ تعدیلات جزئی تبعیت کند. تصور کنید که در سال $t-1$ مقدار Y برابر با Y_{t-1} است. حال هدف این است که در سال t مقدار Y به Y_t^* برسد، اما

1- partial adjustment hypothesis
2- adaptive expectation hypothesis

عملاً به Y_t می‌رسد. لذا هدف این است که شکاف $Y_t^* - Y_{t-1}$ پر شود، اما بدیهی است که فقط بخشی از آن پر می‌شود که برابر با $Y_t - Y_{t-1}$ است. بدین منظور رابطه زیر را می‌توان نوشت:

$$Y_t - Y_{t-1} = \gamma(Y_t^* - Y_{t-1}) \quad , \quad 0 \le \gamma \le 1 \qquad (۱۲-۸۱)$$

$Y_t^* - Y_{t-1}$ برابر با کل تعدیلی است که باید صورت گیرد (یعنی تعدیل مطلوب) ولی $Y_t - Y_{t-1}$ بخشی از تعدیل است که عملاً صورت می‌گیرد (یعنی تعدیل واقعی). لذا مدل (۱۲-۸۱) معروف به «تعدیل جزئی» است. γ ضریب تعدیل می‌باشد. $\gamma = 1$ به معنی تعدیل کامل است، زیرا $Y_t = Y_t^*$ خواهد بود. $\gamma = 0$ به معنی این است که هیچ تعدیلی صورت نمی‌گیرد، زیرا $Y_t = Y_{t-1}$ خواهد بود.

رابطه (۱۲-۸۱) را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$Y_t = \gamma Y_t^* + (1-\gamma)Y_{t-1} \qquad (۱۲-۸۲)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که مقدار واقعی Y برابر با متوسط وزنی از مقدار مطلوب آن (Y_t^*) و مقدار گذشته آن (Y_{t-1}) می‌باشد. حال از (۱۲-۸۰) به‌جای Y_t^* در (۱۲-۸۲) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} Y_t &= \gamma(\alpha + \beta X_t + u_t) + (1-\gamma)Y_{t-1} \\ &= \gamma\alpha + \gamma\beta X_t + (1-\gamma)Y_{t-1} + \gamma u_t \end{aligned} \qquad (۱۲-۸۳)$$

با برآورد مدل (۱۲-۸۳) سه پارامتر α، β و γ به‌دست می‌آیند. بدیهی است که مدل (۱۲-۸۳) دقیقاً مشابه با مدل (۱۲-۳۳) است که از تبدیل کویک به‌دست آمد. اما اختلاف آنها در جملهٔ خطا است که باعث می‌شود تا مدل (۱۲-۸۳) نسبت به (۱۲-۳۳) مشکلات کمتری دارد. زیرا جملهٔ خطا در مدل (۱۲-۸۳) خودهمبستگی ندارد، در حالی که مدل (۱۲-۳۳) دارای خودهمبستگی مرتبه اول است.

مبنای دیگری که برای تبدیل کویک می‌توان برشمرد، فرضیه انتظارات تطبیقی است. بدین منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t \qquad (۱۲-۸۴)$$

X^* بیانگر مقدار مطلوب متغیر توضیحی است که قابل مشاهده نمی‌باشد. این مقدار مطلوب می‌تواند بیانگر مقدار تعادلی، مقدار بلندمدت، مقدار انتظاری و یا هر مفهومی از این قبیل باشد. حال فرض بر این است که مقدار مطلوب یا انتظاری طبق فرضیه انتظارات تطبیقی شکل می‌گیرد:

$$X_t^* - X_{t-1}^* = \gamma(X_t - X_{t-1}^*) \quad , \quad 0 \le \gamma \le 1 \qquad (۱۲-۸۵)$$

ویژگی مدل (۸۵-۱۲) این است که مقدار انتظاری (X_t^*) را بر حسب مقادیر جاری و گذشته بیان می‌کند. بدین منظور (۸۵-۱۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$X_t^* = \gamma X_t + (1-\gamma) X_{t-1}^* \qquad (12\text{-}86)$$

طبق رابطه (۸۶-۱۲) مقدار انتظاری X برای سال t برابر است با متوسط وزنی از X در سال t و مقداری که برای سال $t-1$ انتظار داشته‌ایم. اگر (۸۶-۱۲) را با یک دوره تأخیر نوشته و سپس به‌جای X_{t-1}^* قرار داده و این کار را تکرار کنیم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$X_t^* = \gamma X_t + \gamma(1-\gamma) X_{t-1} + \gamma(1-\gamma)^2 X_{t-2} + \cdots \qquad (12\text{-}87)$$

بدین ترتیب X_t^* تابعی از مقادیر جاری و گذشتهٔ X می‌باشد. به‌عبارت دیگر شکل‌گیری انتظارات راجع‌به X صرفاً بر اساس مقادیر جاری و گذشته این متغیر می‌باشد و از هیچ اطلاعات دیگری استفاده نمی‌شود.

به‌منظور برآورد مدل (۸۴-۱۲) ابتدا آن را برای دوره $t-1$ نوشته و در $1-\gamma$ ضرب می‌کنیم:

$$(1-\gamma)Y_{t-1} = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma)X_{t-1}^* + (1-\gamma)u_{t-1} \qquad (12\text{-}88)$$

حال (۸۸-۱۲) را از (۸۴-۱۲) کم کرده و نتیجهٔ آن را مرتب می‌کنیم:

$$Y_t = \gamma\alpha + \beta\left(X_t^* - (1-\gamma)X_{t-1}^*\right) + (1-\gamma)Y_{t-1} + v_t \ , \quad v_t = (1-\gamma)u_{t-1} \qquad (12\text{-}89)$$

حال با کمک رابطه (۸۶-۱۲)، خواهیم داشت:

$$Y_t = \gamma\alpha + \gamma\beta X_t + (1-\gamma)Y_{t-1} + v_t \qquad (12\text{-}90)$$

زیرا $X_t^* - (1-\gamma)X_{t-1}^* = \gamma X_t$ است.

به‌هرحال از آنجا که این مدل‌ها دارای متغیر وابستهٔ تأخیری (Y_{t-1}) به‌عنوان متغیر توضیحی هستند، لذا دارای برخی مشکلات می‌باشند. یکی از پیشنهادها برای حل این مشکلات این است که متغیری را به‌عنوان جانشین برای Y_{t-1} پیدا کنیم که اولاً رابطه بسیار زیادی با Y_{t-1} داشته و ثانیاً با جملهٔ اختلال رابطه نداشته باشد. این روش موسوم به روش متغیرهای ابزاری[1] است (فصل دهم). معمولاً پیشنهاد می‌شود که به‌جای Y_{t-1} از X_{t-1} استفاده شود، زیرا X_{t-1} بیشترین همبستگی را با Y_{t-1} دارد و در عین حال با v_t رابطه ندارد.

1- instrumental variables

۱۰-۱۲ مدل‌های خودرگرسیون با وقفهٔ توزیعی[1] (ARDL)

مدل‌های با وقفه توزیعی، شکل عمومی‌تری از مباحثی است که تا کنون مطرح کردیم. شکل کلی مدل $ARDL(p,q)$ عبارت است از:

$$Y_t = \mu + \sum_{j=1}^{p}\gamma_j Y_{t-j} + \sum_{j=0}^{q}\beta_j X_{t-j} + u_t \qquad (12\text{-}50)$$

u_t جمله خطا است که تمام فروض کلاسیک را تأمین می‌کند. برای سادگی مدل $ARDL(1,1)$ را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + \gamma_1 Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t \qquad (12\text{-}51)$$

مدل فوق را می‌توان با استفاده از عملگرهای وقفه به‌صورت زیر نوشت (ضمیمه الف):

$$Y_t = \mu + \gamma_1 L Y_t + \beta_0 X_t + \beta_1 L X_t + u_t$$

$$(1-\gamma_1 L)Y_t = \mu + (\beta_0 + \beta_1 L)X_t + u_t \qquad (12\text{-}52)$$

$$C(L)Y_t = \mu + B(L)X_t + u_t \qquad (12\text{-}53)$$

$C(L) = 1-\gamma_1 L$ و $B(L) = \beta_0 + \beta_1 L$ می‌باشد که برای مدل $ARDL(p,q)$ عبارتند از:

$$C(L) = 1 - \gamma_1 L - \gamma_2 L^2 - \cdots - \gamma_p L^p \qquad (12\text{-}54)$$

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \cdots + \beta_q L^q$$

با تقسیم طرفین معادله (۵۳) بر $C(L)$ خواهیم داشت:

$$Y_t = \frac{\mu}{C(L)} + \frac{B(L)}{C(L)}X_t + \frac{1}{C(L)}u_t \qquad (12\text{-}55)$$

با بسط ضرایب، می‌توان مدل فوق را به‌صورت زیر نوشت:[2]

$$Y_t = \frac{\mu}{1-\gamma_1-\cdots-\gamma_p} + \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^{\infty}\theta_j u_{t-j} \qquad (12\text{-}56)$$

1- autoregressive distributed lag models

۲- هر یک از عبارت‌های $\frac{1}{1-a_1 L}$، $\frac{1}{1-a_1 L - a_2 L^2}$ و حتی $\frac{1}{1-a_1 L - a_2 L^2 - \cdots - a_p L^p}$ را می‌توان به صورت $\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j L^j$ نوشت.

به‌عنوان مثال در مدل ARDL(۱,۱)، ضرایب به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\mu}{C(L)}=\frac{\mu}{1-\gamma_1 L}=\frac{\mu}{1-\gamma_1} \qquad (۱۲-۵۷)$$

$$\frac{B(L)}{C(L)}=\frac{\beta_0+\beta_1 L}{1-\gamma_1 L}=(\beta_0+\beta_1 L)(1+\gamma_1 L+\gamma_1^2 L^2+\cdots)$$

$$=\underbrace{\beta_0}_{\alpha_0}+\underbrace{(\beta_0\gamma_1+\beta_1)}_{\alpha_1}L+\underbrace{(\beta_0\gamma_1^2+\beta_1\gamma_1)}_{\alpha_2}L^2+\underbrace{(\beta_0\gamma_1^3+\beta_1\gamma_1^2)}_{\alpha_3}L^3+\cdots$$

$$=\beta_0+(\beta_0+\frac{\beta_1}{\gamma_1})\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_1^j L^j \qquad (۱۲-۵۸)$$

$$\frac{1}{C(L)}=\frac{1}{1-\gamma_1 L}=1+\gamma_1 L+\gamma_1^2 L^2+\cdots \qquad (۱۲-۵۹)$$

بنابراین در مدل ARDL(۱,۱)، α_jها طبق (۱۲-۵۸) تعریف می‌شوند که $\alpha_0=\beta_0$ و $\alpha_j=(\beta_0+\frac{\beta_1}{\gamma_1})\gamma_1^j$ می‌باشند. θ_jها نیز که ضرایب u_{t-j}ها هستند. طبق (۱۲-۵۹) برابر با γ_1^j می‌باشند. با جایگذاری در (۱۲-۵۵) مدل ARDL(۱,۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t=\frac{\mu}{1-\gamma_1}+\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j X_{t-j}+\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_1^j u_{t-j} \qquad (۱۲-۶۰)$$

بنابراین، مدل ARDL(۱,۱) مشابه مدل با وقفه توزیعی نامحدود است. جورگنسون (۱۹۶۶) این مدل را مدل وقفه عقلایی[1] می‌نامد و ثابت می‌کند که لزوماً شکل مطلوب توزیع وقفه‌ها توسط چند پارامتر محدود توصیف می‌شود. بدین صورت که ضرایب X_{t-j}ها در مدل ARDL، برابر با جملاتی است که از نسبت دو وقفهٔ توزیعی چندجمله‌ای به‌دست می‌آید. همان‌طور که در ARDL(۱,۱) دیدیم طبق (۱۲-۵۸) ضرایب α_0، α_1 و... بر حسب سه ضریب β_0، β_1 و γ_1 بیان می‌شوند. نسبت این دو چندجمله‌ای (یعنی $\frac{B(L)}{C(L)}$) برابر با یک چندجمله‌ای نامحدود است که با $A(L)$ نشان می‌دهیم:

$$\frac{B(L)}{C(L)}=A(L) \qquad (۱۲-۶۱)$$

1- rational lag model

که $A(L)$ برابر است با:

$$A(L)=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j L^j=\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2+\cdots$$

همچنین می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$C(L)A(L)=B(L) \qquad (۱۲-۶۲)$$

$$(1-\gamma_1 L-\gamma_2 L^2-\cdots-\gamma_p L^p)(\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2+\cdots)=(\beta_0+\beta_1 L+\beta_2 L^2+\cdots+\beta_q L^q)$$

برای تعیین α_jها، ابتدا دو پرانتز سمت چپ را در هم ضرب کرده و ساده می‌کنیم. سپس ضریب L^j در سمت راست را برابر با ضریب آن در سمت چپ، قرار داده و از حل آنها α_jها را تعیین می‌کنیم.

مثال ۶-۹: مدل ARDL(۳,۳) را در نظر بگیرید:

$$Y_t=\mu+\gamma_1 Y_{t-1}+\gamma_2 Y_{t-2}+\gamma_3 Y_{t-3}+\beta_0 X_t+\beta_1 X_{t-1}+\beta_2 X_{t-2}+\beta_3 X_{t-3}+u_t$$

در این مدل روابط زیر برقرار است:

$$C(L)=1-\gamma_1 L-\gamma_2 L^2-\gamma_3 L^3$$
$$B(L)=\beta_0+\beta_1 L+\beta_2 L^2+\beta_3 L^3$$

روابط فوق را در (۱۲-۶۲) قرار می‌دهیم:

$$C(L)A(L)=B(L)$$
$$(1-\gamma_1 L-\gamma_2 L^2-\gamma_3 L^3)(\alpha_0+\alpha_1 L+\alpha_2 L^2+\cdots)=\beta_0+\beta_1 L+\beta_2 L^2+\beta_3 L^3$$

با ساده نمودن سمت چپ و برابر قرار دادن آن با جملات مشابه در سمت راست، نتایج زیر به‌عنوان ضرایب عملگرهای وقفه به‌دست می‌آید:

$$L^0:\alpha_0=\beta_0\Rightarrow\alpha_0=\beta_0$$
$$L^1:-\alpha_0\gamma_1+\alpha_1=\beta_1\Rightarrow\alpha_1=\beta_1+\alpha_0\gamma_1$$
$$L^2:-\alpha_0\gamma_2-\alpha_1\gamma_1+\alpha_2=\beta_2\Rightarrow\alpha_2=\beta_2+\alpha_0\gamma_2+\alpha_1\gamma_1$$
$$L^3:-\alpha_0\gamma_3-\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1+\alpha_3=\beta_3\Rightarrow\alpha_3=\beta_3+\alpha_0\gamma_3+\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1$$
$$L^j:-\alpha_{j-3}\gamma_3-\alpha_{j-2}\gamma_2-\alpha_{j-1}\gamma_1+\alpha_j=0\Rightarrow\alpha_j=\gamma_1\alpha_{j-1}+\gamma_2\alpha_{j-2}+\gamma_3\alpha_{j-3}$$
$$j=4,5,6,\ldots$$

همان‌طور که می‌بینیم α_jها فقط بر حسب ۷ ضریب β_0، β_1، β_2، β_3، γ_1، γ_2 و γ_3 به‌دست می‌آیند.

در مدل ARDL نیز می‌توان اثرات کوتاه‌مدت و بلندمدت را محاسبه نمود. اثر آنی (کوتاه مدت) برابر است با:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_t}=\alpha_0=\beta_0 \qquad (۱۲-۶۳)$$

اثر تأخیری برابر است با:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-j}}=\alpha_j \quad j=1,2,\ldots \qquad (۱۲-۶۴)$$

اثر بلندمدت یا اثرات تجمعی برابر است با:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\cdots \qquad (۱۲-۶۵)$$

با استفاده از رابطه $A(L)=\frac{B(L)}{C(L)}$، می‌توان نشان داد که $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j=\sum_{j=0}^{q}\beta_j \Big/ (1-\sum_{j=1}^{p}\gamma_j)$ است. اثر بلندمدت را می‌توان به‌صورت دیگری نیز تفسیر نمود. در بلندمدت (وضعیت تعادلی)، متغیرها به یک وضعیت ایستا و بدون تغییر می‌رسند، لذا در تعادل (بلندمدت) رابطه زیر برقرار است:

$$Y_t=Y_{t-1}=\cdots=Y_{t-p}=Y^* \qquad (۱۲-۶۶)$$

$$X_t=X_{t-1}=\cdots=X_{t-q}=X^*$$

اگر روابط فوق را در مدل ARDL قرار دهیم، رابطه تعادلی بین Y و X به‌دست می‌آید:

$$Y^*=\mu+(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)Y^*+(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_q)X^* \qquad (۱۲-۶۷)$$

$$\Rightarrow Y^*=\frac{\mu}{1-(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_p)}+\frac{(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_q)}{1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}X^*$$

در بلندمدت، مقادیر جملهٔ خطا صفر است. جملهٔ خطا بیانگر انحراف از تعادل است و چون در بلندمدت در تعادل قرار داریم، لذا خطای تعادل یا انحراف از تعادل برابر صفر است.

طبق مدل (۱۲-۶۷) اثر بلندمدت یا ضریب تکاثری بلند مدت برابر است با:

$$\frac{\Delta Y^*}{\Delta X^*}=\frac{\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_q}{1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}=\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j \qquad (۱۲-۶۸)$$

بنابراین بایستی در بلندمدت، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\Delta Y^*=\frac{\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_q}{1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}\Delta X^* \qquad (۱۲-۶۹)$$

برای مدل ARDL(1,1) اثرات آنی، تأخیری و بلندمدت با توجه به $\alpha_j=(\beta_0+\frac{\beta_1}{\gamma_1})\gamma_1^j$ عبارتند از:

$$\text{اثر آنی:}\quad \frac{\Delta Y_t}{\Delta X_t}=\alpha_0=\beta_0 \qquad (۱۲-۷۰)$$

$$\text{اثر تأخیری:}\quad \frac{\Delta Y_t}{\Delta X_{t-j}}=\alpha_j=(\beta_0+\frac{\beta_1}{\gamma_1})\gamma_1^j \;;\; j=1,2,\ldots \qquad (۱۲-۷۱)$$

$$\text{اثر بلندمدت:}\quad \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j=\alpha_0+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j=\beta_0+(\beta_0+\frac{\beta_1}{\gamma_1})\sum_{j=1}^{\infty}\gamma_1^j$$

$$=\beta_0+(\beta_0+\frac{\beta_1}{\gamma_1})\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}=\frac{\beta_0+\beta_1}{1-\gamma_1} \qquad (۱۲-۷۲)$$

برای تحلیل بلندمدت و مقایسه تعادل‌ها، رابطه (۱۲-۶۷) مناسب است. اما وقتی تعادل موجود به‌هم می‌خورد تا زمان برقراری تعادل جدید، متغیرها در حال تغییر می‌باشند. بنابراین، تغییرات Y_t را می‌توان ناشی از دو عامل دانست:

۱- تغییرات Y در زمان t که ناشی از تغییرات X در همان زمان است که برابر با $\Delta Y_t=\beta_0\Delta X_t$ می‌باشد.

۲- تغییرات Y در زمان t که ناشی از تصحیح خطای تعادل در دورهٔ قبلی است. به‌عبارت دیگر، Y در زمان t به انحراف از تعادل در زمان $t-1$ واکنش نشان می‌دهد که برابر با $\Delta Y_t=au_{t-1}$ است. a ضریب تصحیح عدم تعادل و u_{t-1} انحراف از تعادل در زمان $t-1$ است. بنابراین کل تغییرات Y در زمان t برابر است با:

$$\Delta Y_t=\beta_0\Delta X_t+au_{t-1}+\varepsilon_t \qquad (۱۲-۷۳)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که رابطه تعادلی Y و X طبق (۱۲-۶۷) می‌باشد. در تعادل، u_t صفر است. اما بدیهی است که معمولاً انحراف از تعادل وجود دارد و متغیرها حول مقادیر تعادلی خود در نوسان هستند و لذا رابطه تعادلی برای دوره $t-1$ عبارت است از:

$$Y_{t-1}-\frac{\mu}{1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}-\frac{\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_q}{1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}X_{t-1}=u_{t-1} \qquad (۱۲-۷۴)$$

بنابراین، رابطه(۱۲-۷۴) بیانگر انحراف از تعادل در دورهٔ $t-1$است که مقدار آن برابر u_t است.

به‌منظور استخراج (۱۲-۷۳)، بحث را از معادله (۱۲-۵۱) شروع می‌کنیم. بدین منظور از طرفین آن، Y_{t-1} را کم کرده و $\beta_0 X_{t-1}$ را به سمت راست اضافه و کم می‌کنیم:

$$Y_t-Y_{t-1}=\mu+(\gamma_1-1)Y_{t-1}+\beta_0(X_t-X_{t-1})+(\beta_0+\beta_1)X_{t-1}+u_t$$

$$\Delta Y_t=\beta_0\Delta X_t+(\gamma_1-1)\left[Y_{t-1}-\frac{\mu}{1-\gamma_1}-\frac{\beta_0+\beta_1}{1-\gamma_1}X_{t-1}\right]+u_t \quad (۱۲\text{-}۷۰)$$

عبارت داخل کروشه برابر با u_{t-1} است که بیانگر انحراف از تعادل در دوره $t-1$ می‌باشد. γ_1-1 بیانگر واکنش Y به خطای تعادل در دوره $t-1$ است. این ضریب نشان‌دهندهٔ تعدیل به سمت تعادل است. با توجه به اینکه $\gamma_1<1$ است، لذا ضریب تعدیل $\gamma_1-1<0$ است. بنابراین، اگر در دوره قبل، $u_{t-1}<0$ باشد بدان معنا است که انحراف از تعادل منفی است و Y کمتر از سطح تعادلی خود می‌باشد. حال در زمان t بایستی Y افزایش یابد و به سمت مقدار تعادلی خود حرکت کند. چون عبارت داخل کروشه منفی است و ضریب γ_1-1 نیز منفی است، لذا $\Delta Y_t>0$ خواهد بود که نشان‌دهندهٔ افزایش Y در دوره t می‌باشد. این تغییرات در راستای تصحیح خطای تعادل می‌باشد. به همین دلیل این مدل را مدل تصحیح خطا[1] (ECM) یا مدل تصحیح تعادل[2] (ECM) می‌گویند.

برای بررسی کارکرد این مدل، تصور کنید که $\Delta X=0$ باشد. حال فرض کنید که خطای تعادل در زمان قبل برابر b باشد $u_{t-1}=b$. در این صورت، انحراف Y از تعادل برابر با $Y_{t-1}-Y^*=u_{t-1}=b$ می‌باشد. بنابراین، تغییر Y_t برای رسیدن به تعادل در زمان t برابر است با:

$$\Delta Y_t=(\gamma_1-1)u_{t-1}=(\gamma_1-1)b \quad (۱۲\text{-}۷۶)$$

در زمان بعد، مقدار تصحیح خطا برابر است با[3]:

$$\Delta Y_{t+1}=(\gamma_1-1)u_t=(\gamma_1-1)\gamma_1 u_{t-1}=(\gamma_1-1)\gamma_1 b$$

با تکرار این محاسبات، خواهیم داشت:

1- error correction model
2- equilibrium correction model

۳- خطای تعادل در دوره t برابر با $u_t=\gamma_1 u_{t-1}$ است، زیرا:

$$u_t=Y_t-Y^*=Y_t-Y_{t-1}+Y_{t-1}-Y^*=(Y_{t-1}+\Delta Y_t)-Y^*=(Y_{t-1}-Y^*)+\Delta Y_t=u_{t-1}+(\gamma_1-1)u_{t-1}=\gamma_1 u_{t-1}$$

$$\Delta Y_{t+s}=(\gamma_1-1)\gamma_1^s u_{t-1}=(\gamma_1-1)\gamma_1^s b \;;\; s=0,1,\ldots \quad (۱۲\text{-}۷۷)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که تغییر Y در زمان $t+s$ در واکنش به عدم تعادل زمان $t-1$ بستگی به ضریب γ_1^s دارد. با افزایش s مقدار تغییر Y به سمت صفر میل می‌کند، زیرا Y کاملاً به مقدار تعادلی خود نزدیک شده است. مجموع تغییرات Y برای رسیدن به تعادل برابر است با:

$$\sum_{s=0}^{\infty}\Delta Y_{t+s}=(\gamma_1-1)u_{t-1}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_1^s=(\gamma_1-1)u_{t-1}\frac{1}{1-\gamma_1}=-u_{t-1} \quad (۱۲\text{-}۷۸)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که کل خطای تعادل، در بلندمدت تصحیح می‌شود.

رابطه (۱۲-۷۷) نشان می‌دهد که سرعت رسیدن به تعادل بستگی به ضریب γ_1 دارد. هر چه γ_1 کوچکتر باشد سرعت رسیدن به تعادل بیشتر خواهد بود. به‌عنوان مثال اگر $\gamma_1=0$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\Delta Y_t=(0-1)u_{t-1}=-u_{t-1}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که اگر $\gamma_1=0$ باشد، سرعت تعدیل بسیار بالا است و در سال t کل عدم تعادل سال $t-1$ اصلاح خواهد شد.

مثال ۷-۹: فرض کنید در تخمین مدل ECM که براساس یک مدل ARDL(۱,۱) به‌دست آمده است، به نتیجهٔ زیر رسیده‌ایم:

$$\Delta Y_t=۰/۸\Delta X_t-۰/۶(Y_{t-1}-۳۰۰-۲/۵X_{t-1})$$

در این مدل، ضرایب شامل $\beta_0=۰/۸$، $\beta_1=۰/۷$ و $\gamma_1=۰/۴$ می‌باشد. بنابراین اثر آنی X بر Y برابر با $\beta_0=۰/۸$ و اثر بلندمدت برابر با $\frac{\beta_0+\beta_1}{1-\gamma_1}=۲/۵$ می‌باشد. اگر X در زمان جاری تغییر کند Y در همان زمان با ضریب ۰/۸ به آن واکنش نشان می‌دهد که بیانگر واکنش آنی است. حال مقدار تعادلی طبق رابطه $Y=۳۰۰+۲/۵X$ به‌دست می‌آید. مثلاً اگر $X^*=۱۰۰$ باشد آنگاه $Y^*=۵۵۰$ خواهد بود. در این صورت، انحراف از تعادل برابر صفر است. حال تصور کنید که در زمان قبل $X_{t-1}=۸۰$ باشد، در این صورت $Y_{t-1}=۳۰۰+۲/۵(۸۰)=۵۰۰$ و انحراف از تعادل برابر با $u_{t-1}=۵۰۰-۵۵۰=-۵۰$ است. این بدان معنا است که مقدار Y حدود ۵۰ واحد کمتر از سطح تعادلی است. حال اگر در زمان t متغیر X_t هیچ تغییری نداشته باشد، Y_t به‌خاطر عدم تعادل زمان قبلی، دچار تغییر خواهد شد که برابر است با:

$$\Delta Y_t=۰/۸(۰)-۰/۶(-۵۰)=۳۰$$

بدین‌ترتیب Y_t در زمان t حدود ۳۰ واحد از عدم‌تعادل را اصلاح کرده و به رقم ۵۳۰=۵۰۰+۳۰ می‌رسد. در زمان بعد $(t+1)$ تغییر Y جهت رسیدن به تعادل برابر است با (عدم تعادل زمان t برابر با ۲۰−=۵۵۰−۵۳۰ است):

$$\Delta Y_{t+1} = ۰/۸(۰) - ۰/۶(-۲۰) = ۱۲$$

در زمان $t+1$ مقدار Y به ۵۴۲ می‌رسد که فقط ۸ واحد زیر تعادل است. واضح است که طبق (۷۷-۱۲) در زمان $t+s$ مقدار تعدیل Y برابر است با:

$$\Delta Y_{t+s} = -۰/۶ u_{t+s-1} \quad ; \quad s=۰,۱,۲,...$$

$$\Delta Y_{t+s} = -(۰/۴-۱)(۰/۴)^s u_{t-1}$$

$$= -۰/۶(۰/۴)^s(-۵۰) = ۳۰(۰/۴)^s \quad ; \quad s=۰,۱,۲,...$$

به‌عنوان مثال در زمان $t+5$ تغییر Y جهت تصحیح عدم‌تعادل زمان $t-1$ برابر با $\Delta Y_{t+5} = ۰/۳۰۶۷$ می‌باشد. اگر انحراف از تعادل‌های کمتر از ۰/۵ واحد را صفر فرض کنیم آنگاه Y بعد از گذشت ۵ سال به تعادل می‌رسد. در این حالت کل تغییرات Y از سال t تا $t+5$ برابر است با:

$$\sum_{s=0}^{5} \Delta Y_{t+s} = ۳۰+۱۲+۴/۸+۱/۹۲+۰/۷۶۸+۰/۳۰۷۶ = ۴۹/۸ \cong ۵۰$$

همان‌طور که دیدیم رابطهٔ بلندمدت بر اساس عبارت $\frac{\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_q}{1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)}$ تعریف می‌شود. بنابراین، شرط وجود رابطهٔ بلندمدت این است که $1-(\gamma_1+\cdots+\gamma_p)\geq 0$ باشد. بدین منظور فرضیهٔ $H_0: \sum \gamma_j \geq 1$ را در مقابل فرضیهٔ $H_1: \sum \gamma_j < 1$ آزمون می‌کنیم. برای آزمون این فرضیه، آمارهٔ t به صورت زیر تعریف می‌شود که معروف به آزمون بنرجی- دولادو- مستر[1] است:

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{p} \hat{\gamma}_j - 1}{\sum_{j=1}^{p} se(\hat{\gamma}_j)} \qquad (۱۲-۷۹)$$

$se(\hat{\gamma}_j)$ بیانگر انحراف معیار $\hat{\gamma}_j$ می‌باشد. اگر قدرمطلق t بزرگ‌تر از مقدار بحرانی باشد، H_0 رد می‌شود و وجود رابطهٔ بلندمدت رد نمی‌شود. مقادیر بحرانی توسط بنرجی، دولادو و مستر محاسبه شده است که به‌صورت جدول (۱-۱۲) می‌باشد.

1- Banerjee-Dolado-Mestre

جدول ۱-۱۲: مقادیر بحرانی بنرجی- دولادو- مستر

تعدادمتغیرهای توضیحی (K)	حجم نمونه (n)	با عرض از مبدأ و بدون روند ۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱	با عرض از مبدأ و روند ۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱
۱	۲۵	-۴/۱۲	-۳/۳۵	-۲/۹۵	-۴/۷۷	-۳/۸۹	-۳/۴۸
	۵۰	-۳/۹۴	-۳/۲۸	-۲/۹۳	-۴/۴۸	-۳/۷۸	-۳/۴۴
	۱۰۰	-۳/۹۲	-۳/۲۷	-۲/۹۴	-۴/۳۵	-۳/۷۵	-۳/۴۳
	۵۰۰	-۳/۸۲	-۳/۲۳	-۲/۹۰	-۴/۳۰	-۳/۷۱	-۳/۴۱
	۵۰۰۰	-۳/۷۸	-۳/۱۹	-۲/۸۹	-۴/۲۷	-۳/۶۹	-۳/۳۹
۲	۲۵	-۴/۵۳	-۳/۶۴	-۳/۲۴	-۵/۱۲	-۴/۱۸	-۳/۷۲
	۵۰	-۴/۲۹	-۳/۵۷	-۳/۲۰	-۴/۷۶	-۴/۰۴	-۳/۶۶
	۱۰۰	-۴/۲۲	-۳/۵۶	-۳/۲۲	-۴/۶۰	-۳/۹۸	-۳/۶۶
	۵۰۰	-۴/۱۱	-۳/۵۰	-۳/۱۹	-۴/۵۴	-۳/۹۴	-۳/۶۴
	۵۰۰۰	-۴/۰۶	-۳/۴۸	-۳/۱۹	-۴/۵۱	-۳/۹۱	-۳/۶۲
۳	۲۵	-۴/۹۲	-۳/۹۱	-۳/۴۶	-۵/۴۲	-۴/۳۹	-۳/۸۹
	۵۰	-۴/۵۹	-۳/۸۲	-۳/۴۵	-۵/۰۴	-۴/۲۵	-۳/۸۶
	۱۰۰	-۴/۴۹	-۳/۸۲	-۳/۴۷	-۴/۸۶	-۴/۱۹	-۳/۸۶
	۵۰۰	-۴/۴۷	-۳/۷۷	-۳/۴۵	-۴/۷۶	-۴/۱۵	-۳/۸۴
	۵۰۰۰	-۴/۴۶	-۳/۷۴	-۳/۴۲	-۴/۷۲	-۴/۱۲	-۳/۸۲
۴	۲۵	-۵/۲۷	-۴/۱۸	-۳/۶۸	-۵/۷۹	-۴/۵۶	-۴/۰۴
	۵۰	-۴/۸۵	-۴/۰۵	-۳/۶۴	-۵/۲۱	-۴/۴۳	-۴/۰۳
	۱۰۰	-۴/۷۱	-۴/۰۳	-۳/۶۷	-۵/۰۷	-۴/۳۸	-۴/۰۲
	۵۰۰	-۴/۶۲	-۳/۹۹	-۳/۶۷	-۴/۹۳	-۴/۳۴	-۴/۰۲
	۵۰۰۰	-۴/۵۷	-۳/۹۷	-۳/۶۶	-۴/۸۹	-۴/۳۰	-۴/۰۰
۵	۲۵	-۵/۵۳	-۴/۴۶	-۳/۸۲	-۶/۱۸	-۴/۷۶	-۴/۱۶
	۵۰	-۵/۰۴	-۴/۴۳	-۳/۸۲	-۵/۳۷	-۴/۶۰	-۴/۱۹
	۱۰۰	-۴/۹۲	-۴/۳۰	-۳/۸۵	-۵/۲۴	-۴/۵۵	-۴/۱۹
	۵۰۰	-۴/۸۱	-۴/۳۹	-۳/۸۶	-۵/۱۵	-۴/۵۴	-۴/۲۰
	۵۰۰۰	-۴/۷۰	-۴/۲۷	-۳/۸۲	-۵/۱۱	-۴/۵۲	-۴/۱۸

مسائل

۱-۱۲ در یک مدلی که با وقفه توزیعی نامحدود می‌باشد، وقتی که از تبدیل کویک استفاده می‌کنیم، نشان دهید که میانگین و میانه وقفه به‌ترتیب برابر با $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ و $-\frac{\ln 2}{\ln \lambda}$ می‌باشد.

۲-۱۲ فرض کنید موجودی سرمایه مطلوب (K_t^*) تابعی از درآمد ملی (Y_t) و هزینه استفاده از سرمایه (R_t) باشد.

$$K_t^* = \beta Y_t + \gamma R_t$$

اگر موجودی سرمایه از فرضیه تعدیلات جزئی تبعیت نماید، $\left(K_t - K_{t-1} = \lambda(K_t^* - K_{t-1})\right)$، معادله موجودی سرمایه واقعی را به‌دست آورید. آیا جملهٔ خطا خودهمبستگی خواهد داشت؟ چرا؟

۳-۱۲ فرض کنید که $Y_t = \alpha + \beta X_t^* + u_t$ باشد، X_t^* مقدار انتظاری X ست که شکل‌گیری آن طبق فرضیه انتظارات تطبیقی است:

$$X_t^* - X_t = \lambda(X_{t-1}^* - X_{t-1})$$

الف) معادله رگرسیون را برحسب مقادیر واقعی بنویسید.

ب) آیا معادله به‌دست آمده در بند الف، فروض کلاسیک را تأمین می‌کند.

۴-۱۲ معادله زیر با $n=30$ مشاهده برآورد شده است:

$$\hat{Y}_t = 4/75 + 0/88 X_t + 0/62 Y_{t-1} \qquad R^2 = 0/85$$
$$(2/4) \quad (4/3) \quad (3/5) \qquad DW = 1/98$$

الف) میانگین وقفه را به‌دست آورده و آن را تفسیر کنید.

ب) میانه وقفه را به‌دست آورده و آن را تفسیر کنید.

ج) اثر آنی (کوتاه‌مدت) X را بر Y حساب کنید.

د) اثر بلندمدت (کل اثرات) X بر Y را حساب کنید.

و) اگر $\bar{X}=100$ و $\bar{Y}=200$ باشد، کشش‌های کوتاه‌مدت و بلند مدت را حساب کنید.

ز) اگر بخواهیم ۹۰٪ از کل اثرات X و Y را مشاهده کنیم، چه مدت زمان باید بگذرد.

ح) اگر X در زمان t یک واحد تغییر کند، اثر آن در ۳ سال بعد (یعنی در $t+3$) بر Y چقدر خواهد بود؟

۵-۱۲ طبق نظریه نئوکلاسیک، موجودی مطلوب سرمایه که از حداکثر سازی سود بنگاه به‌دست می‌آید.

الف) اگر تابع تولید بنگاه به‌صورت کاب-داگلاس با بازده به‌مقیاس ثابت باشد، موجودی مطلوب سرمایه را بر حسب سطح تولید (فروش) به‌دست آورید.

ب) اگر موجودی مطلوب سرمایه از فرضیه تعدیلات جزئی تبعیت کند، معادله رگرسیون را برای موجودی سرمایه واقعی به‌دست آورید.

ج) معادله به‌دست آمده چه ویژگی‌هایی دارد؟

۶-۱۲ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t^* = \alpha + \beta X_t^* + u_t$$

Y^* و X^* به ترتیب مقدار مطلوب Y و مقدار انتظاری X هستند. Y^* از فرضیه تعدیلات جزئی و X^* از فرضیه انتظارات تطبیقی تبعیت می‌کند. مدل فوق را تبدیل به یک مدل قابل تخمین نموده و خصوصیات و مشکلات آن را بررسی کنید.

ضمیمه فصل دوازدهم: مدل‌های باوقفهٔ توزیعی در Stata

برآورد مدل‌های باوقفه توزیعی در Stata

مدل‌های با وقفه توزیعی را می‌توان با فرمان‌های ساده برآورد نمود.

مدل $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \beta_3 X_{t-3} + u_t$ با یکی از فرمان‌های زیر برآورد می‌شود:

```
reg y x l.x l2.x l3.x
reg y l(1/3).x
```

مدل $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \gamma Y_{t-1} + u_t$ با یکی از فرمان‌های زیر برآورد می‌شود:

```
reg y x l.x l2.x l.y
reg y l(1/2).x l.y
```

در حالت کلی برای برآورد مدل $Y_t = \alpha + \sum_{i=1}^{p} \beta_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j Y_{t-j} + u_t$ از فرمان زیر استفاده می‌شود:

```
reg y l(1/p).x l(1/q).y
```

برای محاسبه اثرات تجمعی، می‌توان بعد از تخمین هر معادله از فرمان زیر استفاده نمود. به‌عنوان مثال برای محاسبه اثرات تجمعی x بر y تا وقفه پنجم خواهیم داشت:

```
lincom x+l.x+l2.x+l3.x+l4.x+l5.x
```

فصل سیزدهم

سری‌های زمانی یک متغیره

۱۳-۱ مقدمه

در مدل‌های سری زمانی یک متغیره تلاش می‌شود تا متغیرهای اقتصادی و مالی را بر اساس مقادیر گذشتهٔ آنها و همچنین بر اساس مقادیر جاری و گذشتهٔ جملات خطا، مدل‌سازی و پیش‌بینی نمایند. این مدل‌ها در مقابل مدل‌های ساختاری قرار دارند. مدل‌های ساختاری ماهیتاً چند متغیره بوده و تغییرات یک متغیر را توسط تغییرات جاری و گذشته متغیرهای دیگر توضیح می‌دهند. مدل‌های سری‌های زمانی مربوط به خانواده مدل‌های ARIMA[1] هستند که عمدتاً بر مبنای روش باکس و جنکینز (۱۹۷۶) مدل‌سازی می‌شوند. هنگامی که یک مدل ساختاری مناسب وجود ندارد، مدل‌های سری زمانی می‌توانند مفید باشند. بنابراین، نقش تئوری‌ها در مدل‌سازی سری‌های زمانی کم‌رنگ می‌شود. این شیوه می‌تواند ناشی از فقدان تئوری یا مغشوش بودن نظریه‌ها و یا عدم دسترسی به داده‌های متغیرهای توضیحی باشد. به‌عنوان مثال، برای تبیین نوسانات متغیری مانند Y_t، ممکن است متغیرهای توضیحی زیادی وجود داشته باشند ولی امکان استفاده از آنها وجود ندارد. همچنین ممکن است Y_t بازدهی روزانه سهام باشد، در حالی که داده‌های متغیرهای توضیحی به‌صورت ماهانه هستند. در چنین شرایطی مدل‌های سری زمانی می‌تواند شیوه ساده‌تر و مناسب‌تری باشد.

1- autoregressive integrated moving average

۱۳-۲ برخی مفاهیم سری‌های زمانی

در اینجا ابتدا برخی از مفاهیم مربوط به سری‌های زمانی را تعریف و توصیف می‌کنیم. یکی از مفاهیم مهم که در ارتباط با سری‌های زمانی است مفهوم ایستایی یا مانایی[1] است.

۱۳-۲-۱ فرایند اکیداً مانا (مانایی قوی)

فرایند اکیداً مانا، فرایندی است که مشترک (توأم) آن وابسته به زمان نباشد. اگر Y_t یک فرایند مانا باشد، آنگاه توزیع $Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}$ مشابه توزیع $Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k}$ خواهد بود.

$$F_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_n}}(y_1, y_2, \dots, y_n) = F_{Y_{t_1+k}, Y_{t_2+k}, \dots, Y_{t_n+k}}(y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (۱۳-۱)$$

F تابع توزیع مشترک متغیرهای تصادفی است. این را می‌توان بدین صورت نیز بیان نمود که احتمال دنباله $\{Y_t\}$ با احتمال دنباله $\{Y_{t+k}\}$ به‌ازای هر k یکسان است. به‌عبارت دیگر یک سری زمانی در صورتی اکیداً مانا است که توزیع مقادیر آن، همراه با گذشت زمان، یکسان بماند. این شرط دلالت بر این دارد که احتمال اینکه Y در یک فاصله معین قرار بگیرد، در زمان حال، آینده و گذشته یکسان است.

۱۳-۲-۲ فرایند مانای ضعیف (مانایی ضعیف)

خصوصیات هر فرایند تصادفی توسط تابع توزیع یا تابع چگالی آن توصیف می‌شود. در مطالعات کاربردی، به‌جای تابع توزیع معمولاً از گشتاورهای اول و دوم استفاده می‌شود که شامل میانگین و واریانس و همچنین کوواریانس می‌باشد. بدیهی است که اگر توزیع مشترک یک فرایند تصادفی، مستقل از زمان باشد، آنگاه گشتاورهای آن نیز مستقل از زمان خواهند بود. بنابراین، اگر سری زمانی Y_t، شرایط زیر را به ازای هر t تأمین کند، آن را مانای ضعیف گویند:

$$\begin{aligned} &۱)\ E(Y_t) = \mu \\ &۲)\ E(Y_t - \mu)^2 = \mathrm{var}(Y_t) = \sigma^2 < \infty \qquad (۱۳-۲) \\ &۳)\ \mathrm{cov}(Y_{t_1}, Y_{t_2}) = E(Y_{t_1} - \mu)(Y_{t_2} - \mu) = \gamma_{t_2 - t_1} \qquad \text{برای هر } t_1, t_2 \end{aligned}$$

شرایط سه گانه فوق بیان می‌کند که فرایندهای مانا بایستی دارای میانگین ثابت، واریانس ثابت و ساختار خودکوواریانس[2] ثابت باشند.

1- stationary
2- auto-covariance

بدیهی است که اگر Y_t مانای قوی باشد، مانای ضعیف نیز خواهد بود. اما مانایی ضعیف الزاماً به‌معنای مانایی قوی نمی‌باشد. فقط در صورتی که Y_t توزیع نرمال داشته باشد، مانایی ضعیف معادل با مانایی قوی خواهد بود.

تعاریف مربوط به میانگین و واریانس متغیر تصادفی کاملاً ساده است. اما خودکواریانس‌ها نیاز به بررسی بیشتری دارد. خودکوواریانس‌ها نشان می‌دهند که چگونه Y با مقادیر گذشته خود همبستگی دارد. برای یک سری مانا بایستی مقدار خودکوواریانس‌ها فقط وابسته به اختلاف بین t_1 و t_2 باشد، به‌عنوان مثال کوواریانس بین Y_t و Y_{t-1} تقریباً با کوواریانس بین Y_{t-10} و Y_{t-11} یکسان می‌باشد. به‌طورکلی کوواریانس بین Y_t و Y_{t-s} برابر است با:

$$E[(Y_t - E(Y_t))(Y_{t-s} - E(Y_{t-s}))] = \gamma_s \qquad s = 0, 1, 2, \dots \qquad (۱۳-۳)$$

عبارت فوق را تابع خودکوواریانس مرتبهٔ s می‌گویند. به‌ازای $s = 0$، وقفهٔ خودکوواریانس برابر صفر است و لذا γ_0 بیانگر واریانس Y است. γ_s ها را بدین دلیل خودکوواریانس می‌گویند که بیانگر کوواریانس بین Y و مقادیر گذشتهٔ Y می‌باشند. خودکوواریانس‌ها معیار مفیدی برای توصیف رابطه بین مقادیر جاری و گذشتهٔ Y نیستند، زیرا مقادیر آنها به واحد اندازه‌گیری Y_t وابسته است. به‌همین دلیل، با تقسیم آنها بر واریانس، می‌توان ضرایب خودهمبستگی[1] را به‌دست آورد:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} \qquad s = 0, 1, 2, \dots \qquad (۱۳-۴)$$

ρ_s معیاری است که بیانگر ضرایب همبستگی بین مقادیر جاری و گذشته Y است که مقدار آن بین ۱- و ۱+ می‌باشد. اگر $s = 0$ باشد، ضریب همبستگی دقیقاً برابر با ۱ خواهد شد. اگر ρ_s را در

۱- به‌عنوان مثال، خودکوواریانس مرتبهٔ s برابر است با (با این فرض که میانگین Y ثابت است):

$$\gamma_s = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{n}$$

حال ضریب خودهمبستگی (auto-correlation) برای وقفه s عبارت است از:

$$\rho_s = \frac{\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s})}{\sqrt{\mathrm{var}(Y_t)\,\mathrm{var}(Y_{t-s})}}$$

با فرض $\mathrm{var}(Y_t) = \mathrm{var}(Y_{t-s}) = \sigma^2 = \gamma_0$، ضریب خودهمبستگی مرتبهٔ s برابر است با:

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_0 \gamma_0}} = \frac{\gamma_s}{\gamma_0}$$

مقابل مقدار وقفه‌ها (یعنی s) ترسیم کنیم، نموداری به‌دست می‌آید که وضعیت تابع خودهمبستگی را نشان می‌دهد. برای سری‌های مانا، ρ_s فقط تابعی از s (وقفه) است و ارتباطی با t ندارد.

۱۳-۲-۳ فرایند تصادفی محض

اگر برای سری زمانی Y_t، شرایط زیر برقرار باشد آن را کاملاً تصادفی گویند:

$$E(Y_t) = \mu$$
$$\text{var}(Y_t) = \sigma^{۲} \qquad (۱۳-۵)$$
$$\gamma_s = ۰ \quad ; \quad s = ۱, ۲, \ldots$$

بنابراین فرایند تصادفی محض دارای میانگین و واریانس ثابت است و مقادیر خودکوواریانس آن، صفر می‌باشد. شرط آخر بیانگر این است که هر مشاهده‌ای با تمامی مقادیر قبلی خودش هیچ‌گونه همبستگی ندارد و به‌عبارت دیگر هیچ حافظه‌ای ندارد. لذا تابع خودهمبستگی برای فرایندهای کاملاً تصادفی، برابر با صفر است. چنین متغیری را نمی‌توان براساس مقادیر گذشته‌اش پیش‌بینی نمود، زیرا کاملاً تصادفی بوده و هیچ وابستگی با مقادیر گذشته خود ندارد.

فرایند تصادفی محض را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$Y_t = \mu + u_t \qquad (۱۳-۶)$$

بنابراین، Y_t حول میانگین (μ) دارای نوسانات تصادفی است.

ایجاد فرایند تصادفی محض در Eviews

ابتدا یک workfile برای دوره مورد نظر (به‌عنوان مثال ۱۳۹۰-۱۳۰۰) ایجاد می‌کنیم. سپس برای فرایند $Y_t = ۲ + u_t$، داده‌ها را با فرمان زیر ایجاد می‌کنیم:

```
genr y=2+nrnd
```

nrnd متغیر تصادفی نرمال با میانگین صفر و واریانس یک می‌باشد

۱۳-۲-۴ آزمون معنادار بودن ضرایب خودهمبستگی

ضرایب خودهمبستگی یکی از معیارهای مورد استفاده در مدل‌سازی سری‌های زمانی است. همان‌طور که دیدیم ضریب خودهمبستگی نشان می‌دهد که یک سری زمانی چگونه با مقادیر گذشته خود، همبستگی دارد. لذا آزمون معنی‌دار بودن این ضرایب، اهمیت درخور توجهی دارد.

با فرض اینکه Y_t توزیع نرمال استاندارد داشته باشد، ضرایب خودهمبستگی نیز تقریباً توزیع نرمال خواهند داشت که توزیع آن عبارت است از:

$$\hat{\rho}_s \sim N\left(۰, \frac{۱}{T}\right) \qquad (۱۳-۷)$$

T حجم نمونه و $\hat{\rho}_s$ بیانگر ضرایب خودهمبستگی می‌باشد که از مشاهدات نمونه به‌دست می‌آید. این نتایج را می‌توان برای آزمون معنی‌دار بودن ضرایب خودهمبستگی و تشکیل فاصله اطمینان نیز به‌کار برد. به‌عنوان مثال فاصله اطمینان ۹۵ درصدی عبارت است از:

$$\pm ۱/۹۶ \frac{۱}{\sqrt{T}} \qquad (۱۳-۸)$$

اگر ضریب خودهمبستگی $(\hat{\rho}_s)$ در این فاصله قرار بگیرد، سپس فرضیه $H_۰ : \rho_s = ۰$ رد می‌شود. همچنین می‌توان هر فرضیه مشترکی در مورد ضرایب خودهمبستگی را آزمون نمود. به‌عنوان مثال اگر فرضیه مشترک به‌صورت $\rho_۱ = \rho_۲ = \cdots = \rho_m = ۰$ باشد، آنگاه می‌توان آن را با استفاده از تابع Q که توسط باکس و پیرس[1] (۱۹۷۰) مطرح شده است، آزمون نمود:

$$Q = T\sum_{k=۱}^{m} \hat{\rho}_k^{۲} \qquad (۱۳-۹)$$

T حجم نمونه و m تعداد ضرایب خودهمبستگی است.

ضرایب خودهمبستگی بدین دلیل مجذور می‌شوند که علامت‌های مثبت و منفی همدیگر را خنثی نکنند. از آنجا که مجموع مجذور متغیرهای نرمال استاندارد (در اینجا $T\hat{\rho}_s^{۲}$)، توزیع $\chi^{۲}$ دارد، لذا Q توزیع مجانبی $\chi_m^{۲}$ تحت فرضیه $H_۰$ (یعنی صفر بودن همهٔ ضرایب خودهمبستگی) می‌باشد.

به‌هرحال آزمون باکس-پیرس برای نمونه‌های کوچک، ضعیف می‌باشد. بدین منظور از آمارهٔ تعدیل شدهٔ دیگری استفاده می‌شود که معروف به لیونگ-باکس[2] (۱۹۷۸) می‌باشد:

$$Q^* = T(T+۲)\sum_{k=۱}^{m} \frac{\hat{\rho}_k^{۲}}{T-k} \sim \chi_m^{۲} \qquad (۱۳-۱۰)$$

از فرمول (۱۳-۱۰) روشن است که اگر حجم نمونه به سمت بی‌نهایت میل کند، $T+۲$ و $T-k$ همدیگر را خنثی می‌کنند و Q^* معادل با آزمون باکس-پیرس می‌شود.

1- Box-Pierce
2- Liung-Box

مثال ۱-۱۳: فرض کنید که ضرایب خودهمبستگی مرتبه ۱ تا ۵ با استفاده از ۱۰۰ مشاهده برآورد شده که به‌صورت زیر می‌باشد:

وقفه	۱	۲	۳	٤	۵
ضرایب خودهمبستگی $(\hat{\rho}_s)$	۰/۲۰۷	۰/۰۱۳-	۰/۰۸٦	۰/۰۰۵	۰/۰۲۲-

ابتدا هر یک از این ضرایب را به‌طور جداگانه آزمون می‌کنیم. بدین منظور فاصله اطمینان ۹۵ درصدی را تشکیل می‌دهیم:

$$\pm 1/96\frac{1}{\sqrt{T}} \Rightarrow \pm 1/96\frac{1}{\sqrt{100}} \Rightarrow (-0/196, +0/196)$$

در این مثال نتیجه می‌شود که اولین ضریب خودهمبستگی در سطح ۵ درصد دارای تفاوت معناداری از صفر است، زیرا در دامنه مذکور قرار ندارد.

حال فرضیه معنی‌دار بودن ضرایب خودهمبستگی را به‌صورت یکجا آزمون کنیم. در این حالت، فرضیه مشترک به‌صورت زیر است:

$$H_0: \rho_s = 0 \qquad s = 1,2,3,4,5$$

معیارهای باکس-پیرس (Q) و لیونگ-باکس (Q^*) عبارتند از:

$$Q = 100\left[(0/207)^2 + (-0/013)^2 + (0/086)^2 + (0/005)^2 + (-0/022)^2\right] = 5/09$$

$$Q^* = 100(102)\left(\frac{(0/207)^2}{100-1} + \frac{(-0/013)^2}{100-2} + \frac{(0/086)^2}{100-3} + \frac{(0/005)^2}{100-4} + \frac{(-0/022)^2}{100-5}\right) = 5/26$$

مقدار بحرانی χ^2 برابر با $\chi^2_{0/05,5} = 11/1$ است. چون مقدار Q و Q^* در ناحیه بحرانی قرار ندارند، لذا فرضیه H_0 رد نمی‌شود. توجه شود که در آزمون انفرادی ضرایب، به این نتیجه رسیدیم که فرضیه صفر رد شد در حالی که در آزمون مشترک، فرضیه صفر رد نشد. ممکن است چنین چیزی غیرمنتظره باشد. در اینجا ۴ ضریب از ۵ ضریب معنی‌دار نیستند (یعنی عملاً صفر هستند). بنابراین در آزمون مشترک، اثر معنی‌دار بودن یک ضریب به دلیل معنی‌دار نبودن سایر ضرایب، کم‌رنگ می‌شود.

برآورد ضرایب خودهمبستگی در Eviwes

فایل data4

برای محاسبه ضریب خودهمبستگی بر اساس داده‌های نمونه، با استفاده از Eviwes به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

Quick → Series Statistics → Correlogram

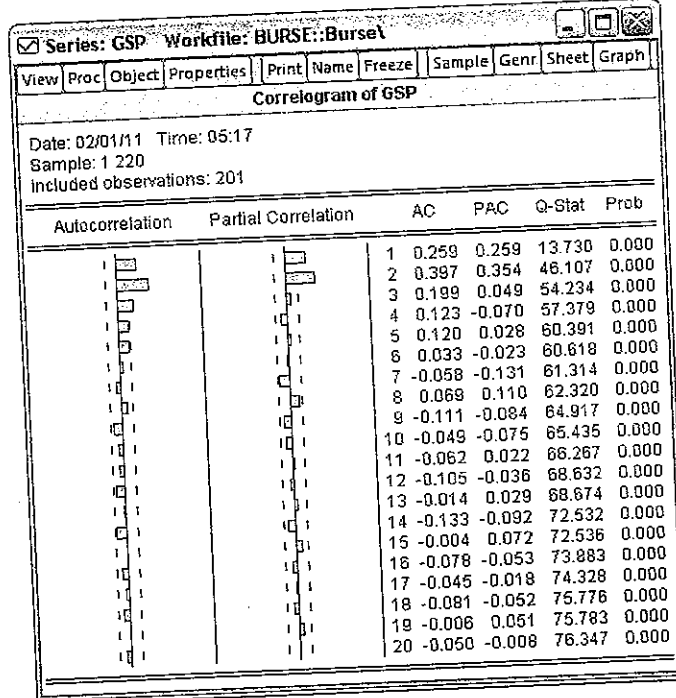
در اینجا پنجره‌ای باز می‌شود که در آن نام سری مورد نظر را وارد می‌کنیم.

Series Name
Series name:
OK Cancel

سری مورد نظر، نرخ رشد هفتگی قیمت سهام در دوره ۸۲-۱۳۸۰ است که حدود ۲۰۱ مشاهده را شامل می‌شود. بعد از وارد نمودن نام متغیر (GSP)، OK را انتخاب می‌کنیم که به دنبال آن پنجره دیگری به شکل زیر باز می‌شود.

Correlogram Specification
Correlogram of
Level
1st difference
2nd difference
Lags to include
20
OK Cancel

در اینجا سه گزینه وجود دارد: گزینه Level مربوط به مقادیر اصلی متغیر مورد نظر است، گزینه 1st difference و 2nd difference به‌ترتیب مربوط به تفاضل مرتبه اول و دوم می‌باشند. همچنین گزینه دیگری وجود دارد که برای انتخاب تعداد وقفه‌ها است که در اینجا آن را برابر با ۲۰ در نظر گرفته‌ایم. با انتخاب OK، نتایج حاصله در پنجره زیر ارائه می‌شود:


Series: GSP Workfile: BURSE::Burse\
View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph

Correlogram of GSP

Date: 02/01/11 Time: 05:17
Sample: 1 220
Included observations: 201

Lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.259	0.259	13.730	0.000
2	0.397	0.354	46.107	0.000
3	0.199	0.049	54.234	0.000
4	0.123	-0.070	57.379	0.000
5	0.120	0.028	60.391	0.000
6	0.033	-0.023	60.618	0.000
7	-0.058	-0.131	61.314	0.000
8	0.069	0.110	62.320	0.000
9	-0.111	-0.084	64.917	0.000
10	-0.049	-0.075	65.435	0.000
11	-0.062	0.022	66.267	0.000
12	-0.105	-0.036	68.632	0.000
13	-0.014	0.029	68.674	0.000
14	-0.133	-0.092	72.532	0.000
15	-0.004	0.072	72.536	0.000
16	-0.078	-0.053	73.883	0.000
17	-0.045	-0.018	74.328	0.000
18	-0.081	-0.052	75.776	0.000
19	-0.006	0.051	75.783	0.000
20	-0.050	-0.008	76.347	0.000

در پنجره فوق AC بیانگر ضرایب خودهمبستگی است که برای وقفه‌های ۱ تا ۲۰ محاسبه شده است. PAC ضرایب خودهمبستگی جزئی را نشان می‌دهد که بعداً راجع به آن بحث خواهیم کرد. وضعیت معنی‌دار بودن هر یک از ضرایب خودهمبستگی (AC) در ستون اول (Autocorrelation) نشان داده شده است. خطوط نقطه چین بیانگر مرز معنی‌دار بودن ضرایب خودهمبستگی است. چون ضرایب ۱، ۲ و ۳ خارج از این مرز قرار دارند، لذا آنها معنی‌دار بوده و تفاوت معناداری از صفر دارند. توجه شود که این مرز از فرمول $\pm ۱/۹۶\frac{1}{\sqrt{T}}$ به‌دست می‌آید که در اینجا T=۲۰۱ می‌باشد. معنی‌دار بودن ضرایب خودهمبستگی جزئی (PAC) نیز در ستون دوم (Partial correlation) نشان داده شده است.

از طرف دیگر ستون ششم (Q-Stat) معیار لیونگ- باکس را نشان می‌دهد که در ستون آخر نیز احتمال‌های آن نشان داده شده است. اولین رقم در این ستون برابر با ۱۳/۷۳ می‌باشد که برای آزمون اولین ضریب خودهمبستگی است. چون مقدار بحرانی $\chi^2_{1,0.05} = ۳/۸۴$ است، لذا ضرایب خودهمبستگی با وقفه ۱ تفاوت معناداری از صفر دارد. عدد دوم برابر با ۴۶/۱ است و چون مقدار بحرانی $\chi^2_{2,0.05} = ۵/۹۹$ است لذا ضریب خودهمبستگی با وقفه ۱ و ۲ به‌طور مشترک تفاوت معناداری با صفر دارند. بقیه ارقام را می‌توان به‌همین ترتیب بررسی نمود. به‌عنوان مثال آخرین رقم این ستون برابر با ۸۳/۶۱ می‌باشد و چون مقدار بحرانی $\chi^2_{25,0.05} = ۳۷/۶۵$ است. لذا مقدار آماره Q در ناحیه بحرانی قرار دارد و فرضیه صفر بودن ضرایب خودهمبستگی رد می‌شود. همچنین می‌توان با بررسی ستون آخر وضعیت معنی‌دار بودن ضرایب همبستگی را بررسی نمود. هر گاه مقدار احتمال‌ها در این ستون برابر یا کوچکتر از ۰/۰۵ باشد بدین معنی است که ضرایب خودهمبستگی معنادار هستند. در واقع این ستون بیانگر سطح معنی‌دار بودن فرضیه مشترک $H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_m = 0$ می‌باشد.

۱۳-۳ مبانی آماری مدل‌های سری زمانی

سری‌های زمانی بر خلاف معادلات رگرسیون، از مبانی آماری استخراج می‌شوند. به‌عنوان مثال، یک مدل سادهٔ سری زمانی را در نظر بگیرید که در آن، Y_t تابعی از Y_{t-1} است. این یک مدل آماری است و همان‌طور که خواهیم دید، می‌توان آن را بر اساس مبانی و فروض آماری (نه تئوری اقتصادی) استخراج نمود.

در تحلیل رگرسیون، معمولاً میانگین شرطی Y_t را برحسب متغیرهای دیگر بیان می‌کنیم. به‌عنوان مثال در رگرسیون یک متغیره از $E(Y_t|X_t) = \beta_0 + \beta_1 X_t$ استفاده می‌شود. این معادلهٔ رگرسیون، مفروض گرفته می‌شود که بر اساس یافته‌های قبلی یا تئوری می‌باشد. به‌عبارت دیگر، پایه این معادله را تئوری اقتصادی می‌دانیم. در تحلیل سری‌های زمانی، معادله رگرسیون از پایه‌های آماری استخراج می‌شود و فروض دیگری نیز که به‌کار می‌رود، صرفاً فروض آماری هستند نه تئوری اقتصادی. یعنی ابتدا یک مدل آماری تعریف می‌شود و سپس معادله رگرسیون را استخراج کرده و مورد تخمین و آزمون و تحلیل قرار می‌دهند. برای ادامه بحث، ابتدا توزیع نرمال مشترک را بررسی می‌کنیم و سپس نتایج آن را در قالب تابع درستنمایی استفاده کرده تا مبانی آماری استخراج مدل‌های سری زمانی را ارائه کنیم.

به‌منظور سادگی بحث، ابتدا حالت دومتغیره را در نظر بگیرید که طبق آن، متغیرهای X_1 و X_2 دارای توزیع نرمال مشترک می‌باشند:[1]

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'}$$

هر یک از متغیرها و ضرایب، عبارتند از:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix}$$

σ_{ii} واریانس X_i و $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ کوواریانس X_1 و X_2 و ضریب همبستگی برابر با $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}$ است.

با جایگذاری به‌جای $\mathbf{x}$، $\boldsymbol{\mu}$، $|\Sigma|$ و Σ^{-1}، توزیع مشترک X_1 و X_2 را به‌صورت زیر می‌نویسیم:[2]

$$f(X_1, X_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(X_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}} - 2\rho\frac{(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}} + \frac{(X_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}}\right]}$$

توزیع حاشیه‌ای X_i عبارت است از:

$$f(X_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{ii}}} e^{-\frac{(X_i-\mu_i)^2}{2\sigma_{ii}}}, \quad i = 1, 2$$

توزیع شرطی $X_1|X_2$ عبارت است از:

$$f(X_1|X_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\Sigma_{11.2}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{(X_1-\mu_{1.2})^2}{2\Sigma_{11.2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_{11.2}}} e^{-\frac{(X_1-\mu_{1.2})^2}{2\sigma_{11.2}}}$$

و یا به‌اختصار آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$X_1|X_2 \sim N(\mu_{1.2}, \Sigma_{11.2}) \qquad (۱۳-۲۱)$$

۱- جزئیات این بحث در فصل دوم ارائه شده است.

۲- دترمینان Σ و معکوس آن عبارت است از:

$$|\Sigma| = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 = \sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho^2)$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{|\Sigma|}\begin{bmatrix} \sigma_{22} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{21} & \sigma_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & -\rho\sigma_{12} \\ -\rho\sigma_{12} & \frac{1}{\sigma_{22}} \end{bmatrix}$$

$\mu_{1.2}$ و $\Sigma_{11.2}$ به‌ترتیب میانگین شرطی و واریانس شرطی X_1 هستند که عبارتند از:

$$\mu_{1.2}=\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)=\mu+\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}X_2 \quad , \quad \mu=\mu_1-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\mu_2 \qquad (۱۳-۲۲)$$

$$\Sigma_{11.2}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}=\sigma_{11}-\sigma_{12}\sigma_{22}^{-1}\sigma_{21}=\sigma_{11}(1-\rho^2) \qquad (۱۳-۲۳)$$

از طرف دیگر، در روش حداکثر درستنمایی، از یک تابع درستنمایی استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال اگر مشاهدات مربوط به Y_t (نمونه تصادفی) شامل Y_1 تا Y_T باشد، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\boldsymbol{\theta})=\prod_{t=1}^{T}P(Y_t|\boldsymbol{\theta})$$

در اینجا فرض بر این است که Y_tها مستقل هستند. از طرف دیگر، یک تابع احتمال (معمولاً نرمال) برای Y_t فرض می‌شود که عبارت است از:

$$Y_t\sim \mathrm{N}(\mu_t,\sigma^2)$$

در تحلیل رگرسیون، μ_t میانگین شرطی Y_t است که تابعی از یک یا چند متغیر برون‌زا در نظر گرفته می‌شود:

$$\mu_t=E(Y_t|X_t)=\beta_0+\beta_1X_t$$

معمولاً معادله فوق را بر اساس تئوری‌های اقتصادی بنا می‌کنند.

در تحلیل سری‌های زمانی، تعریف میانگین شرطی بر پایه تئوری اقتصادی قرار ندارد، بلکه از یک مدل آماری استخراج می‌شود. به‌عنوان مثال نمونهٔ تصادفی Y_1، ... و Y_T دارای یک توزیع مشترک (تابع درستنمایی) می‌باشد[1] که احتمال مشاهده شدن مقادیر آن را نشان می‌دهد. این توزیع مشترک عبارت است از:

$$P(Y_1,\cdots,Y_T|\boldsymbol{\theta})$$

$\boldsymbol{\theta}$ پارامترهای این توزیع می‌باشد. اگر Y_tها مستقل باشند می‌توان احتمال فوق را بر حسب حاصل‌ضرب احتمال‌ها نوشت. اما در صورت مستقل نبودن، آن را برحسب احتمالات شرطی

۱- فصل دوم و نهم را ببینید.

می‌نویسیم که عبارت است از:[1]

$$P(Y_1,\ldots,Y_T;\boldsymbol{\theta})=\prod_{t=1}^{T}P(Y_t|Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots Y_1|\boldsymbol{\theta}) \qquad (۱۳-۲۴)$$

حال فرض کنید $Y_t|Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots Y_1$ توزیع نرمال دارد. برای تعمیم روابط(۱۳-۲۲) و (۱۳-۲۳)، Y_t را معادل با X_1 و بردار $[Y_{t-1}\ \ Y_{t-2}\ \cdots\ Y_1]'$ را معادل با بردار $\mathbf{x}_2$ در نظر بگیرید. در این صورت توزیع شرطی $X_1|\mathbf{x}_2$ که همان توزیع شرطی $Y_t|Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots Y_1$ می‌باشد، عبارت است از:

$$X_1|\mathbf{x}_2\sim \mathrm{N}(\mu_{1.2},\Sigma_{11.2}) \quad \text{یا} \quad Y_t|Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots Y_1\sim \mathrm{N}(\mu_{1.2},\Sigma_{11.2}) \qquad (۱۳-۲۵)$$

$\mu_{1.2}$ میانگین شرطی Y_t است که مشروط به مقادیر قبلی آن است. $\Sigma_{11.2}$ نیز واریانس شرطی Y_t می‌باشد. برای تعیین میانگین شرطی و واریانس شرطی Y_t، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا متغیر X_1 و بردارهای $\mathbf{x}_2$ و $\mathbf{z}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_1=Y_t \quad , \quad \mathbf{x}_2=\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\ Y_{t-2}\\ \vdots\\ Y_1\end{bmatrix}_{(t-1)\times 1} \quad , \quad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}X_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix}_{t\times 1}$$

۲- میانگین‌ها عبارتند از (فرض می‌کنیم که میانگین Y_t در همهٔ زمان‌ها، ثابت و یکسان است):

$$E(X_1)=E(Y_t)=\mu_1=\mu_0$$

$$E(\mathbf{x}_2)=\begin{bmatrix}E(Y_{t-1})\\ E(Y_{t-2})\\ \vdots\\ E(Y_1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\mu}_2=\begin{bmatrix}\mu_0\\ \mu_0\\ \vdots\\ \mu_0\end{bmatrix}_{(t-1)\times 1}$$

۱- در اینجا از قاعدهٔ احتمال شرطی استفاده شده است:

$$P(ABC)=P(C|AB)P(AB)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$$

با تعمیم این فرمول خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}P(Y_1,\ldots,Y_T;\boldsymbol{\theta})&=P(Y_T|Y_{T-1},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})P(Y_{T-1},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})\\ &=P(Y_T|Y_{T-1},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})P(Y_{T-1}|Y_{T-2},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})P(Y_{T-2},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})\\ &\ \vdots\\ &=P(Y_T|Y_{T-1},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})P(Y_{T-1}|Y_{T-2},\ldots,Y_1;\boldsymbol{\theta})\cdots P(Y_2|Y_1;\boldsymbol{\theta})P(Y_1|\boldsymbol{\theta})\\ &=\prod_{t=1}^{T}P(Y_t|Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots Y_1|\boldsymbol{\theta})\end{aligned}$$

$$E(\mathbf{z})=\begin{bmatrix}E(X_1)\\E(\mathbf{x}_2)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\mu}_z=\begin{bmatrix}\mu_1\\ \boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}_{t\times1}$$

۳- واریانس‌ها عبارتند از:

$$\text{var}(X_1)=E(X_1-\mu_1)^2=E(Y_t-\mu_0)^2=\Sigma_{11}=\sigma_{11}=\gamma_0$$

γ_0 واریانس Y_t است که فرض می‌کنیم در همهٔ زمان‌ها، یکسان و ثابت است.

$$E(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'=\Sigma_{22}=\begin{bmatrix}\gamma_0&\gamma_1&\cdots&\gamma_{t-2}\\ \gamma_1&\gamma_0&\cdots&\gamma_{t-3}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \gamma_{t-2}&\gamma_{t-3}&\cdots&\gamma_0\end{bmatrix}_{(t-1)\times(t-1)}$$

Σ_{22} ماتریس واریانس-کوواریانس $\mathbf{x}_2$ است که معادل با ماتریس واریانس- کوواریانس بردار $[Y_{t-1},\dots,Y_1]$ می‌باشد.[1] γ_s کوواریانس Y_t و Y_{t-s} را نشان می‌دهد. توجه شود که این کوواریانس‌ها وابسته به زمان نیستند، بلکه فقط وابسته به وقفه‌ها هستند.

$$\text{cov}(X_1,\mathbf{x}_2)=E(X_1-\mu_1)(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'=\Sigma_{12}=[\gamma_1\quad\gamma_2\quad\cdots\quad\gamma_{t-1}]_{1\times(t-1)}$$

۱- ماتریس Σ_{22} به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$E(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'=\Sigma_{22}=E\begin{bmatrix}Y_{t-1}-\mu_0\\Y_{t-2}-\mu_0\\ \vdots\\Y_1-\mu_0\end{bmatrix}[Y_{t-1}-\mu_0\quad Y_{t-2}-\mu_0\quad\cdots\quad Y_1-\mu_0]$$

$$=E\begin{bmatrix}(Y_{t-1}-\mu_0)^2&(Y_{t-1}-\mu_0)(Y_{t-2}-\mu_0)&\cdots&(Y_{t-1}-\mu_0)(Y_1-\mu_0)\\(Y_{t-2}-\mu_0)(Y_{t-1}-\mu_0)&(Y_{t-2}-\mu_0)^2&\cdots&(Y_{t-2}-\mu_0)(Y_1-\mu_0)\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\(Y_1-\mu_0)(Y_{t-1}-\mu_0)&(Y_1-\mu_0)(Y_{t-2}-\mu_0)&\cdots&(Y_1-\mu_0)^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_0&\gamma_1&\cdots&\gamma_{t-2}\\ \gamma_1&\gamma_0&\cdots&\gamma_{t-3}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \gamma_{t-2}&\gamma_{t-3}&\cdots&\gamma_0\end{bmatrix}_{(t-1)\times(t-1)}$$

در اینجا γ_{t-i} بیانگر کوواریانس بین Y در دو زمان مختلف است که فاصله آنها برابر با $t-i$ است. مثلاً γ_{t-2} کوواریانس بین Y_t و Y_2 یا بین Y_{t+4} و Y_6 یا بین Y_{t-1} و Y_1 است که در همهٔ این موارد، تفاوت اندیس‌ها (فاصلهٔ زمانی بین دو Y) برابر با $t-2$ می‌باشد.

Σ_{12} کوواریانس X_1 و $\mathbf{x}_2$ است که معادل با کوواریانس Y_t و بردار $[Y_{t-1}\quad Y_{t-2}\quad\cdots\quad Y_1]$ می‌باشد.[1]

$$\text{var}(\mathbf{z})=E(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}_z)(\mathbf{z}-\boldsymbol{\mu}_z)'=E\begin{bmatrix}(X_1-\mu_1)\\(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)\end{bmatrix}[(X_1-\mu_1)\quad(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)']$$

$$=\begin{bmatrix}(X_1-\mu_1)^2&(X_1-\mu_1)(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'\\(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)(X_1-\mu_1)&(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\ \Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{bmatrix}_{t\times t}$$

توجه شود که $\Sigma_{21}=\Sigma'_{12}$ است.

۴- با تعمیم روابط (۱۳-۲۲) و (۱۳-۲۳)، میانگین شرطی و واریانس شرطی $Y_t|Y_{t-1},\dots,Y_1$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم (توجه شود که از تبدیل $X_1|\mathbf{x}_2$ استفاده کرده‌ایم):

$$\mu_{1.2}=\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)=\mu+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{x}_2\quad,\quad\mu=\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2\qquad(۱۳-۲۶)$$

$$\Sigma_{11.2}=\Sigma_{11}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\qquad(۱۳-۲۷)$$

از آنجا که Σ_{12} بردار $1\times(t-1)$ و Σ_{22} ماتریس $(t-1)\times(t-1)$ است، لذا حاصل‌ضرب $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ یک بردار $1\times(t-1)$ می‌باشد که آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}=[\phi_1\quad\phi_2\quad\cdots\quad\phi_{t-1}]$$

حال نتایج فوق را در معادله (۱۳-۲۶) قرار می‌دهیم:

$$\mu_{1.2}=\mu+[\phi_1\quad\phi_2\quad\cdots\quad\phi_{t-1}]\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\Y_{t-2}\\ \vdots\\Y_1\end{bmatrix}=\mu+\phi_1Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}+\cdots+\phi_{t-1}Y_1\qquad(۱۳-۲۸)$$

با فرض اینکه ϕ_{p+i} برای $i=1,2,\cdots$ برابر با صفر باشد، خواهیم داشت:

۱- بردار Σ_{12} به صورت زیر حساب می‌شود:

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_1,\mathbf{x}_2)&=E(X_1-\mu_1)(\mathbf{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'=\Sigma_{12}\\&=E(Y_t-\mu_0)[Y_{t-1}-\mu_0\quad Y_{t-2}-\mu_0\quad\cdots\quad Y_1-\mu_0]\\&=[\gamma_1\quad\gamma_2\quad\cdots\quad\gamma_{t-1}]_{1\times(t-1)}\end{aligned}$$

γ_s کوواریانس Y_t و Y_{t-s} است:

$$\gamma_s=\text{cov}(Y_t,Y_{t-s})=E(Y_t-\mu_0)(Y_{t-s}-\mu_0)$$

کوواریانس‌ها وابسته به زمان نیستند و فقط وابسته به وقفه‌ها می‌باشند.

$$\mu_{1,2} = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_{t-p} Y_{t-p} \qquad (13\text{-}29)$$

از طرف دیگر، Y_t برابر با میانگین شرطی به‌علاوهٔ خطای تصادفی است:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_{1,2} + u_t \\ &= \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_{t-p} Y_{t-p} + u_t \end{aligned} \qquad (13\text{-}30)$$

مدل فوق معروف به خودرگرسیون مرتبهٔ p است که با $AR(p)$ نشان داده می‌شود. این مدل یکی از مدل‌های معروف سری‌های زمانی است که استخراج آن نیاز به هیچ تئوری اقتصادی ندارد، بلکه از یک مدل آماری و با استفاده از فروض آماری به‌دست آمده است.

به‌طورکلی دو نوع از مدل‌های سری زمانی را در اینجا بررسی می‌کنیم: یکی مدل میانگین متحرک و دیگری مدل خودرگرسیون است که اولی را با $MA(q)$ و دومی را با $AR(p)$ نشان می‌دهند. ترکیب این دو، معروف مدل‌های $ARMA(p,q)$ است که در اینجا هر یک از این آنها را بررسی خواهیم کرد.

۱۳-٤ فرایند میانگین متحرک

فرایند میانگین متحرک نوع ساده‌ای از مدل‌های سری زمانی است. فرض کنید u_t دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی است که توزیع نرمال با واریانس σ^2 و امید ریاضی صفر دارد. در این صورت متغیر Y_t را می‌توان طبق معادله زیر توصیف نمود:

$$Y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \cdots + \theta_q u_{t-q} \qquad (13\text{-}31)$$

معادله (۳۱-۱۳) موسوم به میانگین متحرک مرتبه q می‌باشد که با $MA(q)$ نشان داده می‌شود. این مدل یک ترکیب خطی از فرایند تصادفی (u_t) است.

مثال ۲-۷[1]: بیمارستانی را در نظر بگیرید که در آن u_t تعداد بیماران جدیدی باشد که در روز t به بیمارستان وارد می‌شوند. فرض کنید تعداد بیماران جدید یک متغیر تصادفی بوده که با مقادیر گذشته خود، همبستگی ندارد.

۱- ابریشمی و مهرآرا (۱۳۸۱).

اگر به‌طور متوسط، ۱۰ درصد بیماران فقط یک روز، ۵۰ درصد دو روز، ۳۰ درصد سه روز، و ۱۰ درصد چهار روز بستری شده و سپس مرخص شوند، در این صورت تعداد بیمارانی که در روز t بیمارستان را ترک می‌کنند از فرایند (۴) MA تبعیت خواهد کرد (در این مثال، ضریب u_t برابر صفر است، یعنی هیچ بیماری در همان روز ورود، ترخیص نمی‌شود):

$$Y_t = 0/1u_{t-1} + 0/5u_{t-2} + 0/3u_{t-3} + 0/1u_{t-4} + v_t$$

u_{t-1} بیانگر کسانی است که یک روز از ورود آنها به بیمارستان گذشته است. بنابراین، کسانی که روز قبل (روز $t-1$) وارد بیمارستان شده‌اند، ۱۰ درصد از آنها امروز (روز t) مرخص می‌شوند. براساس معادله فوق می‌توان تعداد بیمارانی که بیمارستان را ترک می‌کنند حداکثر برای چهار روز آینده پیش‌بینی نمود.

مثال ۳-۱۳: بنگاهی را در نظر بگیرید که متوسط سفارش و متناسب با آن، تولید روزانه‌اش ۲۰ واحد محصول است. فرض کنید تعداد سفارش جدیدی که در روز t به بنگاه می‌رسد یک متغیر تصادفی است که با u_t نشان می‌دهیم. فرض کنید که بعد از دریافت سفارش‌ها به‌طور متوسط ۵۰ درصد آنها در همان روز تولید می‌شوند. همچنین ۳۰ درصد آنها یک روز بعد از زمان دریافت سفارش تولید می‌شوند، یعنی یک روز طول می‌کشد تا تولید شوند. ۲۰ درصد آنها نیز دو روز طول می‌کشد تا تولید و تحویل شوند. در این صورت مقدار تولید که در روز t تحویل می‌شود عبارت است از:

$$Y_t = 20 + 0/5u_t + 0/3u_{t-1} + 0/2u_{t-2} + v_t$$

بدین ترتیب u_t برابر با آن تعداد از سفارشات جدید است که در روز t به بنگاه رسیده و ۵ درصد آنها در همان روز تحویل می‌شود. u_{t-1} و u_{t-2} نیز آن تعداد از سفارشاتی است که به‌ترتیب ۱ و ۲ روز از دریافت آنها می‌گذرد. از آنجا که u_{t-1} بیانگر سفارشاتی است که فقط یک روز از آنها گذشته است بنابراین فقط ۳۰ درصد آنها در روز t برآورده می‌شود. طبق این مدل می‌توان تعداد محصولات تولیدی را حداکثر برای دو روز آینده پیش بینی کرد.

در مثال ۳-۱۳ دیدیم که با استفاده از $MA(2)$ می‌توان تعداد محصولات تولیدی را حداکثر برای دو روز آینده پیش‌بینی کرد. به‌طورکلی یک سری زمانی با فرایند $MA(q)$ را فقط می‌توان برای q دورهٔ آینده، پیش‌بینی نمود. توجه شود که u_t یک متغیر تصادفی است که مقادیر آن قابل مشاهده است، ولی v_t یک متغیر تصادفی است که غیر قابل مشاهده می‌باشد.

برای بیان ساده‌تری از مدل (۱۳-۳۱) از عملگرهای وقفه استفاده می‌کنیم. طبق تعریف عملگر وقفه عبارت است از:

$$LX_t = X_{t-1} \quad , \quad L^i X_t = X_{t-i}$$

بنابراین مدل (۱۳-۳۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i} + u_t = \mu + \sum_{i=1}^{q} \theta_i L^i u_t + u_t$$

$$= \mu + \theta(L) u_t \quad ; \quad \theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_q L^q \qquad (13-32)$$

مانایی فرایند $\mathrm{MA}(q)$

فرایند میانگین متحرک، مانا است. بدین منظور می‌توان نشان داد که این فرایند شرایط مانایی را تأمین می‌کند. میانگین، واریانس و خودکواریانس‌های فرایند $\mathrm{MA}(q)$ برابر است با:

۱) $E(Y_t) = \mu$

۲) $\mathrm{var}(Y_t) = \gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2)\sigma^2 < \infty \qquad (13-33)$

۳) $\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s}) = \gamma_s = \begin{cases} (\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \theta_{s+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q \theta_{q-1})\sigma^2 \ ; & s \le q \\ 0 & ; s > q \end{cases}$

بنابراین، فرایند میانگین متحرک مرتبه q دارای امید ریاضی ثابت، واریانس و خودکواریانس ثابت می‌باشد، زیرا تابعی از t نیستند.

ضرایب خودهمبستگی فرایند $\mathrm{MA}(q)$ عبارتند از:

$$\rho_s = \frac{\theta_s + \theta_{s+1}\theta_1 + \theta_{s+2}\theta_2 + \cdots + \theta_q \theta_{q-1}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \cdots + \theta_q^2} \quad , \quad s = 1, 2, \cdots, q \qquad (13-34)$$

از آنجا که ضرایب خودهمبستگی، نزولی هستند لذا فرایند $\mathrm{MA}(q)$ مانا است.

فرایند $\mathrm{MA}(1)$

فرایند میانگین متحرک مرتبه اول را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + u_t + \theta u_{t-1} \quad , \quad u_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \qquad (13-35)$$

امید ریاضی و واریانس Y_t عبارت است از:

$$E(Y_t) = E(\mu + u_t + \theta u_{t-1}) = \mu$$

$$\gamma_0 = \mathrm{var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2$$

$$= E(u_t + \theta u_{t-1})^2 = E(u_t^2 + \theta^2 u_{t-1}^2 + \theta u_t u_{t-1})$$

$$= E(u_t^2) + \theta^2 E(u_{t-1}^2) + \theta E(u_t u_{t-1}) = \sigma^2 + \theta^2\sigma^2 + 0 = (1+\theta^2)\sigma^2$$

خودکواریانس مرتبه اول (γ_1) برابر است با:

$$\gamma_1 = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] = E[(u_t + \theta u_{t-1})(u_{t-1} + \theta u_{t-2})]$$

$$= E(u_t u_{t-1} + \theta u_{t-1}^2 + \theta u_t u_{t-2} + \theta^2 u_{t-1} u_{t-2}) = \theta E(u_{t-1}^2) = \theta\sigma^2$$

γ_s به‌ازای $s \ge 2$ برابر با صفر است. به‌عنوان مثال γ_2 برابر است با:

$$\gamma_2 = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-2}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu)] = E[(u_t + \theta u_{t-1})(u_{t-2} + \theta u_{t-3})]$$

$$= E(u_t u_{t-2} + \theta u_{t-1} u_{t-2} + \theta u_t u_{t-3} + \theta^2 u_{t-1} u_{t-3}) = 0$$

بنابراین، به‌طور خلاصه برای Y_t، داریم:

$$E(Y_t) = \mu$$

$$\gamma_0 = \mathrm{var}(Y_t) = (1+\theta^2)\sigma^2$$

$$\gamma_1 = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta\sigma^2$$

$$\gamma_s = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-s}) = 0 \quad , \quad s \ge 2$$

ضرایب خودهمبستگی نیز عبارتند از:

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta\sigma^2}{(1+\theta^2)\sigma^2} = \frac{\theta}{1+\theta^2} \qquad (13-36)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = 0 \quad , \quad s \ge 2$$

بنابراین، فرایند میانگین متحرک مرتبه اول، مانا است، زیرا ضرایب خودهمبستگی آن نزولی هستند.

مثال ۴-۱۳: فرایندمیانگین متحرک مرتبه اول به صورت زیر است:

$$Y_t = ۵ + u_t + ۰/۸u_{t-1}$$

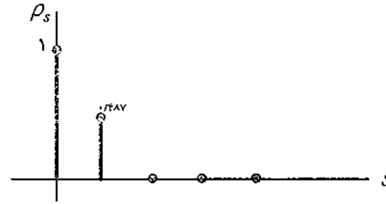
میانگین و واریانس Y_t عبارت است از:

$$E(Y_t) = ۵ \ , \ \gamma_0 = (1 + ۰/۸^2)\sigma^2 = ۱/۶۴\sigma^2$$

ضرایب خودهمبستگی نیز عبارتند از:

$$\rho_1 = \frac{۰/۸}{1 + ۰/۸^2} = ۰/۴۸۷$$

$$\rho_s = ۰ \ , \ s \geq ۲$$



فرایند MA(۲)

فرایند میانگین متحرک مرتبه دو را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} \ ; \ u_t \sim N(0, \sigma^2) \qquad (۱۳-۳۷)$$

برای این مدل، امید ریاضی و واریانس عبارتند از:

$$E(Y_t) = E(\mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2}) = \mu$$

$$\gamma_0 = \text{var}(Y_t) = E(Y_t - \mu)^2$$
$$= E(u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2})^2 = E(u_t^2 + \theta_1^2 u_{t-1}^2 + \theta_2^2 u_{t-2}^2 + \text{حاصل ضرب‌های متقاطع})$$
$$= E(u_t^2) + \theta_1^2 E(u_{t-1}^2) + \theta_2 E(u_{t-2}^2) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

زیرا امید ریاضی حاصل‌ضرب‌های متقاطع برابر با صفر می‌باشند، یعنی $\text{cov}(u_t, u_{t-s})$ برای $s \neq ۰$ برابر با صفر است.

حال با توجه به اینکه امید ریاضی حاصل‌ضرب‌های متقاطع برابر صفر است، γ_1 و γ_2 برابرند با:

$$\gamma_1 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)]$$
$$= E[(u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2})(u_{t-1} + \theta_1 u_{t-2} + \theta_2 u_{t-3})]$$
$$= E(\theta_1 u_{t-1}^2 + \theta_1\theta_2 u_{t-2}^2)$$

$$= \theta_1\sigma^2 + \theta_1\theta_2\sigma^2$$
$$= \theta_1(1 + \theta_2)\sigma^2$$

$$\gamma_2 = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-2} - \mu)]$$
$$= E[(u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2})(u_{t-2} + \theta_1 u_{t-3} + \theta_2 u_{t-4})]$$
$$= E(\theta_2 u_{t-2}^2) = \theta_2\sigma^2$$

می‌توان نشان داد که γ_s برای $s \geq ۳$ برابر با صفر است. بنابراین با خلاصه نمودن نتایج، خواهیم داشت:

$$E(Y_t) = \mu$$
$$\gamma_0 = \text{var}(Y_t) = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)\sigma^2$$
$$\gamma_1 = \text{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta_1(1 + \theta_2)\sigma^2$$
$$\gamma_2 = \text{cov}(Y_t, Y_{t-2}) = \theta_2\sigma^2$$
$$\gamma_s = \text{cov}(Y_t, Y_{t-s}) = 0 \quad , \quad s \geq ۳$$

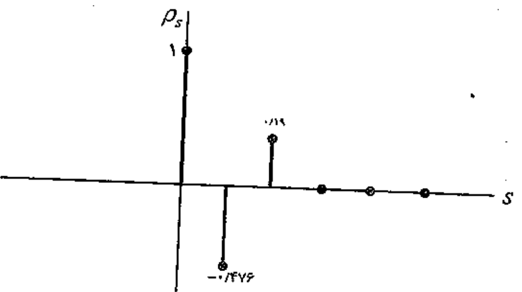
از طرف دیگر ضرایب خودهمبستگی عبارتند از:

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$
$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{\theta_1(1 + \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$$
$$\rho_2 = \frac{\gamma_2}{\gamma_0} = \frac{\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \qquad (۱۳-۳۸)$$
$$\rho_s = \frac{\gamma_s}{\gamma_0} = 0 \ , \ s \geq ۳$$

بنابراین، MA(۲) یک فرایند مانا است.

مثال ۵-۱۳: برای فرایند MA(۲) فرض کنید که $\theta_1 = -۰/۵$ و $\theta_2 = ۰/۲۵$ باشد. در این صورت ضرایب خودهمبستگی عبارتند از:

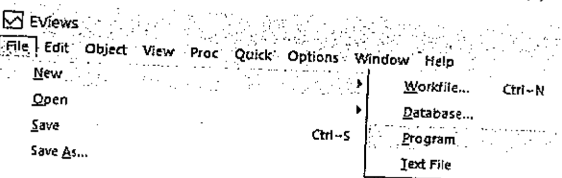
$$\rho_1 = -۰/۴۷۶$$
$$\rho_2 = ۰/۱۹۰$$
$$\rho_s = ۰ \ , \ s \geq ۳$$



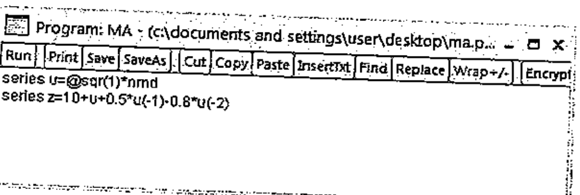
به‌طور کلی $MA(q)$ یک فرایند مانا است، زیرا با افزایش وقفه‌ها، ضرایب خودهمبستگی کاهش یافته و به صفر می‌رسند.

ایجاد فرایند MA در Eviews فایل data11 و برنامه ma.prg

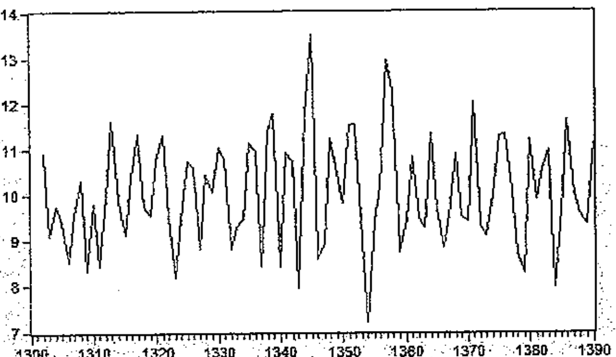
برای ایجاد یک فرایند $MA(2)$، بعد از ایجاد یک workfile، صفحه program را باز می‌کنیم:



در صفحه program، مدل مورد نظر به‌عنوان مثال معادله $Z_t = 10 + u_t + 0/5u_{t-1} - 0/8u_{t-2}$ را به صورت زیر می‌نویسیم:



برای ایجاد داده‌های Z_t، در پنجره فوق، مدل مذکور را Run می‌کنیم. بدین منظور روی منوی Run کلیک کرده که به‌دنبال آن، مقادیر متغیر Z حساب می‌شود. مقادیر به‌دست آمده برای Z در نمودار زیر ترسیم شده است.



۱۳-۵ فرایند خودرگرسیون

در یک مدل خودرگرسیون، مقدار جاری یک متغیر صرفاً وابسته به مقادیر قبلی آن به‌علاوه جملهٔ خطا می‌باشد. مدل خودرگرسیون مرتبه p که با $AR(p)$ نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + u_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + u_t \qquad (13-39)$$

با استفاده از عملگرهای وقفه، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i L^i Y_t + u_t \quad \Rightarrow (1 - \sum_{i=1}^{p} \phi_i L^i) Y_t = \mu + u_t \qquad (13-40)$$

یا

$$\phi(L) Y_t = \mu + u_t \quad ; \quad \phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p \qquad (13-41)$$

تبدیل $AR(p)$ به $MA(\infty)$

به‌منظور تبدیل $AR(p)$ به $MA(\infty)$، مدل (۱۳-۴۱) را بر $\phi(L)$ تقسیم می‌کنیم:

$$Y_t = \phi(L)^{-1} (\mu + u_t) \qquad (13-42)$$

با بسط $\phi(L)^{-1}$، به یک فرایند میانگین متحرک از مرتبه بی‌نهایت می‌رسیم[1] و لذا (۱۳-۴۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

۱- می‌توان $\phi(L)$ را به‌صورت $\cdots + 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2$ $\phi(L)^{-1} = \frac{1}{1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p} = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots$ نوشت. به‌عنوان مثال برای $AR(1)$ رابطه $\phi(L)^{-1} = \frac{1}{1 - \phi_1 L} = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots = 1 + \phi_1 L + \phi_1^2 L^2 + \cdots$ را داریم.

$$Y_t = \frac{\mu}{1-(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_p)} + \sum_{i=0}^{\infty}\theta_i u_{t-i} \qquad (۱۳\text{-}۴۳)$$

مدل (۴۳-۱۳) یک فرایند مانای $MA(\infty)$ است که ضرایب آن شامل θ_1، θ_2 و ... است. اگر با افزایش وقفه‌ها، ضرایب θ_1، θ_2 و ... کاهش یابند، به‌طوری که $\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \dots$ باشد، آنگاه مدل (۴۳-۱۳) مانا خواهد بود. بدین معنی که اثر شوک‌های تصادفی، با گذشت زمان به سمت صفر میل می‌کند. اثر شوکی که در زمان t وارد شده است برابر با θ_1 و اثر شوک وارده در زمان $t-s$ برابر با θ_s است که $\theta_s < \theta_1$ می‌باشد. با افزایش s مقدار θ_s به سمت صفر میل می‌کند.

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta u_{t-s}} = \theta_s \quad , \quad s = 0,1,2,\cdots \qquad (۱۳\text{-}۴۴)$$

امید ریاضی غیرشرطی فرایند $AR(p)$ عبارت است از:

$$E(Y_t) = \mu + \phi_1 E(Y_{t-1}) + \phi_2 (Y_{t-2}) + \cdots + \phi_p E(Y_{t-p}) + E(u_t) \qquad (۱۳\text{-}۴۵)$$

اگر Y_t مانا باشد شرط $E(Y_t) = E(Y_{t-1}) = \cdots = E(Y_{t-p})$ برقرار است و لذا امید ریاضی Y_t برابر است با:

$$E(Y_t) = \frac{\mu}{1-(\phi_1+\cdots\phi_p)} = \frac{\mu}{1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i} \qquad (۱۳\text{-}۴۶)$$

برای محاسبه تابع خودکواریانس، ابتدا از طرفین (۴۶-۱۲)، $\frac{\mu}{1-\sum\phi_i}$ را کم می‌کنیم:

$$\left(Y_t - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right) = \left(\mu - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right) + \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p}$$

عبارت داخل پرانتز را به‌صورت $\mu - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i} = -\sum\phi_i \frac{\mu}{1-\sum\phi_i} = -\phi_1 \frac{\mu}{1-\sum\phi_i} - \cdots - \phi_p \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}$ نوشته و بر اساس آن، معادله فوق را به‌صورت زیر تنظیم می‌کنیم:

$$\left(Y_t - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right) = \phi_1 Y_{t-1}\left(Y_{t-1} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right) + \cdots + \phi_p \left(Y_{t-p} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right) \qquad (۱۳\text{-}۴۷)$$

حال تابع خودکواریانس را برای وقفهٔ s به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\gamma_s = \text{cov}(Y_t, Y_{t-s}) = E\left[\left(Y_t - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\left(Y_{t-s} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\right]$$
$$= E\left[\phi_1\left(Y_{t-1} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right) + \cdots + \phi_p\left(Y_{t-p} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\right]\left[\left(Y_{t-s} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\right]$$
$$= \phi_1 E\left[\left(Y_{t-1} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\left(Y_{t-s} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\right] + \cdots + \phi_p E\left[\left(Y_{t-p} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\left(Y_{t-s} - \frac{\mu}{1-\sum\phi_i}\right)\right]$$

بنابراین، تابع خودهمبستگی مرتبه s به صورت زیر به‌دست می‌آید. این یک سیستم معادلات همزمان است که معروف به معادلات یول- واکر[1] می‌باشد:

$$\gamma_s = \phi_1\gamma_{s-1} + \phi_2\gamma_{s-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{s-p} \quad , \quad s = 1,2,\ldots,p \qquad (۱۳\text{-}۴۸)$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر γ_0، ضرایب خودهمبستگی به‌دست می‌آید:

$$\rho_s = \phi_1\rho_{s-1} + \phi_2\rho_{s-2} + \cdots + \phi_p\rho_{s-p} \quad , \quad s = 1,2,\ldots,p \qquad (۱۳\text{-}۴۹)$$

معادله فوق بیانگر یک معادله تفاضلی مرتبهٔ p است. شکل کلی جواب این نوع معادلات تفاضلی به‌صورت $c\lambda^s$ می‌باشد که اگر در معادله فوق به‌جای ρ_s قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$c\lambda^s = \phi_1 c\lambda^{s-1} + \phi_2 c\lambda^{s-2} + \cdots + \phi_p c\lambda^{s-p} \qquad (۱۳\text{-}۵۰)$$

با ضرب طرفین معادله فوق در $c\lambda^{-s+p}$ خواهیم داشت:

$$\lambda^p - \phi_1\lambda^{p-1} - \phi_2\lambda^{p-2} - \cdots - \phi_p = 0 \qquad (۱۳\text{-}۵۱)$$

معادله (۵۱-۱۳) را معادله مشخصه و ریشه‌های آن را ریشه مشخصه می‌گویند. با حل معادله فوق p ریشهٔ مشخصه شامل λ_1، λ_2 ... و λ_p به‌دست می‌آید. بنابراین، p جواب برای ρ_s به‌دست می‌آید. از آنجا که ترکیب خطی از این جواب‌ها نیز می‌تواند جواب معادله مذکور باشد، لذا خواهیم داشت:

$$\rho_s = \alpha_1 c\lambda_1^s + \alpha_2 c\lambda_2^s + \cdots + \alpha_p c\lambda_p^s \qquad (۱۳\text{-}۵۲)$$
$$= c_1\lambda_1^s + c_2\lambda_2^s + \cdots + c_p\lambda_p^s \quad , \quad s = 1,2,\cdots$$

که $c_i = \alpha_i c$ می‌باشد.

1- Yule-Walker

شرط مانایی این است که $|\lambda_i|<1$ باشد که در این صورت با افزایش وقفه‌ها (یعنی s) هر یک از عبارت‌های λ_i^s به سمت صفر میل می‌کنند و لذا ρ_s نیز با افزایش وقفه‌ها به صفر می‌رسد. در این صورت فرایند $AR(p)$ مانا خواهد بود. اما اگر یکی از ریشه‌ها مثلاً ریشه kام برابر با واحد باشد در این صورت جمله kام برابر با $c_k\lambda_k^s=c_k 1^s=c_k$ خواهد شد و لذا با افزایش s مقدار ρ_s نمی‌تواند از c_k کوچکتر شود و شرایط مانایی برقرار نخواهد بود. بنابراین، ریشه واحد دلالت بر نامانایی دارد.

فرایند $AR(1)$

فرایند خودرگرسیون مرتبه اول عبارت است از:

$$Y_t=\mu+\phi Y_{t-1}+u_t \qquad (۱۳-۵۳)$$

برای محاسبات بعدی، لازم است که فرایند $AR(1)$ را تبدیل به $MA(\infty)$ نماییم. بدین منظور مشابه آنچه که برای فرایند $AR(p)$ گفته شد، طرفین را بر $\phi(L)$ تقسیم می‌کنیم[1]:

$$(1-\phi L)Y_t=\mu+u_t \quad \Rightarrow \quad \phi(L)Y_t=\mu+u_t \;,\; \phi(L)=1-\phi L$$

$$\Rightarrow Y_t=\phi(L)^{-1}\mu+\phi(L)^{-1}u_t \qquad (۱۳-۵۴)$$

$$\Rightarrow Y_t=\frac{\mu}{1-\phi}+\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i u_{t-i}=\frac{\mu}{1-\phi}+u_t+\phi u_{t-1}+\phi^2 u_{t-2}+\cdots$$

بنابراین، اگر $1>\phi>0$ باشد؛ اولاً $AR(1)$ معادل با $MA(\infty)$ است و ثانیاً با افزایش وقفه‌ها اثرات جمله خطا بر مقدار جاری Y_t در حال کاهش است.

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta u_{t-j}}=\phi^j \;;\; j=0,1,2,\ldots \qquad (۱۳-۵۵)$$

میانگین غیرشرطی Y_t عبارت است از:

$$E(Y_t)=E(\mu+\phi Y_{t-1}+u_t)=\mu+\phi E(Y_{t-1})$$

۱- برای $\phi(L)$ روابط زیر را داریم:

$$\phi(L)^{-1}a=\frac{1}{1-\phi L}a=(1+\phi L+\phi^2 L^2+\cdots)a=(1+\phi+\phi^2+\cdots)a=\frac{a}{1-\phi}$$

$$\phi(L)^{-1}u_t=\frac{1}{1-\phi L}u_t=(1+\phi L+\phi^2 L^2+\cdots)u_t=\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i L^i u_t=\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i u_{t-i}$$

مشابه آنچه که برای $AR(p)$ حساب کردیم، می‌توان از تساوی $E(Y_t)=E(Y_{t-1})$ استفاده کرد و امید ریاضی Y_t را معادل با $\frac{\mu}{1-\phi}$ به‌دست آورد. علاوه بر این، می‌توان Y_{t-1} و امید ریاضی آن را به صورت زیر حساب نمود:

$$Y_{t-1}=\mu+\phi Y_{t-2}+u_{t-1} \;\Rightarrow\; E(Y_{t-1})=\mu+\phi E(Y_{t-2})$$

حال به‌جای $E(Y_{t-1})$ در $E(Y_t)$ قرار می‌دهیم:

$$E(Y_t)=\mu+\phi(\mu+\phi E(Y_{t-2}))$$
$$=\mu(1+\phi)+\phi^2 E(Y_{t-2})$$

اگر این جایگذاری را دوباره انجام دهیم، می‌توان $E(Y_t)$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$E(Y_t)=\mu(1+\phi+\phi^2+\cdots)+\phi^{\infty}Y$$

Y یک مقدار ثابت می‌باشد. حال اگر $|\phi|<1$ باشد، در این صورت $\phi^{\infty}=0$ بوده و لذا امید ریاضی Y_t برابر است با:

$$E(Y_t)=\mu(1+\phi+\phi^2+\cdots)=\frac{\mu}{1-\phi}$$

علاوه‌براین، می‌توان امید ریاضی Y_t را از (۱۳-۳۴) نیز حساب نمود:

$$E(Y_t)=E\left(\frac{\mu}{1-\phi}+\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i u_{t-i}\right)=\frac{\mu}{1-\phi}+\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i E(u_{t-i})=\frac{\mu}{1-\phi}$$

توجه شود که رابطه فوق در صورتی قابل تعریف است که $|\phi|<1$ باشد. واضح است که اگر $\phi=1$ باشد، عبارت فوق مبهم خواهد شد و بدان معنا است که میانگین Y_t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

برای محاسبه واریانس Y_t ابتدا معادله (۱۳-۵۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(Y_t-\frac{\mu}{1-\phi}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i u_{t-i}$$

با استفاده از رابطه فوق، واریانس Y_t عبارت است از:

$$\gamma_0 = \mathrm{var}(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^2 = E\left(Y_t - \frac{\mu}{1-\phi}\right)^2 = E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\phi^i u_{t-i}\right)^2$$

$$= E(u_t + \phi u_{t-1} + \phi^2 u_{t-2} + \cdots)^2$$

$$= E(u_t^2 + \phi^2 u_{t-1}^2 + \phi^4 u_{t-2}^2 + \cdots + \text{(حاصل ضرب‌های متقاطع)}$$

$$= E(u_t^2) + \phi^2 E(u_{t-1}^2) + \phi^4 E(u_{t-2}^2) + \cdots$$

$$= \sigma^2 + \phi^2\sigma^2 + \phi^4\sigma^2 + \cdots = (1+\phi^2+\phi^4+\cdots)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$$

زیرا امید ریاضی حاصل ضرب‌های متقاطع برابر با صفر است.

خودکوواریانس مرتبه s با استفاده از (۱۳-۴۸) و با توجه به اینکه $\phi_1 = \phi$ و $\phi_2 = \cdots = \phi_p = 0$ است، عبارت است از:

$$\gamma_s = \phi\gamma_{s-1} \tag{۱۳-۵۶}$$

با تقسیم طرفین بر γ_0 آن را بر حسب ضرایب خودهمبستگی می‌نویسیم:

$$\rho_s = \phi\rho_{s-1} \tag{۱۳-۵۷}$$

در اینجا یک معادله تفاضلی مرتبه اول داریم که جواب آن عبارت است از:

$$\rho_s = \rho_0\phi^s = \phi^s \ , \ \rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1 \tag{۱۳-۵۸}$$

بنابراین، تابع خودهمبستگی فقط وابسته به پارامتر ϕ است. اگر $|\phi| < 1$ باشد، آنگاه AR(1) مانا است و در غیر این صورت نامانا خواهد بود.

اگر $\phi = 1$ باشد، اصطلاحاً آن را ریشه واحد می‌گویند، زیرا در این حالت ریشه مشخصه برابر با $\lambda = 1$ خواهد بود. وجود ریشه واحد موجب نامانایی Y_t خواهد شد. در این حالت $\rho_s = 1$ می‌باشد و اثر شوک‌های تصادفی بر Y هرگز از بین نمی‌رود:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta u_{t-j}} = 1 \ ; \ j = 0,1,2,\ldots \tag{۱۳-۵۹}$$

به‌طور کلی هرگاه $|\phi| < 1$ باشد، فرایند AR(1) مانا و در غیر این صورت نامانا خواهد بود.

فرایند AR(2)

فرایند خودرگرسیون مرتبه دوم عبارت است از:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + u_t \tag{۱۳-۶۰}$$

فرایند AR(2) را می‌توان تبدیل به MA(∞) نمود. بدین منظور مشابه آنچه که برای فرایند AR(p) گفته شد، طرفین را بر $\phi(L)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\phi(L)Y_t = \mu + u_t \quad , \quad \phi(L) = 1 - \phi L \tag{۱۳-۶۱}$$

$$\Rightarrow Y_t = \phi(L)^{-1}(\mu + u_t)$$

ابتدا $\phi(L)^{-1}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\phi(L)^{-1} = \frac{1}{1-\phi_1 L - \phi_2 L^2} = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}$$

برای تعیین λ_1 و λ_2 از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)L + \lambda_1\lambda_2 L^2$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1$$
$$-\lambda_1\lambda_2 = \phi_2$$

با حل این دو معادله برای λ_1 و λ_2 خواهیم داشت:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

به عبارت دیگر λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادله $\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0$ می‌باشد.

حال $\phi(L)^{-1}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\phi(L)^{-1} = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1 L} - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2 L}\right) \tag{۱۳-۶۲}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(\lambda_1\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i L^i - \lambda_2\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^i L^i\right) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1} - \lambda_2^{i+1}\right)L^i$$

با جایگذاری به‌جای $\phi(L)^{-1}$، خواهیم داشت:

$$Y_t=\phi(L)^{-1}(\mu+u_t) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}\right)L^i(\mu+u_t)$$

$$=\frac{\mu}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}\right)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}\right)L^iu_t \qquad (۱۳-۶۳)$$

$$=\frac{\mu}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2}\right)+\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}\right)u_{t-i}$$

توجه شود که $\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{i+1}=\frac{\lambda}{1-\lambda}$ است. اگر از تبدیل $\theta_i=\frac{\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}}{\lambda_1-\lambda_2}$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$Y_t=\frac{\mu}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}+\sum_{i=0}^{\infty}\theta_iL^iu_t=\frac{1}{1-\phi_1-\phi_2}+\sum_{i=0}^{\infty}\theta_iu_{t-i} \qquad (۱۳-۶۴)$$

زیرا $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)=1-\phi_1-\phi_2$ است.

بنابراین، اگر λ_1 و λ_2 شرط $|\lambda_i|<1$ برقرار باشد، اولاً $AR(1)$ معادل با $MA(\infty)$ است و ثانیاً با افزایش وقفه‌ها اثرات جملهٔ خطا (شوک‌های تصادفی) بر مقدار جاری Y_t در حال کاهش است:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta u_{t-j}}=\theta_j=\frac{\lambda_1^{j+1}-\lambda_2^{j+1}}{\lambda_1-\lambda_2}\ ;\ j=0,1,2,\ldots \qquad (۱۳-۶۵)$$

میانگین غیرشرطی Y_t با استفاده از (۱۳-۶۴) عبارت است از:

$$E(Y_t)=E\left(\frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2}+\sum_{i=0}^{\infty}\theta_iu_{t-i}\right)$$

$$=\frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2}+\sum_{i=0}^{\infty}\theta_iE(u_{t-i})$$

$$=\frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2}=\frac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}$$

توجه شود که رابطه فوق در صورتی قابل تعریف است که $\lambda_i\neq1$ و به‌ویژه $|\lambda_i|<1$ باشد. واضح است که اگر $\lambda_1=1$ یا $\lambda_2=1$ و یا $\lambda_1=\lambda_2=1$ باشد، عبارت فوق مبهم خواهد شد و بدان معنا است که میانگین Y_t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

برای محاسبه واریانس Y_t ابتدا معادله (۱۳-۶۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(Y_t-\frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2}\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\theta_iu_{t-i}$$

$$\text{var}(Y_t)=E[Y_t-E(Y_t)]^2=E\left(Y_t-\frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2}\right)^2=E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\theta_iu_{t-i}\right)^2$$

$$=E(u_t+\theta_1^2u_{t-1}+\theta_2^2u_{t-2}+\cdots+\text{(حاصل ضرب‌های متقاطع)}\quad,\quad \theta_0=1$$

از آنجا که امید ریاضی حاصل‌ضرب‌های متقاطع برابر صفر است، لذا خواهیم داشت:

$$\gamma_0=\text{var}(Y_t)=E(u_t^2+\theta_1^2u_{t-1}^2+\theta_2^2u_{t-2}^2+\cdots) \qquad (۱۳-۶۶)$$

$$=(1+\theta_1^2+\theta_2^2+\cdots)\sigma^2$$

که $\theta_i=\frac{\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}}{\lambda_1-\lambda_2}$ است.

تابع خودکوواریانس مرتبه s با استفاده از (۱۳-۴۸) و با توجه به اینکه $\phi_3=\cdots=\phi_p=0$ است، عبارت است از:

$$\gamma_s=\phi_1\gamma_{s-1}+\phi_2\gamma_{s-2}\quad,\quad s=1,2,\cdots \qquad (۱۳-۶۷)$$

با تقسیم طرفین بر γ_0 آن را بر حسب ضرایب خودهمبستگی می‌نویسیم:

$$\rho_s=\phi_1\rho_{s-1}+\phi_2\rho_{s-2}\quad,\quad s=1,2,\cdots \qquad (۱۳-۶۸)$$

در اینجا یک معادله تفاضلی مرتبهٔ اول داریم که معادلهٔ مشخصه و ریشه‌های آن عبارتند از:

$$\lambda^2-\phi_1\lambda-\phi_2=0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2=\frac{\phi_1\pm\sqrt{\phi_1^2+4\phi_2}}{2} \qquad (۱۳-۶۹)$$

بنابراین، جواب معادله (۱۳-۶۸) مشابه با (۱۳-۵۲) به‌دست می‌آید که عبارت است از:

$$\rho_s=c_1\lambda_1^s+c_2\lambda_2^s \qquad (۱۳-۷۰)$$

با توجه به اینکه به ازای $s=0$ و $s=1$ روابط $\rho_0=c_1+c_2=1$ و $\rho_1=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2$ است، مقدار مقدار $c_1=\frac{\rho_1-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}$ و $c_2=-\frac{\rho_1-\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}$ به‌دست می‌آید.

شرط مانایی AR(۲) آن است که $|\lambda_i|<1$ باشد (جزئیات بیشتر در ضمیمه الف ارائه شده است).

اگر یکی از ریشه‌ها واحد باشد، می‌توان نشان داد که ρ_s به صورت زیر می‌باشد (ضمیمه الف):

$$\rho_s = c_1 + c_2\lambda_2^s \qquad (۱۳-۷۱)$$

بنابراین، در صورتی که یکی از ریشه‌ها واحد باشد، ضرایب خودهمبستگی نزولی نخواهند بود و موجب نامانایی Y_t می‌شود.

ایجاد فرایند AR در Eviews — فایل data11 و برنامه ar.prg

برای ایجاد یک فرایند AR(1)، مانند آنچه که برای MA گفته شد، صفحه program را باز می‌کنیم. در صفحه program، مدل مورد نظر را، به‌عنوان مثال $Z_t = 8 + 0/6Z_{t-1} + u_t$ با مقدار اولیه ۱۰، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

```
Program: AR - (k\econometrics-new\econometrics 6\final data\ar.prg)
Run | Print | Save | SaveAs | Cut | Copy | Paste | InsertTxt | Find | Replace | Wrap+/- | Encrypt
smpl @first @first
series z=10
smpl @first+1 @last
series z=8+0.6*z(-1)+nrnd
```

برای ایجاد داده‌های Z_t، در پنجره فوق، مدل مذکور را Run می‌کنیم.

علاوه بر این، می‌توان در سطر فرمان و با استفاده از فرمان genr، داده‌های مدل فوق را ایجاد نمود:

```
genr z=8+0.6*z(-1)+nrnd
```

توجه شود که ابتدا بایستی متغیر z را با فرمان data z ایجاد کرده و مقدار اولیه آن را برای سال ۱۳۰۰ وارد نمایید و سپس دوره نمونه را از ۱۳۰۱ تا ۱۳۹۰ قرار دهید.

مثال ۶-۱۳: مدل AR(۲) به‌صورت زیر داده شده است:

$$Y_t = 0/3Y_{t-1} + 0/4Y_{t-2} + u_t$$

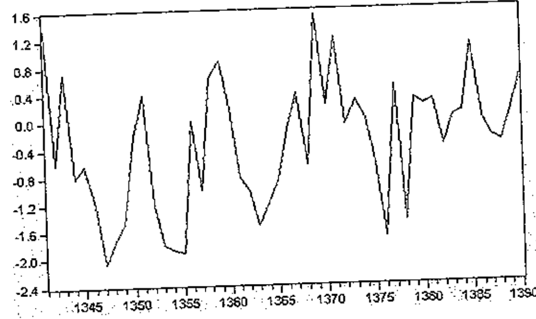
برای این مدل، ریشه‌های مشخصه عبارتند از:

$$\lambda^2 - 0/3\lambda - 0/4 = 0 \Rightarrow \lambda_1,\lambda_2 = \frac{0/3 \pm \sqrt{0/3^2 + 4(0/4)}}{2} = 0/8, -0/5$$

و ضرایب خود همبستگی عبارتند از:

$$\rho_s = c_1(0/8)^s + c_2(-0/5)^s$$

چون ریشه‌های مشخصه کوچکتر از واحد هستند، لذا Y_t مانا است. مقادیر Y_t را می‌توان با فرمان genr y=0.3*y(-1)+.4*y(-2)+nrnd در Eviews ایجاد نمود. برای ایجاد داده‌ها مقادیر اولیه برابر با $Y_1 = Y_2 = 1$ در نظر گرفته شده است.



Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.337	0.337	6.0251	0.014
		2	0.357	0.274	12.911	0.002
		3	-0.041	-0.268	13.002	0.005
		4	-0.086	-0.137	13.422	0.009
		5	-0.132	0.046	14.431	0.013
		6	-0.058	0.057	14.629	0.023
		7	-0.062	-0.065	14.860	0.038
		8	0.202	0.261	17.383	0.026
		9	0.036	-0.093	17.464	0.042
		10	0.164	-0.020	19.207	0.038
		11	0.038	0.079	19.303	0.056

مثال ۷-۱۳: مدل AR(۲) به صورت زیر داده شده است:

$$Y_t = 0/5Y_{t-1} + 0/5Y_{t-2} + u_t$$

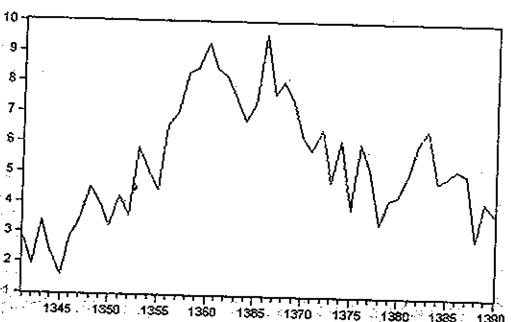
برای این مدل، ریشه‌های مشخصه عبارتند از:

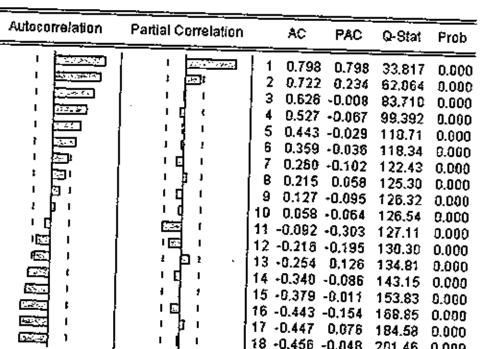
$$\lambda^{۲}-۰/۵\lambda-۰/۵=۰ \Rightarrow \lambda_{۱},\lambda_{۲}=\frac{۰/۵\pm\sqrt{۰/۵^{۲}+۴(۰/۵)}}{۲}=۱,-۰/۵$$

و ضرایب خود همبستگی عبارتند از:

$$\rho_s=c_{۱}+c_{۲}(-۰/۵)^s$$

چون یکی از ریشه‌های مشخصه برابر با واحد است، لذا Y_t نامانا است. مقادیر Y_t را می‌توان با فرمان genr y=0.5*y(-1)+.5*y(-2)+nrnd در Eviews ایجاد نمود. برای ایجاد داده‌ها مقادیر اولیه برابر با $Y_{۱}=Y_{۲}=۱$ در نظر گرفته شده است.





	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.798	0.798	33.817	0.000
2	0.722	0.234	62.064	0.000
3	0.626	-0.008	83.710	0.000
4	0.527	-0.067	99.392	0.000
5	0.443	-0.029	110.71	0.000
6	0.359	-0.036	118.34	0.000
7	0.260	-0.102	122.43	0.000
8	0.215	0.058	125.30	0.000
9	0.127	-0.095	126.32	0.000
10	0.058	-0.064	126.54	0.000
11	-0.092	-0.303	127.11	0.000
12	-0.216	-0.195	130.30	0.000
13	-0.254	0.126	134.81	0.000
14	-0.340	-0.086	143.15	0.000
15	-0.379	-0.011	153.83	0.000
16	-0.443	-0.154	168.85	0.000
17	-0.447	0.076	184.58	0.000
18	-0.456	-0.048	201.46	0.000

مثال ۸-۱۳: مدل AR(۲) به صورت زیر داده شده است:

$$Y_t=۲Y_{t-۱}-Y_{t-۲}+u_t$$

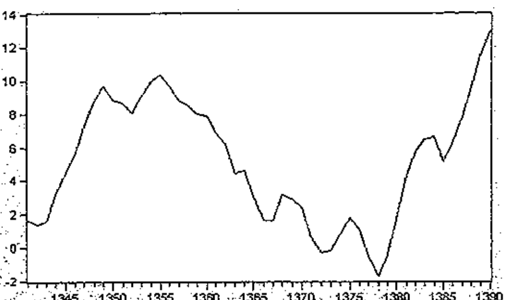
برای این مدل، ریشه‌های مشخصه عبارتند از:

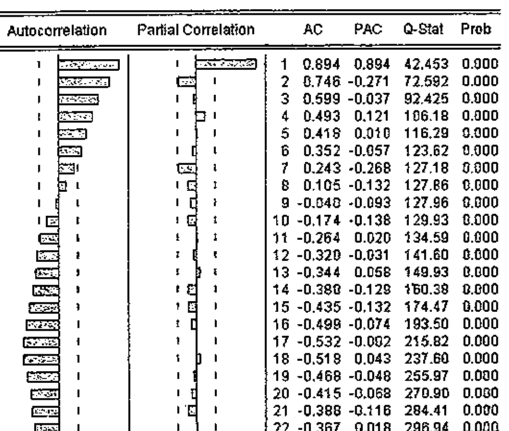
$$\lambda^{۲}-۲\lambda+۱=۰ \Rightarrow \lambda_{۱},\lambda_{۲}=\frac{۲\pm\sqrt{۲^{۲}+۴(-۱)}}{۲}=۱$$

و ضرایب خودهمبستگی عبارتند از:

$$\rho_s=c_{۱}+c_{۲}$$

چون ریشه‌های مشخصه برابر با واحد هستند، لذا Y_t ناماناست. مقادیر Y_t را می‌توان با فرمان genr y=2*y(-1)-y(-2)+nrnd در Eviews ایجاد نمود. برای ایجاد داده‌ها مقادیر اولیه برابر با $Y_{۱}=Y_{۲}=۱$ در نظر گرفته شده است.





	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.894	0.894	42.453	0.000
2	0.746	-0.271	72.592	0.000
3	0.599	-0.037	92.425	0.000
4	0.493	0.121	106.18	0.000
5	0.418	0.010	116.29	0.000
6	0.352	-0.057	123.62	0.000
7	0.243	-0.268	127.18	0.000
8	0.105	-0.132	127.86	0.000
9	-0.040	-0.093	127.96	0.000
10	-0.174	-0.138	129.93	0.000
11	-0.264	0.020	134.59	0.000
12	-0.320	-0.031	141.60	0.000
13	-0.344	0.058	149.93	0.000
14	-0.380	-0.129	160.38	0.000
15	-0.435	-0.132	174.47	0.000
16	-0.499	-0.074	193.50	0.000
17	-0.532	-0.002	215.82	0.000
18	-0.518	0.043	237.60	0.000
19	-0.468	-0.048	255.97	0.000
20	-0.415	-0.068	270.90	0.000
21	-0.388	-0.116	284.41	0.000
22	-0.367	0.018	296.94	0.000

۱۳-۶ قضیه تجزیه ولد[1]

قضیه تجزیه ولد بیان می‌کند که هر سری زمانی مانا را می‌توان به‌صورت مجموع دو فرایند غیرمرتبط تجزیه نمود که یکی کاملاً قطعی (غیرتصافی) و دیگری کاملاً تصادفی است که در واقع همان MA(∞) است. به‌عبارت ساده‌تر مدل AR(p) که بدون جمله ثابت باشد، همان MA(∞) است. این مفهوم برای استخراج تابع خودهمبستگی (AC) مهم است.

قبلاً دیدیم که فرایند AR(p) را می‌توان به‌صورت $\phi(L)Y_t = u_t$ نوشت:

$$Y_t = \phi(L)^{-1}(\mu + u_t) = \phi(L)^{-1}\mu + \phi(L)^{-1}u_t$$
$$= \frac{\mu}{1-(\phi_1+\phi_2+\cdots+\phi_p)} + \sum_{i=0}^{\infty}\theta_i u_{t-i} \ , \quad \theta_0 = 1 \qquad (۱۳\text{-}۷۲)$$

بدین ترتیب اگر فرایند AR(p) مانا باشد، قابل تبدیل به فرایند MA(∞) است که فرایند MA نیز همواره مانا است.

خودکوواریانس‌ها و ضرایب خودهمبستگی را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم (معادله ۴۸-۱۳):

$$\gamma_s = \text{cov}(Y_t, Y_{t-s}) = \phi_1\gamma_{s-1} + \phi_2\gamma_{s-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{s-p} \ , \quad s = 1,2,\ldots,p \qquad (۱۳\text{-}۷۳)$$

با تقسیم طرفین بر γ_0 خواهیم داشت:

$$\rho_s = \phi_1\rho_{s-1} + \phi_2\rho_{s-2} + \cdots + \phi_p\rho_{s-p} \ , \quad s = 1,2,\ldots,p \qquad (۱۳\text{-}۷۴)$$

این یک معادله تفاضلی خطی مرتبه pام است که جواب آن را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم (معادله ۴۹-۱۳):

$$\rho_s = c_1\lambda_1^s + c_2\lambda_2^s + \cdots + c_p\lambda_p^s \qquad (۱۳\text{-}۷۵)$$

دیدیم که مانایی فرایند AR(p) مستلزم این است که $|\lambda_i| < 1$ باشد، در این صورت با افزایش وقفه‌ها (یعنی s)، λ_i^s به سمت صفر میل می‌کند و لذا ρ_s نیز با افزایش وقفه‌ها به صفر می‌رسد. در این صورت فرایند AR(p) مانا خواهد بود. بنابراین، هر فرایند AR مانا را اولاً می‌توان تبدیل به MA نمود و ثانیاً ضرایب خودهمبستگی آن به‌صورت هندسی، نزولی است.

1- Wold's decomposition theorem

۱۳-۷ ضرایب خودهمبستگی جزئی

ضرایب خودهمبستگی جزئی (PAC)[1] که با ρ_{kk} نشان داده می‌شود بیانگر همبستگی بین مشاهدات k دورهٔ پیشین و مشاهدات دوره جاری است که در آن اثر مشاهدات بین دوره $t\text{-}k$ و t کنترل (حذف) شده باشد. به‌عبارت دیگر همبستگی بین Y_t و Y_{t-k} است که اثرات $Y_{t-(k-1)}$، $Y_{t-(k-2)}$، ... و Y_{t-1} را حذف کرده باشیم. به‌عنوان مثال تابع خودهمبستگی جزئی با ۳ وقفه بیانگر همبستگی بین Y_t و Y_{t-3} است که در آن، اثرات Y_{t-1} و Y_{t-2} کنترل شده است.

$$Y_{t-2} = \phi_2 Y_{t-3} + u_{t-2}$$
$$Y_{t-1} = \phi_1 Y_{t-2} + u_{t-1}$$
$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + u_t$$

در این مدل، هیچ ارتباط مستقیمی بین Y_{t-2} و Y_t وجود ندارد. لذا ضریب خودهمبستگی جزئی بین این دو، صفر است. اما ضریب خودهمبستگی برابر صفر نخواهد بود، زیرا Y_{t-2} از طریق Y_{t-1} و Y_{t-2} بر Y_t اثر می‌گذارد.

$$Y_{t-2} = \phi_1 Y_{t-3} + u_{t-2}$$
$$Y_{t-1} = \phi_1 Y_{t-2} + u_{t-1}$$
$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + u_t$$

واضح است که اگر $k = 1$ باشد، تابع خودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزئی برابرند، زیرا هیچ مشاهده‌ای بین آنها وجود ندارد. بنابراین $\rho_1 = \rho_{11}$ است. اما برای وقفهٔ ۲ رابطه زیر برقرار است:[2]

$$\rho_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} \qquad (۱۳\text{-}۷۶)$$

برای وقفه‌هایی که بیشتر از ۲ باشند، فرمول‌های پیچیده‌تری وجود دارد که معمولاً توسط نرم‌افزارهایی مانند Eviews محاسبه می‌شوند.

1- partial autocorrelation

۲- فصل چهارم و پنجم را ببینید.

در فرایند خودرگرسیون مرتبهٔ p ارتباط مستقیمی بین Y_t و Y_{t-s} به‌ازای $s \le p$ وجود دارد، اما برای $s > p$ ارتباط مستقیمی وجود ندارد. به‌عنوان مثال فرایند AR(۳) را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + u_t$$

در این مدل، ارتباط مستقیمی بین Y_t و Y_{t-1}، بین Y_t و Y_{t-2} و همچنین بین Y_t و Y_{t-3} وجود دارد، اما هیچ ارتباط مستقیمی بین Y_t و Y_{t-s} برای $s > 3$ وجود ندارد. ازاین‌رو ضرایب خودهمبستگی جزئی برای وقفه‌هایی که کمتر از وقفهٔ مدل (p) باشند (یعنی $s \le p$)، غیرصفر است و برای وقفه‌هایی که بیشتر از وقفه مدل باشند (یعنی $s > p$) صفر خواهند بود. در مثال فوق، ضرایب خودهمبستگی جزئی مرتبهٔ ۱، ۲ و ۳ غیرصفر و مرتبه‌های بالاتر از ۳، برابر با صفر می‌باشند.

نتیجه کلی بحث فوق برای فرایند $AR(p)$ این است که ضرایب خود همبستگی جزئی تا مرتبهٔ p غیر صفر هستند و بعد از آن برابر با صفر خواهند بود.

حال سؤال این است که ماهیت تابع خودهمبستگی جزئی برای فرایند میانگین متحرک چگونه است؟ برای یافتن ضرایب خودهمبستگی جزئی در فرایند MA، ابتدا بایستی آن را تبدیل به AR کرده و سپس درخصوص ضرایب خودهمبستگی جزئی آن بحث نمود. بنابراین، اگر فرایند MA قابل تبدیل به AR باشد، امکان محاسبه و بررسی ضرایب خودهمبستگی جزئی وجود خواهد داشت. نتیجهٔ کلی این بحث آن است که مادامی که فرایند $MA(q)$ معکوس‌پذیر باشد می‌توان آن را به‌صورت $AR(\infty)$ نوشت و ضرایب خودهمبستگی جزئی آن را استخراج نمود. بنابراین در اینجا نیاز به تعریف معکوس‌پذیری داریم.

۱۳-۸ معکوس‌پذیری فرایند $MA(q)$

معکوس‌پذیری فرایند MA بدان معنا است که می‌توان آن را تبدیل به فرایند AR نمود. برای تبدیل فرایند $MA(q)$ به $AR(\infty)$ لازم است که قدرمطلق ریشه‌های معادله مشخصهٔ آن کوچکتر از ۱ باشند. این بحث را ابتدا برای فرایند میانگین متحرک مرتبه اول مطرح می‌کنیم.

معکوس‌پذیری MA(۱)

فرایند MA(۱) را به‌صورت (۱۳-۵۷) در نظر بگیرید. برای سادگی، ضریب μ حذف شده است و یا می‌توان آن را به سمت راست برده و Y_t را بر حسب انحراف از میانگین، درنظر گرفت.

$$Y_t = u_t + \theta u_{t-1} \qquad (۱۳-۷۷)$$

برای تبدیل MA(۱) به $AR(\infty)$ از عملگرهای وقفه استفاده می‌کنیم:

$$Y_t = u_t + \theta u_t = (1+\theta L)u_t = \theta(L)u_t \ ; \ \theta(L) = 1+\theta L \qquad (۱۳-۷۸)$$

طرفین را بر $\theta(L)$ یا $(1+\theta L)$ تقسیم کرده و برای سادگی از تبدیل $\phi = -\theta$ استفاده می‌کنیم:

$$\theta(L)^{-1}Y_t = u_t \ \Rightarrow\ \frac{1}{1+\theta L}Y_t = u_t \ \Rightarrow\ \frac{1}{1-\phi L}Y_t = u_t \ , \ \phi = -\theta \qquad (۱۳-۷۹)$$

با توجه به اینکه $\theta(L)^{-1} = \frac{1}{1-\phi L} = 1+\phi L + \phi^2 L^2 + \cdots$ است، خواهیم داشت:

$$(1+\phi L + \phi^2 L^2 + \cdots)Y_t = u_t$$

$$Y_t + \sum_{i=1}^{\infty}\phi^i L^i Y_t = u_t \ \Rightarrow\ Y_t + \sum_{i=1}^{\infty}\phi^i Y_{t-i} = u_t \qquad (۱۳-۸۰)$$

$$Y_t + \phi Y_{t-1} + \phi^2 Y_{t-2} + \cdots = u_t$$

واضح است که اگر $|\phi| < 1$ باشد در این صورت $|\phi| < 1$ است و لذا فرایند $AR(\infty)$ مانا خواهد بود. بنابراین، مانایی MA معادل با $|\theta| < 1$ است که منجر به معکوس‌پذیری $\theta(L)$ می‌شود و این نیز موجب مانایی $AR(\infty)$ می‌گردد.

معکوس‌پذیری MA(۲)

فرایند میانگین متحرک مرتبه ۲ را در نظر بگیرید:

$$Y_t = u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} \qquad (۱۳-۸۱)$$

که با استفاده از عملگر وقفه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y_t = u_t + \theta_1 L u_t + \theta_2 L^2 u_t$$
$$= (1+\theta_1 L + \theta_2 L^2)u_t = \theta(L)u_t \ , \ \theta(L) = 1+\theta_1 L + \theta_2 L^2$$

با ضرب طرفین در $\theta(L)^{-1}$، خواهیم داشت:

$$\theta(L)^{-1}Y_t = u_t \qquad (۱۳-۸۲)$$

حال می‌توان $\theta(L)^{-1}$ را به‌صورت زیر، تجزیه نمود:

$$\theta(L)^{-1} = \frac{1}{1+\theta_1 L + \theta_2 L^2} = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)}$$

برای تعیین λ_1 و λ_2 از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1+\theta_1 L + \theta_2 L^2 = (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L) = 1-(\lambda_1+\lambda_2)L + \lambda_1\lambda_2 L^2$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$-(\lambda_1+\lambda_2)=\theta_1$$
$$\lambda_1\lambda_2=\theta_2$$

با حل این دو معادله برای λ_1 و λ_2 خواهیم داشت:

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{-\theta_1\pm\sqrt{\theta_1^2-4\theta_2}}{2} \qquad (13\text{-}83)$$

به عبارت دیگر λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادله $\lambda^2+\theta_1\lambda+\theta_2=0$ می‌باشد.

حال $\theta(L)^{-1}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\theta(L)^{-1}&=\frac{1}{(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)}=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_1L}-\frac{\lambda_2}{1-\lambda_2L}\right)\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1\frac{1}{1-\lambda_1L}-\lambda_2\frac{1}{1-\lambda_2L}\right)\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\lambda_1\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^iL^i-\lambda_2\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_2^iL^i\right)\\&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}\right)L^i\end{aligned} \qquad (13\text{-}84)$$

با جایگذاری به‌جای $\theta(L)^{-1}$ در (۸۲-۱۳)، خواهیم داشت:

$$\theta(L)^{-1}Y_t=u_t \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}\right)L^iY_t=u_t$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\phi_iL^iY_t=u_t \quad , \quad \phi_i=\frac{\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}}{\lambda_1-\lambda_2} \qquad (13\text{-}85)$$

با توجه به اینکه $\phi_0=1$ و $L^iY_t=Y_{t-i}$ است، خواهیم داشت:

$$Y_t+\phi Y_{t-1}+\phi^2Y_{t-2}+\cdots=u_t$$

بدین ترتیب MA(۲) تبدیل به AR(∞) می‌شود. این تبدیل، به‌شرطی برقرار است که $\theta(L)$ معکوس‌پذیر باشد و شرط اینکه $\theta(L)$ معکوس‌پذیر باشد این است که $|\lambda_i|<1$ باشد. بدیهی است که ϕ_iها روند نزولی دارند، زیرا با توجه به $|\lambda_j|<1$، با افزایش وقفه‌ها (یعنی با افزایش i) مقدار $\phi_i=\frac{\lambda_1^{i+1}-\lambda_2^{i+1}}{\lambda_1-\lambda_2}$ کاهش می‌یابد و این موجب می‌شود تا ضرایب خودهمبستگی دارای روند نزولی باشند.

آنچه که از بحث معکوس‌پذیری فرایند MA نتیجه می‌شود این است که؛ فرایند MA بیانگر همبستگی مستقیم بین مقدار جاری Y و تمامی مقادیر قبلی آن است. لذا تابع خودهمبستگی جزئی برای مدل MA(q) حالت نزولی دارد و یکباره به صفر نمی‌رسد. بنابراین می‌توان گفت که AC برای فرایند AR شکل یکسانی با PAC برای فرایند MA دارد و AC برای فرایند MA شکل یکسانی با PAC برای فرایند AR دارد.

۹-۱۳ فرایند ARMA

با ترکیب AR(p) و MA(q)، مدل ARMA(p,q) به‌دست می‌آید. چنین مدلی بیان می‌کند که مقدار جاری Y وابسته به مقادیر قبلی خودش و مقادیر جاری و گذشته متغیر تصادفی u_t می‌باشد. شکل کلی این مدل عبارت است از:

$$\begin{aligned}&\phi(L)Y_t=\mu+\theta(L)u_t\\&\phi(L)=1-\phi_1L-\phi_2L^2-\cdots-\phi_pL^p\\&\theta(L)=1+\theta_1L+\theta_2L^2+\cdots+\theta_qL^q\end{aligned} \qquad (13\text{-}86)$$

و لذا Y_t برابر است با:

$$\begin{aligned}Y_t=\mu&+\phi_1Y_{t-1}+\phi_2Y_{t-2}+\cdots+\phi_pY_{t-p}\\&+u_t+\theta_1u_{t-1}+\theta_2u_{t-2}+\cdots+\theta_qu_{t-q}\end{aligned} \qquad (13\text{-}87)$$

توجه شود که فروض زیر برقرار است:

$$E(u_t)=0 \ , \ E(u_t^2)=\sigma^2 \ , \ E(u_tu_s)=0 \ , \ t\neq s \qquad (13\text{-}88)$$

میانگین Y_t برابر است با:

$$E(Y_t)=\frac{\mu}{1-\phi_1-\phi_2-\cdots-\phi_p} \qquad (13\text{-}89)$$

ویژگی‌های مدل ARMA ترکیبی از ویژگی مدل‌های AR و MA است. به‌ویژه اینکه تابع خودهمبستگی جزئی در اینجا از اهمیت خاصی برخوردار است. توجه شود که AC فقط می‌تواند مدل خودرگرسیون محض را از مدل میانگین متحرک محض متمایز کند. به‌عبارت دیگر برای تشخیص اینکه یک سری زمانی از فرایند MA تبعیت می‌کند یا از فرایند AR، می‌توان از AC استفاده نمود. از طرف دیگر چون فرایند ARMA دارای AC نزولی است، لذا PAC را می‌توان برای تمایز بین فرایند AR و ARMA استفاده نمود. AR(p) یک تابع خودهمبستگی نزولی دارد اما

تابع خودهمبستگی جزئی آن بعد از وقفه p به صفر می‌رسد، در حالی که تابع خودهمبستگی جزئی برای فرایند ARMA نزولی است.

ویژگی فرایندهای AR، MA و ARMA در جدول ۱-۱۳ خلاصه شده است.

جدول ۱-۱۳: ویژگی فرایندهای ARMA

فرایند	خودهمبستگی (AC)	خودهمبستگی جزئی (PAC)	مرتبه
MA(q)		نزولی	q= تعداد ضرایب خودهمبستگی که غیرصفر هستند.
AR(p)	نزولی		p= تعداد ضرایب خودهمبستگی جزئی که غیرصفر هستند.
ARMA(p,q)	نزولی	نزولی	

در مدل‌های ARMA تابع خودهمبستگی ترکیبی از رفتار AR و MA را نشان می‌دهد. اما بعد از وقفه q، تابع خودهمبستگی با مدل AR(p) یکسان می‌شود، به‌طوری که در بلندمدت، قسمت AR نقش مسلط را پیدا می‌کند. استخراج تابع خودهمبستگی و تابع خودهمبستگی جزئی برای فرایند ARMA نیاز به روش جدیدی ندارد و مشابه فرایندهای MA و AR می‌باشد.

۱۰-۱۳ مدل سازی ARMA : روش باکس- جنکینز

باکس و جنکینز (۱۹۷۶) اولین کسانی بودند که روشی را برای تخمین مدل‌های ARMA ارائه نمودند. روش آنها یک روش عملی است که دارای سه مرحله تشخیص، تخمین و بازبینی است. این روش عمدتاً از رفتار ضرایب خودهمبستگی و ضرایب خودهمبستگی جزئی استفاده می‌کند.

مرحله اول: تشخیص

تشخیص و شناسایی مدل‌های ARMA به معنی تعیین مرتبهٔ مدل می‌باشد. مهمترین ابزار برای تشخیص مرتبهٔ مدل، استفاده از تابع خودهمبستگی و خودهمبستگی جزئی است. در بخش‌های قبلی AC و PAC معرفی شدند اما در اینجا آنها را بر اساس مشاهدات نمونه بایستی حساب نمود و

ترسیم کرد. برای محاسبه AC از ρ_k و برای محاسبه PAC از ρ_{kk} استفاده می‌شود. برای مشاهدات نمونه‌ای می‌توان ضرایب خودهمبستگی را با استفاده از نرم افزار Eviwes محاسبه نمود. به‌هرحال مرحله تشخیص بر مبنای مقادیر AC و PAC قرار دارد و معمولاً تشخیص دقیق مرتبه ARMA کاری پیچیده و دشوار است. چگونگی تشخیص مرتبه ARMA و نحوه محاسبه AC و PAC قبلاً بحث گردید.

مرحله دوم: برآورد

برآورد مدل عمدتاً وابسته به تشخیص مدل در مرحله اول است. مدل را می‌توان با روش OLS یا روش‌های دیگری مانند حداکثر درستنمایی برآورد نمود. به هرحال برآورد مدل را می‌توان با استفاده از نرم افزارهایی مانند Eviwes انجام داد. در اینجا برآورد فرایند ARMA را برای نرخ هفتگی قیمت سهام در بورس تهران با استفاده از Eviews بررسی می‌کنیم.

برآورد مدل‌های ARMA در Eviews — فایل data4

در اینجا مدل ARMA را برای نرخ رشد هفتگی قیمت سهام در بورس تهران طی دوره ۸۲-۱۳۸۰ برآورد می‌کنیم. فرض کنید بر اساس بررسی رفتار AC و PAC به این نتیجه رسیدیم که بایستی از فرایند AR(2) استفاده کنیم. در این صورت با فرمان زیر این مدل را برآورد می‌کنیم:

LS GSPC AR(1) AR(2)

نتایج حاصله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: Least Squares
Date: 02/01/11 Time: 06:26
Sample (adjusted): 4 202
Included observations: 199 after adjustments
Convergence achieved after 3 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.794299	0.241895	3.283658	0.0012
AR(1)	0.169450	0.066726	2.539490	0.0119
AR(2)	0.355093	0.066708	5.323122	0.0000

R-squared	0.186221	Mean dependent var	0.806038
Adjusted R-squared	0.177917	S.D. dependent var	1.789170
S.E. of regression	1.622218	Akaike info criterion	3.820427
Sum squared resid	515.7921	Schwarz criterion	3.870075
Log likelihood	-377.1325	Hannan-Quinn criter.	3.840520
F-statistic	22.42583	Durbin-Watson stat	2.031626
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted AR Roots	.69	-.52

توجه شود که مدل AR(2) را می‌توان با فرمان زیر نیز برآورد نمود، زیرا هیچ تفاوتی با هم ندارند:

LS GSP C GSP(-1) GSP(-2)

حال اگر به‌جای AR(2) به این نتیجه می‌رسیدیم که بایستی از ARMA(1,1) استفاده کنیم، در این صورت مدل مورد نظر ترکیبی از AR(1) و MA(1) است که با فرمان زیر قابل برآورد است:

LS GSP C AR(1) MA(1)

نتایج حاصله عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE\Burse

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: Least Squares
Date: 02/01/11 Time: 08:24
Sample (adjusted): 3 202
Included observations: 200 after adjustments
Convergence not achieved after 500 iterations
Backcast: 2

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.794609	0.259990	3.056300	0.0026
AR(1)	0.794688	0.099620	7.977172	0.0000
MA(1)	-0.550142	0.136445	-4.031959	0.0001

R-squared	0.137851	Mean dependent var	0.804018
Adjusted R-squared	0.129098	S.D. dependent var	1.784897
S.E. of regression	1.665704	Akaike info criterion	3.873259
Sum squared resid	546.5904	Schwarz criterion	3.922734
Log likelihood	-384.3259	F-statistic	15.74936
Durbin-Watson stat	2.196145	Prob(F-statistic)	0.000000

Inverted AR Roots	.79
Inverted MA Roots	.55

توجه شود که در پایین هر جدول معکوس ریشه‌های معادله مشخصه داده شده است که بایستی قدر مطلق آنها حتماً کوچکتر از ۱ باشد تا متغیر مورد نظر مانا باشد.

در حالت کلی می‌توان مدل ARMA(p,q) را با فرمان زیر برآورد نمود:

LS Y C AR(1 to p) MA(1 to q)

مرحله سوم: بازبینی

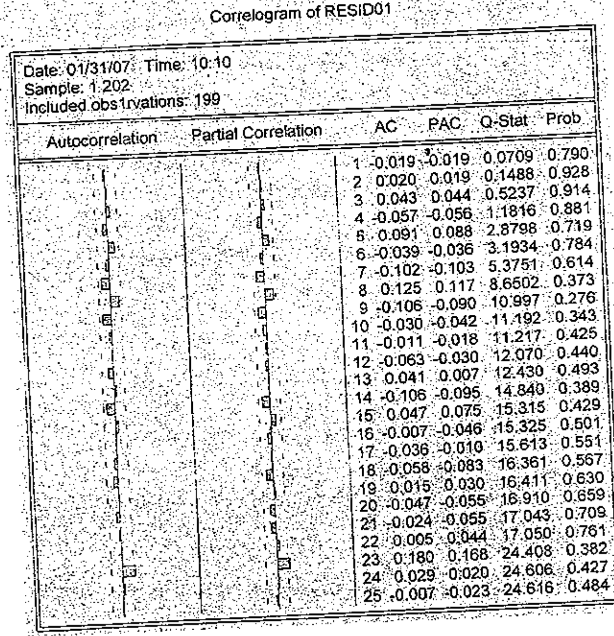
این مرحله، مستلزم کنترل و بررسی مجدد مدل است. یعنی تعیین کنیم که آیا مدل مورد نظر کفایت می‌کند یا نه. باکس و جنکینز دو روش را مطرح می‌کنند: یکی برآورد مدل با افزودن مرتبه AR و MA می‌باشد. اگر مدل شناسایی شده در مرحله ۱ کفایت کند، در این صورت افزودن مرتبه AR و MA هیچ کمکی نمی‌کند و معنی‌دار نخواهند بود. روش دیگر، بازبینی باقیمانده‌ها است. در اینجا بازبینی باقیمانده‌ها به معنی کنترل باقیمانده است که آیا شواهدی دالّ بر وابستگی

خطی وجود دارد یا نه. بدین منظور بایستی AC و PAC را برای باقیمانده‌ها محاسبه و معنی‌دار بودن آنها را بررسی نمود. معمولاً در اغلب موارد از بررسی باقیمانده‌ها استفاده می‌شود.

بازبینی مدل با استفاده از Eviews

فایل data4

برای نرخ رشد هفتگی شاخص قیمت سهام در بورس تهران، قبلاً مدل AR(2) را برآورد کردیم. حال خطاهای آن را حساب می‌کنیم. برای محاسبه خطاها (باقیمانده‌ها)، در پنجره‌ای که نتایج تخمین مدل AR(2) نشان داده می‌شود ابتدا از طریق Make Proc → Residual Series خطاها را حساب می‌کنیم. سپس پنجره باقیمانده‌ها باز می‌شود. در این پنجره از طریق View → Correlogram می‌توان ضرایب خودهمبستگی را برای باقیمانده‌ها حساب نمود که نتایج آن عبارت است از:



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.019	-0.019	0.0709	0.790
2	0.020	0.019	0.1488	0.928
3	0.043	0.044	0.5237	0.914
4	-0.057	-0.056	1.1816	0.881
5	0.091	0.088	2.8798	0.719
6	-0.039	-0.036	3.1934	0.784
7	-0.102	-0.103	5.3751	0.614
8	0.125	0.117	8.6502	0.373
9	-0.106	-0.090	10.997	0.276
10	-0.030	-0.042	11.192	0.343
11	-0.011	-0.018	11.217	0.425
12	-0.063	-0.030	12.070	0.440
13	0.041	0.007	12.430	0.493
14	-0.106	-0.095	14.840	0.389
15	0.047	0.075	15.315	0.429
16	-0.007	-0.046	15.325	0.501
17	-0.036	-0.010	15.613	0.551
18	-0.058	-0.083	16.361	0.567
19	0.015	0.030	16.411	0.630
20	-0.047	-0.055	16.910	0.659
21	-0.024	-0.055	17.043	0.709
22	0.005	0.044	17.050	0.761
23	0.180	0.168	24.408	0.382
24	0.029	-0.020	24.606	0.427
25	-0.007	-0.023	24.616	0.484

در اینجا تحلیل نتایج مانند تحلیل ضرایب خودهمبستگی برای متغیر GSP می‌باشد. در جدول فوق چون هیچ ضریبی خارج از مرز (نقطه‌چین) قرار ندارد، لذا تمامی ضرایب خودهمبستگی تفاوت متناداری از صفر ندارند. همچنین آماره Q نیز چون کوچک است و از مقادیر جدول χ^2 کوچکتر می‌باشند لذا ضرایب خودهمبستگی تفاوت معناداری از صفر ندارند. مقادیر احتمال‌ها نیز در ستون آخر بزرگتر از ۰/۰۵ هستند که بیانگر صفر بودن ضرایب خودهمبستگی است. اگر ضرایب خودهمبستگی برای خطاها، صفر نباشند در این صورت مدل مورد نظر (در اینجا AR(2)) دارای اشکال بوده و باید مدل دیگری را جایگزین آن نمود.

۱۳-۱۱ استفاده از معیارهای اطلاعات برای انتخاب مدل ARMA

همان‌طور که اشاره شد، در مرحله تشخیص معمولاً از ترسیم AC و PAC استفاده می‌شود. اما وقتی که از داده‌های واقعی استفاده می‌کنیم، معمولاً شکل منظمی به‌دست نمی‌آید و لذا نمی‌توان براساس AC و PAC مدل مناسب را به‌طور کامل پیدا نمود. در واقع، AC و PAC برای تشخیص اولیهٔ مدل، مناسب می‌باشند و لذا نیاز به روش‌های مکمل برای انتخاب مدل نهایی داریم. بدین منظور می‌توان از معیار دیگری، تحت عنوان معیار اطلاعات استفاده نمود. معیار اطلاعات شامل دو عامل است: یکی تابعی از مجموع مجذور باقیمانده‌ها (RSS) است و دیگری تابعی از درجه آزادی است. کارکرد معیار اطلاعات بدین صورت است که با افزودن یک متغیر جدید (اضافه نمودن وقفه) به مدل، از یک طرف موجب کاهش مجموع مجذور خطاها می‌شود و از طرف دیگر، درجه آزادی را کاهش می‌دهد. بنابراین، هدف این است که مدل به‌گونه‌ای انتخاب شود که مقدار معیار اطلاعات حداقل گردد. افزودن یک وقفهٔ اضافی در صورتی مقدار معیار اطلاعات را کاهش می‌دهد که مجموع مجذر باقیمانده را کاهش داده و بتواند زیان ناشی از کاهش درجه آزادی را جبران نماید. معیارهای مختلفی معرفی شده است که شامل معیار اطلاعات آکائیک[1] (AIC)، معیار اطلاعات بیزین شوارتز[2] (SIC) و معیار اطلاعات حنان- کوئین[3] ($HQIC$) می‌باشند.

$$AIC = Ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2K}{T}$$
$$SIC = Ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{K}{T}LnT \qquad (۱۳-۹۰)$$
$$HQIC = Ln(\hat{\sigma}^2) + \frac{2K}{T}Ln(LnT)$$

$\hat{\sigma}^2$ واریانس خطاها است که معادل با مجموع مجذور خطا تقسیم بر درجه آزادی آن، یعنی $n-K$ است که $k=p+q+1$ می‌باشد. هر یک از این معیارهای اطلاعات نسبت به $p \le \overline{p}$ و $q \le \overline{q}$ حداقل می‌شوند $\overline{p}$ و $\overline{q}$ به‌ترتیب حد بالای تعداد جملات MA و AR می‌باشند.

لازم به ذکر است که SIC در مقایسه با AIC وزن بیشتری به زیان حاصل از کاهش درجه آزادی می‌دهد در حالی که $HQIC$ حالت بینابین دارد. همچنین $\overline{R}^2$ نیز می‌تواند به‌عنوان یک معیار

1- Akaike (1974) information criterion (AIC)
2- Schwarz (1978) Bayesian information criterion (SBIC)
3- Hannan–Quinn information criterion (HQIC)

اطلاعات باشد، زیرا با افزودن وقفه‌ها مقدار آن افزایش می‌یابد، ولی به‌دلیل کاهش درجه آزادی، مقدار آن کاهش می‌یابد. بنابراین بر عکس معیارهای اطلاعات سه گانه، افزایش $\overline{R}^2$ به معنای بهبود مدل است.

معیارهای اطلاعات در Eviwes

وقتی مدل ARMA را برآورد می‌کنیم معیارهای AIC و SIC نیز همراه با سایر نتایج داده می‌شود. در مثال مربوط به قیمت سهام که از AR(2) استفاده کردیم، همان‌طور که ملاحظه می‌شود مقدار این دو معیار به‌ترتیب ۳/۸۳ و ۳/۸۷ می‌باشد. در اینجا لازم است که به‌صورت آزمون و خطا، مدل‌های دیگر را نیز بررسی کنیم. به‌عنوان مثال اگر فرایند ARMA(1,1) را انتخاب کنیم مقدار این دو معیار به‌ترتیب ۳/۸۷ و ۳/۹۲ خواهد شد که بزرگتر شده‌اند، لذا AR(2) بهتر از ARMA(1,1) می‌باشد. همچنین اگر ARMA(2,1) را انتخاب کنیم، مقدار AIC برابر با ۳/۸۳ و SBIC برابر با ۳/۸۹ خواهد شد که مجدداً از مقادیر این معیارها در مقایسه با فرایند AR(2)، بیشتر هستند.

۱۳-۱۲ مدل‌های ARIMA[1]

تاکنون فرض ضمنی این بود که متغیرهای مورد نظر، مانا هستند. به‌طور کلی می‌توان این مدل‌ها را طبق فرایند ARMA تنظیم نمود. شکل کلی مدل ARMA به‌صورت زیر است:

$$\phi(L)Y_t = \mu + \theta(L)u_t$$
$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p$$
$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \cdots + \theta_p L^p$$

فرض مدل‌های ARMA این است که Y_t یک سری مانا است. در خصوص مانایی و شرایط آن در فصل چهاردهم به تفصیل بحث خواهد شد. حال اگر سری Y_t مانا نباشد، یکی از روش‌های مانا کردن متغیرها، تفاضل‌گیری است. تفاضل مرتبه اول Y_t را با ΔY_t و تفاضل مرتبهٔ dام را با $\Delta^d Y_t$ نشان می‌دهیم. بنابراین، Y_t ممکن است با تفاضل مرتبهٔ اول مانا شود و یا با تفاضل مراتب بالاتر، مانا شود.

تفاضل مرتبهٔ dام را با $\Delta^d Y_t = (1-L)^d Y_t$ نشان می‌دهیم. به‌عنوان مثال، تفاضل مرتبهٔ دو عبارت است از:

$$\Delta^2 Y_t = (1-L)^2 Y_t = (1-2L+L^2)Y_t = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

1- autoregressive integrated moving average

اگر متغیر Y_t نامانا باشد و با تفاضل مرتبهٔ dام مانا شود، آنگاه به‌جای Y_t از $\Delta^d Y_t$ استفاده می‌کنیم. چنین مدلی را $\text{ARIMA}(p,d,q)$ می‌گویند. شکل کلی این مدل‌ها عبارت است از:

$$\phi(L)\Delta^d Y_t = \mu + \theta(L)u_t$$
$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \mu + \theta(L)u_t$$

به‌عنوان مثال مدل $\text{ARIMA}(1,1,1)$ عبارت است از:

$$(1-\phi_1 L)(1-L)Y_t = \mu + (1+\theta_1 L)u_t$$

چون $(1-L)Y_t = \Delta Y_t$ است، لذا خواهیم داشت:

$$(1-\phi_1 L)\Delta Y_t = \mu + (1+\theta_1 L)u_t \;\Rightarrow\; \Delta Y_t - \phi_1 \Delta Y_{t-1} = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

بنابراین، مدل $\text{ARIMA}(1,1,1)$ برای Y_t معادل با مدل $\text{ARMA}(1,1)$ برای ΔY_t است. اگر به‌جای ΔY_t و ΔY_{t-1} قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(Y_t - Y_{t-1}) - \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$
$$\Rightarrow Y_t - (1+\phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

۱۳-۱۳ پیش‌بینی با استفاده از مدل‌های سری زمانی

یکی از اهداف مهم مدل‌های سری زمانی، پیش‌بینی است. در فصل سوم، بحث مختصری در مورد پیش‌بینی ارائه شد. در اینجا نیز پیش‌بینی با استفاده از سری‌های زمانی را بررسی می‌کنیم. اما قبل از آن لازم است معیارهای ارزیابی پیش‌بینی را مرور کنیم.

۱-۱۳-۱۳ معیارهای ارزیابی پیش‌بینی

معیارهای ارزیابی پیش‌بینی، مقادیر واقعی (Y_t) و پیش‌بینی (Y_t^f) را مقایسه کرده و از این طریق، میزان خطای پیش‌بینی را اندازه‌گیری می‌کنند.

اولین معیار برای ارزیابی دقت پیش‌بینی، میانگین مجذور خطا (MSE)[1] می‌باشد:

$$MSE = \frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f - Y_t)^2}{m} \qquad (۱۳-۹۱)$$

1- mean squared error

m طول دوره پیش‌بینی است که از $T+1$ تا $T+m$ می‌باشد.

از آنجا که در محاسبهٔ MSE از مجذور خطاهای پیش‌بینی استفاده می‌شود لذا ریشهٔ دوم آن را حساب می‌کنند:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f - Y_t)^2}{m}} \qquad (۱۳-۹۲)$$

معیار دیگر، میانگین قدر مطلق خطا (MAE)[1] است:

$$MAE = \frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}|Y_t^f - Y_t|}{m} \qquad (۱۳-۹۳)$$

دو معیار فوق، متأثر از واحد اندازه‌گیری Y هستند، بدین معنی که بزرگ و کوچک بودن مقادیر Y موجب بزرگ و کوچک شدن MSE و MAE می‌شود. بدین منظور از معیار دیگری به نام میانگین قدرمطلق درصد خطا $(MAPE)$[2] استفاده می‌شود که تحت تأثیر واحد اندازه‌گیری Y قرار ندارد:

$$MAPE = \frac{100\sum_{t=T+1}^{T+m}\left|\frac{Y_t^f - Y_t}{Y_t}\right|}{m} \qquad (۱۳-۹۴)$$

ضریب نابرابری تایل (TIC)[3] نیز یکی دیگر از معیارهای ارزیابی دقت پیش‌بینی است. این ضریب به گونه‌ای تعریف شده است که مقدار آن بین ۰ و ۱ است. اگر مقدار آن برابر با صفر باشد بدان معنا است که خطاهای پیش‌بینی صفر است.

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f - Y_t)^2}{m}}}{\sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f)^2}{m}}\sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}Y_t^2}{m}}} \qquad (۱۳-۹۵)$$

1- mean absolute error
2- mean absolute percentage error
3- theil inequality coefficient

اگر متغیر Y_t نامانا باشد و با تفاضل مرتبهٔ dام مانا شود، آنگاه به‌جای Y_t از $\Delta^d Y_t$ استفاده می‌کنیم. چنین مدلی را $ARIMA(p,d,q)$ می‌گویند. شکل کلی این مدل‌ها عبارت است از:

$$\phi(L)\Delta^d Y_t = \mu + \theta(L)u_t$$
$$\phi(L)(1-L)^d Y_t = \mu + \theta(L)u_t$$

به‌عنوان مثال مدل $ARIMA(1,1,1)$ عبارت است از:

$$(1-\phi_1 L)(1-L)Y_t = \mu + (1+\theta_1 L)u_t$$

چون $(1-L)Y_t = \Delta Y_t$ است، لذا خواهیم داشت:

$$(1-\phi_1 L)\Delta Y_t = \mu + (1+\theta_1 L)u_t \;\Rightarrow\; \Delta Y_t - \phi_1 \Delta Y_{t-1} = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

بنابراین، مدل $ARIMA(1,1,1)$ برای Y_t معادل با مدل $ARMA(1,1)$ برای ΔY_t است. اگر به‌جای ΔY_t و ΔY_{t-1} قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(Y_t - Y_{t-1}) - \phi_1(Y_{t-1} - Y_{t-2}) = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$
$$\Rightarrow Y_t - (1+\phi_1)Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

۱۳-۱۳ پیش‌بینی با استفاده از مدل‌های سری زمانی

یکی از اهداف مهم مدل‌های سری زمانی، پیش‌بینی است. در فصل سوم، بحث مختصری در مورد پیش‌بینی ارائه شد. در اینجا نیز پیش‌بینی با استفاده از سری‌های زمانی را بررسی می‌کنیم. اما قبل از آن لازم است معیارهای ارزیابی پیش‌بینی را مرور کنیم.

۱-۱۳-۱۳ معیارهای ارزیابی پیش‌بینی

معیارهای ارزیابی پیش‌بینی، مقادیر واقعی (Y_t) و پیش‌بینی (Y_t^f) را مقایسه کرده و از این طریق، میزان خطای پیش‌بینی را اندازه‌گیری می‌کنند.

اولین معیار برای ارزیابی دقت پیش‌بینی، میانگین مجذور خطا (MSE)[1] می‌باشد:

$$MSE = \frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f - Y_t)^2}{m} \qquad (13\text{-}91)$$

1- mean squared error

m طول دوره پیش‌بینی است که از $T+1$ تا $T+m$ می‌باشد.

از آنجا که در محاسبهٔ MSE از مجذور خطاهای پیش‌بینی استفاده می‌شود لذا ریشهٔ دوم آن را حساب می‌کنند:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f - Y_t)^2}{m}} \qquad (13\text{-}92)$$

معیار دیگر، میانگین قدر مطلق خطا (MAE)[1] است:

$$MAE = \frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}|Y_t^f - Y_t|}{m} \qquad (13\text{-}93)$$

دو معیار فوق، متأثر از واحد اندازه‌گیری Y هستند، بدین معنی که بزرگ و کوچک بودن مقادیر Y موجب بزرگ و کوچک شدن MSE و MAE می‌شود. بدین منظور از معیار دیگری به نام میانگین قدرمطلق درصد خطا $(MAPE)$[2] استفاده می‌شود که تحت تأثیر واحد اندازه‌گیری Y قرار ندارد:

$$MAPE = \frac{100\sum_{t=T+1}^{T+m}\left|\frac{Y_t^f - Y_t}{Y_t}\right|}{m} \qquad (13\text{-}94)$$

ضریب نابرابری تایل (TIC)[3] نیز یکی دیگر از معیارهای ارزیابی دقت پیش‌بینی است. این ضریب به‌گونه‌ای تعریف شده است که مقدار آن بین ۰ و ۱ است. اگر مقدار آن برابر با صفر باشد بدان معنا است که خطاهای پیش‌بینی صفر است.

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f - Y_t)^2}{m}}}{\sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}(Y_t^f)^2}{m}}\sqrt{\frac{\sum_{t=T+1}^{T+m}Y_t^2}{m}}} \qquad (13\text{-}95)$$

1- mean absolute error
2- mean absolute percentage error
3- theil inequality coefficient

برای ارزیابی بهتر پیش‌بینی‌ها، می‌توان میانگین مجذور خطا (MSE) را به سه جزء تجزیه نمود:

$$MSE = \frac{\sum (Y_t^f - Y_t)^2}{m} = (\bar{Y}^f - \bar{Y})^2 + (S_{Y^f} - S_Y)^2 + 2(1-r)S_{Y^f} S_Y \qquad (۱۳\text{-}۹۶)$$

$\bar{Y}$ و $\bar{Y}^f$ به ترتیب میانگین واقعی و میانگین پیش‌بینی از زمان $T+1$ تا $T+m$ می‌باشد. جمله اول اختلاف میانگین واقعی و میانگین پیش‌بینی است. انتظار بر این است که یک پیش‌بینی خوب، به‌طور متوسط به مقادیر واقعی نزدیک باشد. جمله دوم تفاوت انحراف‌معیار واقعی و پیش‌بینی را نشان می‌دهد. اگر مدل بتواند نوسانات Y را نیز به‌خوبی پیش‌بینی کند، آن‌گاه جمله دوم نیز کوچک خواهد بود. جمله سوم نیز همبستگی بین مقادیر واقعی و پیش‌بینی را منعکس می‌کند. اگر مقادیر واقعی و پیش‌بینی، هم‌سو باشند، در این‌صورت ضریب همبستگی آنها (r) بزرگ خواهد بود و لذا $1-r$ کاهش خواهد یافت.

حال هریک از این سه جزء را بر MSE تقسیم نموده و شاخص‌های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$BP = \frac{(\bar{Y}^f - \bar{Y})^2}{\sum (Y_t^f - Y_t)^2 / m}$$

$$VP = \frac{(S_{Y^f} - S_Y)^2}{\sum (Y_t^f - Y_t)^2 / m} \qquad (۱۳\text{-}۹۷)$$

$$CP = \frac{2(1-r)S_{Y^f} S_Y}{\sum (Y_t^f - Y_t)^2 / m}$$

بدیهی است که $BP+VP+CP=1$ می‌باشد. BP را نسبت اریب (تورش) می‌گویند که میانگین پیش‌بینی را با میانگین واقعی مقایسه می‌کند. یک پیش‌بینی خوب، مقادیر Y را به‌طور متوسط به‌خوبی پیش‌بینی می‌کند و لذا BP نزدیک به صفر است. VP نیز معروف به نسبت واریانس است که بیانگر تفاوت بین انحراف معیار یا پراکندگی مقادیر پیش‌بینی با مقادیر واقعی است. اگر انحراف معیارها به‌هم نزدیک باشد آنگاه VP نیز کوچک خواهد بود. بنابراین، اگر

میانگین و انحراف معیار مقادیر واقعی و پیش‌بینی تقریباً برابر باشند، آنگاه قسمت عمدهٔ خطاهای پیش‌بینی در CP نمایان می‌شود که معروف به نسبت کوواریانس است.

۲-۱۳-۱۳ پیش‌بینی با مدل MA

همان‌طور که در مبحث میانگین متحرک گفته شد، مدل MA(q) می‌تواند مقادیر Y را فقط تا q دورهٔ بعدی پیش‌بینی کند. برای بررسی دقیق‌تر این بحث مدل MA(۳) را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} + \theta_3 u_{t-3} \qquad (۱۳\text{-}۹۸)$$

مقادیر Y در زمان‌های بعدی عبارتند از:

$$Y_{t+1} = \mu + u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \theta_3 u_{t-2}$$
$$Y_{t+2} = \mu + u_{t+2} + \theta_1 u_{t+1} + \theta_2 u_t + \theta_3 u_{t-1}$$
$$Y_{t+3} = \mu + u_{t+3} + \theta_1 u_{t+2} + \theta_2 u_{t+1} + \theta_3 u_t$$

فرض کنید که مجموعه اطلاعات I_t شامل تمام اطلاعات موجود تا زمان t بوده و در زمان t قابل دسترس باشد. در این صورت مقدار پیش‌بینی شدهٔ Y عبارت است از:

$$Y_{t+1}^f = E(Y_{t+1} \mid I_t) = E[(\mu + u_{t+1} + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \theta_3 u_{t-2}) \mid I_t] \qquad (۱۳\text{-}۹۹)$$
$$= \mu + \theta_1 u_t + \theta_2 u_{t-1} + \theta_3 u_{t-2}$$

چون زمان $t+1$ هنوز تحقق نیافته است لذا u_{t+1} یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن صفر است. ولی چون مقادیر متغیرهای u_t، u_{t-1} و u_{t-2} تحقق یافته‌اند، لذا امید ریاضی آنها برابر با مقادیر واقعی می‌باشد.

با تکرار روش فوق، مقادیر پیش‌بینی برای زمان‌های بعدی عبارت است از:

$$Y_{t+2}^f = E(Y_{t+2} \mid I_t) \qquad (۱۳\text{-}۱۰۰)$$
$$= E[(\mu + u_{t+2} + \theta_1 u_{t+1} + \theta_2 u_t + \theta_3 u_{t-1}) \mid I_t]$$
$$= \mu + \theta_2 u_t + \theta_3 u_{t-1}$$

$$Y_{t+3}^f = E(Y_{t+3} \mid I_t) \qquad (۱۳\text{-}۱۰۱)$$
$$= E[(\mu + u_{t+3} + \theta_1 u_{t+2} + \theta_2 u_{t+1} + \theta_3 u_t) \mid I_t]$$
$$= \mu + \theta_3 u_t$$

$$
\begin{aligned}
Y^f_{t+4} &= E(Y_{t+4} \mid I_t) \\
&= E[(\mu + u_{t+4} + \theta_1 u_{t+3} + \theta_2 u_{t+2} + \theta_3 u_{t+1}) \mid I_t] \\
&= \mu
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۱۰۲)
$$

بنابر این، مدل MA(۳) می‌تواند مقادیر Y را برای سه دوره پیش‌بینی نماید و بعد از آن، پیش‌بینی این مدل برای Y صرفاً برابر با میانگین Y می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
Y^f_{t+s} &= E(Y_{t+s} \mid I_t) \\
&= E[(\mu + u_{t+s} + \theta_1 u_{t+s-1} + \theta_2 u_{t+s-2} + \theta_3 u_{t+s-3}) \mid I_t] \\
&= \mu \quad ; \quad s = 4, 5, \ldots
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۱۰۳)
$$

۳-۱۳-۱۳ پیش‌بینی با مدل AR

بر خلاف مدل MA، مدل AR دارای امکان پیش‌بینی برای دوره‌های طولانی می‌باشد. بدین منظور مدل AR(۲) را در نظر بگیرید.

$$
Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + u_t \qquad (۱۳-۱۰۴)
$$

مقادیر Y برای دوره های مختلف به‌صورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
Y_{t+1} &= \mu + \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + u_{t+1} \\
Y_{t+2} &= \mu + \phi_1 Y_{t+1} + \phi_2 Y_t + u_{t+2} \\
Y_{t+3} &= \mu + \phi_1 Y_{t+2} + \phi_2 Y_{t+1} + u_{t+3}
\end{aligned}
$$

و برای هر زمان دلخواه، خواهیم داشت:

$$
Y_{t+s} = \mu + \phi_1 Y_{t+s-1} + \phi_2 Y_{t+s-2} + u_{t+s} \quad ; \quad s = 1, 2, \ldots \qquad (۱۳-۱۰۵)
$$

از آنجا که در زمان $t+1$، مقادیر Y_{t-1} و Y_t معلوم هستند لذا پیش‌بینی زمان $t+1$ برابر است با:

$$
\begin{aligned}
Y^f_{t+1} &= E(Y_{t+1} \mid I_t) \\
&= E[(\mu + \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1} + u_{t+1}) \mid I_t] \\
&= \mu + \phi_1 Y_t + \phi_2 Y_{t-1}
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۱۰۶)
$$

زیرا $E(u_{t+1} \mid I_t) = 0$ است. پیش بینی برای زمان $t+2$ نیز عبارت است:

$$
\begin{aligned}
Y^f_{t+2} &= E(Y_{t+2} \mid I_t) \\
&= E[(\mu + \phi_1 Y_{t+1} + \phi_2 Y_t + u_{t+2}) \mid I_t] \\
&= \mu + \phi_1 E(Y_{t+1} \mid I_t) + \phi_2 Y_t
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۱۰۷)
$$

به‌جای $E(Y_{t+1} \mid I_t)$ از Y^f_{t+1} استفاده کرده و به‌جای آن قرار می‌دهیم:

$$
Y^f_{t+2} = E(Y_{t+2} \mid I_t) = \mu + \phi_1 Y^f_{t+1} + \phi_2 Y_t \qquad (۱۳-۱۰۸)
$$

به‌همین ترتیب برای زمان $t+3$ خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
Y^f_{t+3} &= E(Y_{t+3} \mid I_t) \\
&= E[(\mu + \phi_1 Y_{t+2} + \phi_2 Y_{t+1} + u_{t+3}) \mid I_t] \\
&= \mu + \phi_1 E(Y_{t+2} \mid I_t) + \phi_2 E(Y_{t+1} \mid I_t) \\
&= \mu + \phi_1 Y^f_{t+2} + \phi_2 Y^f_{t+1}
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۱۰۹)
$$

این نتیجه را می‌توان برای $s = 3, 4, 5, \ldots$ تعمیم داد:

$$
\begin{aligned}
Y^f_{t+s} &= E(Y_{t+s} \mid I_t) \\
&= E[(\mu + \phi_1 Y_{t+s-1} + \phi_2 Y_{t+s-2} + u_{t+s}) \mid I_t] \\
&= \mu + \phi_1 E(Y_{t+s-1} \mid I_t) + \phi_2 E(Y_{t+s-2} \mid I_t) \\
&= \mu + \phi_1 Y^f_{t+s-1} + \phi_2 Y^f_{t+s-2} \quad ; \quad s = 3, 4, \ldots
\end{aligned}
\qquad (۱۳-۱۱۰)
$$

۴-۱۳-۱۳ پیش‌بینی ایستا و پویا

پیش‌بینی ایستا و پویا را می‌توان به‌ترتیب پیش‌بینی کوتاه‌مدت و بلندمدت دانست. برای تبیین تفاوت این دو، مدل AR(۱) $(Y_t = \mu + \phi Y_{t-1} + u_t)$ را در نظر بگیرید. با این مدل می‌خواهیم سال‌های $t+1$، $t+2$ و $t+3$ را پیش‌بینی کنیم.

پیش‌بینی پویا با این فرض انجام می‌شود که در سال t هستیم و برای هر یک از سال‌های آتی، اقدام به پیش‌بینی می‌کنیم. بنابراین، تنها اطلاعاتی که در دسترس داریم، مجموعه اطلاعات سال t است که با I_t نشان می‌دهیم.

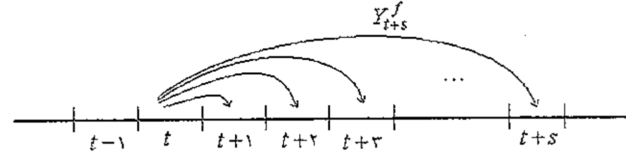
پیش‌بینی پویا برای سال $t+1$: $Y^f_{t+1} = E(Y_{t+1} \mid I_t) = \mu + \phi Y_t$

پیش‌بینی پویا برای سال $t+2$: $Y^f_{t+2} = E(Y_{t+2} \mid I_t) = \mu + \phi Y^f_{t+1}$ (۱۳-۱۱۱)

پیش‌بینی پویا برای سال $t+3$: $Y^f_{t+3} = E(Y_{t+3} \mid I_t) = \mu + \phi Y^f_{t+2}$

نتایج فوق نشان می‌دهد که مجموعه اطلاعات ما فقط شامل Y_t است و مقادیر Y_{t+1} و Y_{t+2} را نداریم و لذا از مقادیر پیش‌بینی شدهٔ آنها استفاده می‌کنیم. در واقع در یک نقطه ایستاده‌ایم (در

زمان t) و بـرای هـر دوره‌ای از آینـده، اقـدام بـه پیش‌بینـی مـی کنیم. بـدیهی اسـت کـه چنـین پیش‌بینی‌هایی برای آیندهٔ دورتر دارای خطاهای بزرگتری است.



پیش‌بینی ایستا یک نوع پیش‌بینی قدم بـه قـدم اسـت. بـدین معنـی کـه وقتـی در سـال t بـرای سال $t+۱$ پیش‌بینی می کنیم، مجموعه اطلاعات ما در این سال (I_t) شامل Y_t است. حال پیش‌بینـی سال $t+۲$ را وقتی انجام می‌دهیم که به سال $t+۱$ برسیم. در این سال، مجموعه اطلاعات ما (I_{t+1}) شامل Y_{t+1} است زیرا اکنون مقدار Y_{t+1} را مشاهده کرده‌ایم. بنابراین، در حالت کلی پیش‌بینی بـرای سال $t+s$ تابعی از مقدار مشاهده شدهٔ Y در سال $t+s-۱$ است:

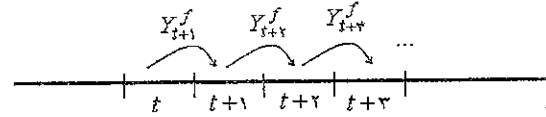
$$\text{پیش‌بینی ایستا برای سال } t+s: \quad Y^f_{t+s} = E(Y_{t+s} \mid I_{t+s-1}) = \mu + \phi Y_{t+s-1} \qquad (۱۱۲-۱۳)$$

در سال $t+s$ مقدار Y_{t+s-1} را داریم و لـذا بخـشی از اطلاعـات مـا اسـت. بنـابراین، پـیش‌بینـی سال‌های $t+۱$، $t+۲$ و $t+۳$ عبارت است از:

$$\text{پیش‌بینی ایستا برای سال } t+۱: \quad Y^f_{t+1} = E(Y_{t+1} \mid I_t) = \mu + \phi Y_t$$

$$\text{پیش‌بینی ایستا برای سال } t+۲: \quad Y^f_{t+2} = E(Y_{t+2} \mid I_{t+1}) = \mu + \phi Y_{t+1}$$

$$\text{پیش‌بینی ایستا برای سال } t+۳: \quad Y^f_{t+3} = E(Y_{t+3} \mid I_{t+2}) = \mu + \phi Y_{t+2}$$



پیش‌بینی سری‌های زمانی با Eviews فایل data4

بعد از تخمین مدل ARMA، نتایج حاصله در پنجرهٔ Equation نشان داده می‌شود. در این پنجـره گزینـه‌های مختلفـی وجود دارد که از جملهٔ آنها، گزینه Forecast است. بدین منظور از تخمین نرخ رشد شاخص قیمت بـورس تهـران در ۲۰۲ هفتـه استفاده کرده‌ایم. در اینجا ابتدا از یک مدل MA(3) استفاده می‌کنیم که نتایج آن عبارت است:

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: Least Squares
Date: 01/22/11 Time: 18:09
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 11 iterations
MA Backcast: -1 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.812322	0.185343	4.382807	0.0000
MA(1)	0.162243	0.070704	2.294685	0.0228
MA(2)	0.351190	0.067434	5.207943	0.0000
MA(3)	0.096602	0.071539	1.350335	0.1785

R-squared	0.172480	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	0.159878	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.635928	Akaike info criterion	3.841998
Sum squared resid	527.2236	Schwarz criterion	3.907735
Log likelihood	-382.1208	Hannan-Quinn criter.	3.868598
F-statistic	13.68686	Durbin-Watson stat	1.975282
Prob(F-statistic)	0.000000		

Inverted MA Roots	.05-.61i	.05+.61i	-.26

در این پنجره، با انتخاب گزینه Forecast را انتخاب کنیم پنجره دیگری به نام Forecast نمایان می‌شود. در ایـن پنجـره، گزینه‌های مختلفی وجود دارد. اولاً نام مقادیر پیش‌بینی را برای متغیر مورد نظر وارد می‌کنیم. به‌عنوان مثال آن را بـا gspf نـشان می‌دهیم. ثانیاً روش پیش‌بینی را انتخاب می‌کنیم (ایستا یا پویا). اگر روش پویا را انتخاب کنیم در این صورت برای پیش‌بینی gsp، مقادیر به‌دست آمده از خود معادله را استفاده می‌کند. اما اگر روش ایستا را انتخاب کنیم در این صورت بـرای پـیش‌بینـی gsp از مقادیر واقعی استفاده می‌کند. معیارهای پیش‌بینی نیز در سمت راست این نمودارها ارائه شده است.

Forecast

Forecast of
Equation: UNTITLED Series: GSP

Series names
Forecast name: gspf
S.E. (optional):
GARCH(optional):

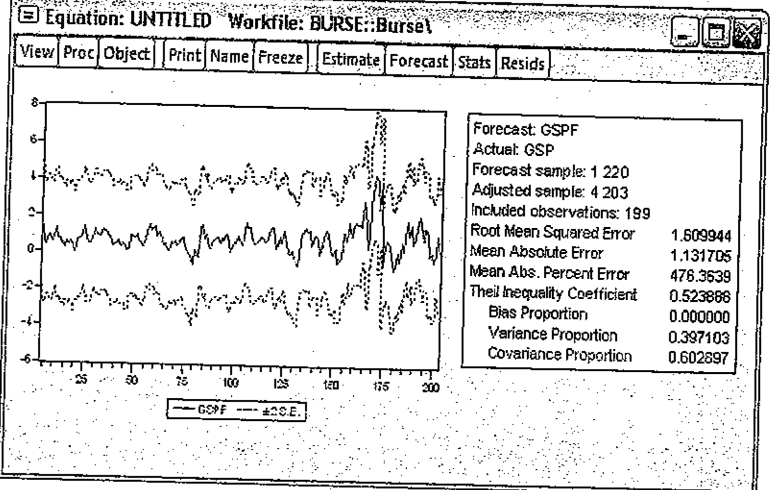
Method
○ Dynamic forecast
⊙ Static forecast
Structural (ignore ARMA)
☑ Coef uncertainty in S.E. calc

Forecast sample
1 220

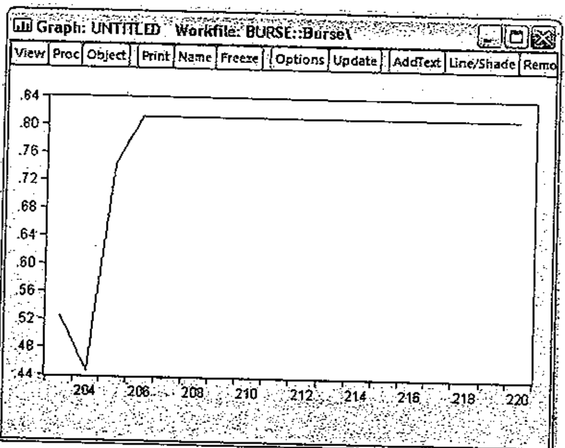
Output
☑ Forecast graph
☑ Forecast evaluation

☑ Insert actuals for out-of-sample observations

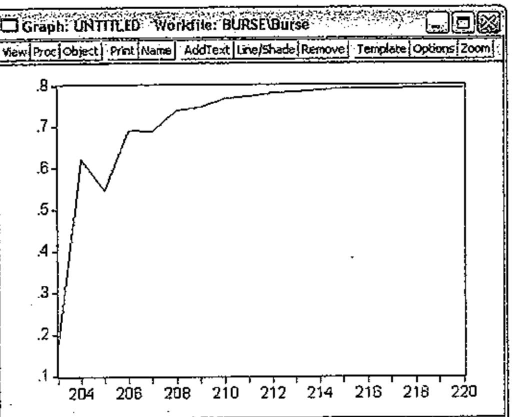
OK Cancel



حال اگر مقادیر پیش‌بینی برون نمونه‌ای را فقط برای زمان‌های ۲۰۳ تا ۲۲۰ ترسیم کنیم نمودار زیر به‌دست می‌آید که طبق آن، تا زمان ۲۰۵ (سه زمان بعد از پایان دورهٔ نمونه) مقادیر gsp را پیش‌بینی می‌کند و بعد از آن (از ۲۰۶ به بعد) برابر با $\hat{\mu}=\cdot/\lambda\mathsf{1}$ می‌باشد



حال اگر از یک مدل AR(2) استفاده کنیم، تخمین آن برای دوره برون نمونه‌ای (۲۰۳ تا ۲۲۰) عبارت است از:



مسائل

۱۳-۱ مدل ساده AR(1) را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + \phi Y_{t-1} + u_t$$

الف) میانگین (غیرشرطی) Y_t را محاسبه نمایید.

ب) واریانس (غیرشرطی) Y_t را محاسبه نمایید.

ج) تابع خود همبستگی این فرآیند را استخراج کنید.

۱۳-۲ آیا فرآیند زیر برای Y_t مانا است؟

$$Y_t = ۳Y_{t-۱} - ۲/۷Y_{t-۲} + ۰/۷۵Y_{t-۳} + u_t$$

۱۳-۳ اگر فرایند AR(1) را به‌صورت $Y_t = -۰/۵Y_{t-۱} + u_t$ باشد. نمودار AC و PAC را رسم نمائید.

۱۳-۴ مدل زیر برآورد شده است:

$$Y_t = ۰/۴۵ + ۰/۵u_{t-۱} + ۰/۱u_{t-۲}$$

مقادیر Y را پیش‌بینی کنید.

۱۳-۵ مدل زیر برآورد شده است:

$$Y_t = ۰/۵Y_{t-۱} + ۰/۱Y_{t-۲}$$

مقادیر Y را پیش‌بینی کنید.

۱۳-۶ در مسئله ۵، آیا Y مانا است؟

۱۳-۷ ضرایب خودهمبستگی به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

وقفه	AC	PAC
۱	۰/۴۵	۰/۶۵
۲	۰/۱۵	۰/۴۱
۳	۰/۰۸	۰/۲۷
۴	−۰/۱	۰/۲۱
۵	−۰/۰۹	۰/۲۰
۶	۰/۰۳	۰/۱۱
۷	۰/۰۲	۰/۱۰
۸	۰/۰۲۵	۰/۰۸
۹	۰/۰۴	۰/۰۵۰
۱۰	۰/۰۵	۰/۰۴

الف) مناسب‌ترین فرایند برای این سری را تعیین کنید.

ب) آزمون معنی‌دار بودن همزمان را برای چهار ضریب اول انجام دهید.

۱۳-۸ ضرایب خودهمبستگی را برای مدل زیر به‌دست آورید.

$$Y_t = u_t + \theta u_{t-۱} + \theta_۲ u_{t-۲} \quad , \quad u_t \sim N(۰,\sigma^۲)$$

۱۳-۹ مدل $AR(۱)$ با خودهمبستگی مرتبه اول را داریم:

$$Y_t = \beta Y_{t-۱} + u_t$$
$$u_t = \rho u_{t-۱} + \varepsilon_t$$

ثابت کنید که برای تخمین‌زننده $\hat{\beta}$ از روش OLS رابطه زیر برقرار است:

$$\text{plim}\ \hat{\beta} = \beta + \frac{\rho(۱-\beta^۲)}{۱+\rho\beta}$$

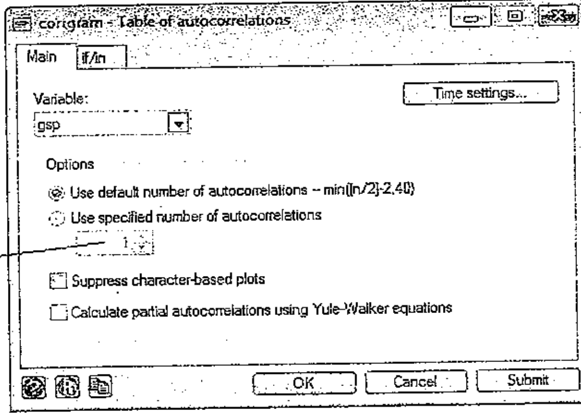
ضمیمه فصل سیزدهم: مدل‌های ARIMA در Stata

محاسبه ضرایب خودهمبستگی در Stata

فایل data4

برای محاسبه این ضرایب، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Autocorrelation & partial Autocorrelation → Graphs → time series → Statistics



همچنین می‌توان از فرمان زیر استفاده نمود:

```
correlgram gsp
```

اگر بخواهیم تعداد وقفه‌ها (تعداد ضرایب خودهمبستگی) را تعیین کنیم، از فرمان زیر استفاده می‌کنیم (مثلاً با ۲۰ وقفه):

```
correlgram gsp, lags(20)
```

نتایج عبارت است از:

۱۳-۵ مدل زیر برآورد شده است:

$$Y_t = ۰/۵Y_{t-1} + ۰/۱Y_{t-2}$$

مقادیر Y را پیش‌بینی کنید.

۱۳-۶ در مسئله ۵، آیا Y مانا است؟

۱۳-۷ ضرایب خودهمبستگی به‌صورت زیر به‌دست آمده است:

وقفه	AC	PAC
۱	۰/۴۵	۰/۶۵
۲	۰/۱۵	۰/۴۱
۳	۰/۰۸	۰/۲۷
۴	−۰/۱	۰/۲۱
۵	−۰/۰۹	۰/۲۰
۶	۰/۰۳	۰/۱۱
۷	۰/۰۲	۰/۱۰
۸	۰/۰۲۵	۰/۰۸
۹	۰/۰۴	۰/۰۵۰
۱۰	۰/۰۵	۰/۰۴

الف) مناسب‌ترین فرایند برای این سری را تعیین کنید.

ب) آزمون معنی‌دار بودن همزمان را برای چهار ضریب اول انجام دهید.

۱۳-۸ ضرایب خودهمبستگی را برای مدل زیر به‌دست آورید.

$$Y_t = u_t + \theta u_{t-1} + \theta_2 u_{t-2} \quad , \quad u_t \sim N(0,\sigma^2)$$

۱۳-۹ مدل $AR(1)$ با خودهمبستگی مرتبه اول را داریم:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + u_t$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

ثابت کنید که برای تخمین‌زننده $\hat{\beta}$ از روش OLS رابطه زیر برقرار است:

$$\text{plim } \hat{\beta} = \beta + \frac{\rho(1-\beta^2)}{1+\rho\beta}$$

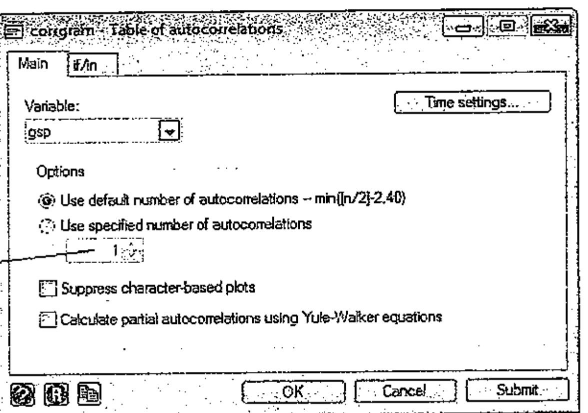
ضمیمه فصل سیزدهم: مدل‌های ARIMA در Stata

محاسبه ضرایب خودهمبستگی در Stata

فایل data4

برای محاسبه این ضرایب، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Statistics → time series → Graphs → Autocorrelation & partial Autocorrelation



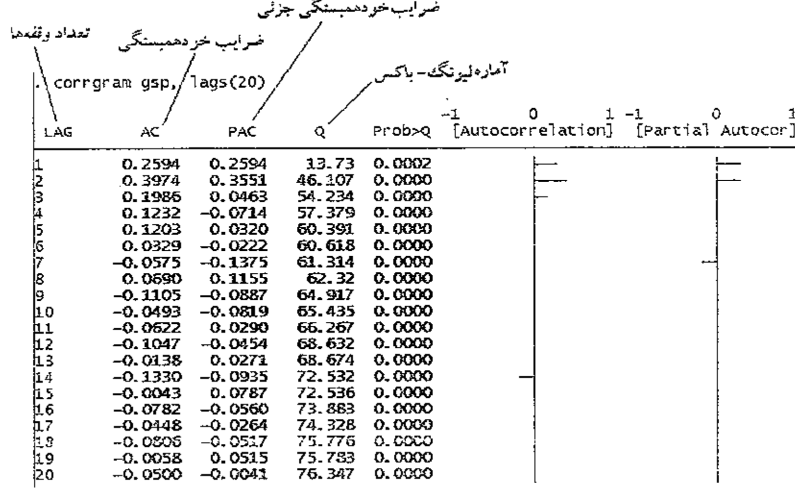
همچنین می‌توان از فرمان زیر استفاده نمود:

```
correlgram gsp
```

اگر بخواهیم تعداد وقفه‌ها (تعداد ضرایب خودهمبستگی) را تعیین کنیم، از فرمان زیر استفاده می‌کنیم (مثلاً با ۲۰ وقفه):

```
correlgram gsp, lags(20)
```

نتایج عبارت است از:




```
. corrgram gsp, lags(20)

                                          -1       0       1 -1       0       1
 LAG       AC       PAC      Q     Prob>Q  [Autocorrelation]  [Partial Autocor]

 1      0.2594   0.2594   13.73   0.0002
 2      0.3974   0.3551   46.107  0.0000
 3      0.1986   0.0463   54.234  0.0000
 4      0.1232  -0.0714   57.379  0.0000
 5      0.1203   0.0320   60.391  0.0000
 6      0.0329  -0.0222   60.618  0.0000
 7     -0.0575  -0.1375   61.314  0.0000
 8      0.0690   0.1155   62.32   0.0000
 9     -0.1105  -0.0887   64.917  0.0000
10     -0.0493  -0.0819   65.435  0.0000
11     -0.0622   0.0290   66.267  0.0000
12     -0.1047  -0.0454   68.632  0.0000
13     -0.0138   0.0271   68.674  0.0000
14     -0.1330  -0.0935   72.532  0.0000
15     -0.0043   0.0787   72.536  0.0000
16     -0.0782  -0.0560   73.883  0.0000
17     -0.0448  -0.0264   74.328  0.0000
18     -0.0806  -0.0517   75.776  0.0000
19     -0.0058   0.0515   75.783  0.0000
20     -0.0500  -0.0041   76.347  0.0000
```

برآورد مدل‌های ARIMA در Stata

از آنجا که مدل‌های ARIMA در رابطه با سری‌های زمانی است، لذا ابتدا بایستی زمان را تعریف کنیم. بنابراین، دو فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

gen t=1_n-1

tsset t, weakly

چون داده‌ها به صورت هفتگی هستند لذا زمان را بر حسب هفته تعریف کرده‌ایم.

به‌منظور برآورد مدل ARIMA(p,d,q) برای متغیر y از فرمان زیر استفاده می‌کنیم (به‌جای p، q و d اعداد مورد نظر را قرار می‌دهیم):

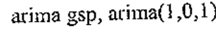
arima y, arima(p,d,q)

و یا از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

arma d.y, ar(1/p) ma(1/q)

همچنین می‌توان با دنبال نمودن مسیر زیر، پنجره مربوط به برآورد فرایندهای ARIMA را باز نمود:

statistics → time series → tests → ARIMA and ARMAX model



با انتخاب OK نتایج به دست می‌آید.

به‌عنوان مثال برای نرخ بازده در بورس تهران، مدل ARMA(1,0,1) را برآورد می‌کنیم:

arima gsp, arima(1,0,1)

نتایج عبارت است از:

```
. arima gsp, arima(1,0,1)

(setting optimization to BHHH)
Iteration 0:   log likelihood = -392.29828
Iteration 1:   log likelihood = -387.52281
Iteration 2:   log likelihood = -386.78908
Iteration 3:   log likelihood = -386.47712
Iteration 4:   log likelihood = -386.34814
(switching optimization to BFGS)
Iteration 5:   log likelihood =  -386.2702
Iteration 6:   log likelihood = -386.17989
Iteration 7:   log likelihood = -386.17274
Iteration 8:   log likelihood = -386.16694
Iteration 9:   log likelihood = -386.16545
Iteration 10:  log likelihood = -386.16542

ARIMA regression

Sample:  1960w3 - 1963w47                       Number of obs    =       201
                                                Wald chi2(2)     =    549.89
Log likelihood = -386.1654                      Prob > chi2      =    0.0000

------------------------------------------------------------------------------
             |                 OPG
         gsp |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
gsp          |
       _cons |   .8123243   .3129795     2.60   0.009     .1988958    1.425753
-------------+----------------------------------------------------------------
ARMA         |
          ar |
         L1. |   .7896953   .0671097    11.77   0.000     .6581626     .921228
          ma |
         L1. |  -.5453658   .1011194    -5.39   0.000    -.7435561   -.3471754
-------------+----------------------------------------------------------------
      /sigma |   1.651696   .0482785    34.21   0.000     1.557072    1.746321
------------------------------------------------------------------------------
```

بنابراین، معادله زیر را داریم:

$$GSP_t = ۰/۸۱۲۳ + ۰/۷۸۹۷GSP_{t-1} - ۰/۵۴۵۴u_{t-1}$$

پیش‌بینی با مدل‌های ARIMA

ابتدا معادله را برای دوره مورد نظر برآورد می‌کنیم (در اینجا برای مشاهده ۱۸۰ام و قبل از آن که در این فایل با 1963w25 مشخص شده است):

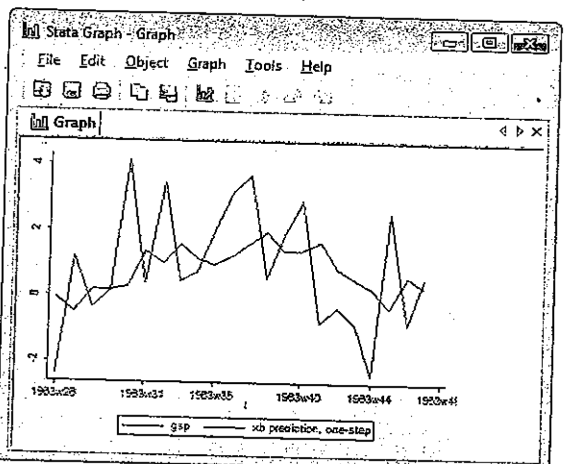
```
arima gsp if t<181, arima(1,0,1)
```

بعد از تخمین معادله، مقادیر پیش‌بینی را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

```
predict gsphat
```

حال می‌توان مقادیر پیش‌بینی و واقعی را برای دوره بعد از تخمین مقایسه نمود. بدین منظور نمودار آنها را رسم می‌کنیم:

```
tsline gsp gsphat if t>180
```



فصل چهاردهم

مانایی، ریشه واحد و هم‌انباشتگی
(سری‌های زمانی یک‌متغیره)

۱-۱٤ مقدمه

در فصل سیزدهم به تحلیل و مدل‌سازی سری‌های زمانی پرداختیم. در مبحث سری‌های زمانی، مفهوم ایستایی یا مانایی سری‌های زمانی یکی از موضوعات مهم است. آزمون مانایی به‌منظور جلوگیری از رگرسیون‌های کاذب و یافتن روابط تعادلی بین متغیرها می‌باشد. در این فصل ابتدا مفهوم مانایی و نامانایی سری‌های زمانی را بررسی می‌کنیم. در این مورد، ویژگی اصلی سری‌های نامانا را بررسی خواهیم کرد که معروف به روند تصادفی است. سپس آزمون‌های مربوط به نامانایی یا ریشه واحد را بررسی خواهیم کرد. در ادامه به مفهوم هم‌انباشتگی به منظور تحلیل روابط تعادلی و بلندمدت بین متغیرها می‌پردازیم. اما قبل از اینها، به بررسی مفاهیم و اهمیت مانایی و نامانایی را می‌پردازیم.

۲-۱٤ مانایی[1]

چرا آزمون مانایی ضروری است؟ در این مورد چند دلیل وجود دارد که اهمیت مفهوم مانایی را نشان می‌دهد.

مانایی و در مقابل آن نامانایی می‌تواند تأثیر جدی بر رفتار و خواص یک سری زمانی داشته باشد. به‌عنوان مثال وقتی شوکی به یک سری زمانی باثبات (مانا) وارد می‌شود، اثرات آن بر متغیر

1- stationary

مورد نظر میرا است و به‌تدریج از بین می‌رود. یعنی اثر شوک مورد نظر، در زمان $t+1$ کمتر از زمان t می‌باشد. در مقابل، داده‌های نامانا به‌گونه‌ای هستند که اثر شوک‌های وارده، ماندگار و همیشگی است، به‌طوری که برای یک سری نامانا، اثر یک شوک در زمان $t+1$ کمتر از اثر آن در زمان t نخواهد بود.

استفاده از داده‌های نامانا می‌تواند منجر به رگرسیون‌های کاذب شود. اگر دو متغیر مانا داشته باشیم که به‌صورت سری‌های تصادفیِ مستقل باشند، هنگامی که یکی روی دیگری برازش شود، t و R^2 نسبتاً پایینی به‌دست خواهد آمد. این وضعیت برای متغیرهایی که به یکدیگر وابسته نیستند، بدیهی است. اما اگر دو متغیر دارای روند زمانی بوده و هیچ ارتباط منطقی با هم نداشته باشند، رگرسیون یکی روی دیگری، دارای R^2 بالایی خواهد بود. لذا در چنین شرایطی، روش‌های رگرسیون استاندارد منجر به یک رگرسیون با ظاهری خوب می‌شود که همه ضرایب آن معنی‌دار بوده و دارای R^2 بالا خواهد بود. اما در اصل یک رگرسیون کاذب[1] است.

دو تعریف از نامانایی در ابتدای فصل سیزدهم ارائه شد. در تحلیل‌های این فصل از تعریف «مانایی ضعیف» استفاده می‌کنیم که طبق آن، داده‌های مانا آنهایی هستند که دارای میانگین ثابت، واریانس ثابت و خودکوواریانس[2] ثابت باشند.

۱٤-۳ مانایی ضعیف

اگر یک سری زمانی، شرایط زیر را به ازای هر t تأمین کند، آن را مانای ضعیف گویند:

۱) $E(Y_t)=\mu$

۲) $E(Y_t-\mu)^2=\text{var}(Y_t)=\sigma^2<\infty$ (۱۱-۱)

۳) $\text{cov}(Y_{t_1},Y_{t_2})=E(Y_{t_1}-\mu)(Y_{t_2}-\mu)=\gamma_{t_2-t_1}$ برای هر t_1, t_2

شرایط سه گانه فوق بیان می‌کند که فرایندهای مانا بایستی دارای میانگین ثابت، واریانس ثابت و ساختار خودکوواریانس ثابت باشند. این مباحث در فصل سیزدهم به تفصیل بررسی گردید.

1- spurious regression
2- auto-covariance

۱٤-٤ سری‌های زمانی مانا

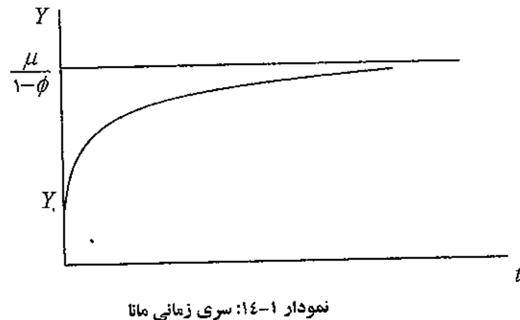
سری Y_t را مانا گویند هر گاه یک شوک تصادفی به آن وارد شود، اثر آن با گذشت زمان به سمت صفر میل کند. در این صورت، Y_t از مسیر خود (مقدار تعادلی و باثبات) خارج شده و مجدداً به آن برمی‌گردد. ویژگی یک سری زمانی مانا را می‌توان توسط فرایند AR(۱) توصیف نمود:

$$Y_t=\mu+\phi Y_{t-1}+u_t \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

شرط مانایی آن است که $|\phi|<1$ باشد. در فصل سیزدهم دیدیم که میانگین غیرشرطی Y_t برابر با $\frac{\mu}{1-\phi}$ است. این مقدار معادل با مقدار بلندمدت و باثبات Y_t است. مدل (۲-۱۴) بدین دلیل مانا گفته می‌شود که طبق آن، Y_t یک مقدار ثابت دارد (برابر با $\frac{\mu}{1-\phi}$) که هرگاه به خاطر شوک‌های تصادفی، از آن منحرف شود، مجدداً به آن بازمی‌گردد. برای بررسی این موضوع، معادله (۲-۱۴) را مشابه یک معادله تفاضلی حل می‌کنیم، که جواب آن عبارت است از (ضمیمه الف):

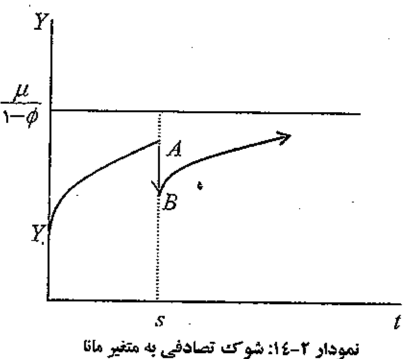
$$Y_t=\frac{\mu}{1-\phi}+(Y_0-\frac{\mu}{1-\phi})\phi^t+\sum_{i=0}^{t-1}\phi^i u_{t-i} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

ابتدا فرض کنید که جملات تصادفی صفر باشند. در این صورت $Y_t=\frac{\mu}{1-\phi}+(Y_0-\frac{\mu}{1-\phi})\phi^t$ است که نمودار آن به صورت زیر می‌باشد:



نمودار ۱-۱٤: سری زمانی مانا

چون $۱ > \phi > ۰$ است، Y به سمت مقدار تعادلی یا بلندمدت خود (یعنی $\frac{\mu}{1-\phi}$) میل می‌کند. اگر یک شوک تصادفی منفی در زمان s به Y وارد شود، آنگاه Y_t ابتدا دچار یک کاهش شده و سپس شروع به بازگشت به سمت $\frac{\mu}{1-\phi}$ می‌کند.



نمودار ۲-۱۴: شوک تصادفی به متغیر مانا

نمودار فوق نشان می‌دهد که ابتدا در زمان s مقدار Y از نقطه A به B کاهش می‌یابد ولی مجدداً شروع به افزایش می‌کند و به سمت $\frac{\mu}{1-\phi}$ برمی‌گردد. یک سری زمانی که چنین رفتاری داشته باشد، مانا می‌گویند. این رفتار ناشی از آن است که در معادله (۳-۱۴) ضریب شوک‌های تصادفی (ϕ^i) کوچکتر از واحد است:

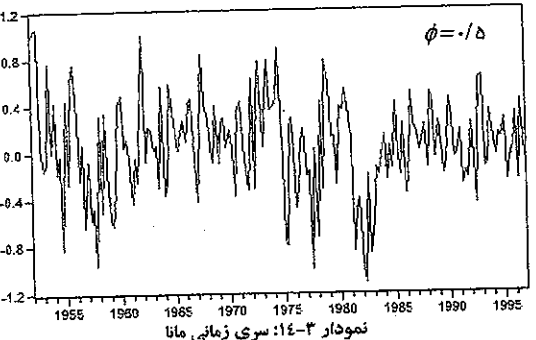
$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta u_{t-s}} = \phi^s \quad , \quad s = ۰,۱,۲,\cdots \qquad (۱۴\text{-}۴)$$

و یا

$$\frac{\Delta Y_{t+s}}{\Delta u_t} = \phi^s \quad , \quad s = ۰,۱,۲,\cdots \qquad (۱۴\text{-}۵)$$

اثر شوک وارده در زمان t بستگی به گذشت زمان دارد. اثر این شوک در زمان $t+s$ برابر با ϕ^s است. از آنجا که $|\phi| < ۱$ است، لذا اثر شوک‌ها میرا است.

به طور کلی یک سری مانا دارای یک مقدار قطعی و معین است که حول آن نوسان می‌کند. این نوسانات ناشی از عوامل تصادفی است. به‌عنوان نمونه، نمودار زیر رفتار یک سری مانا را نشان می‌دهد.



نمودار ۳-۱۴: سری زمانی مانا

۵-۱۴ روند قطعی

در بخش قبلی دیدیم که سری‌های مانا حول یک مقدار ثابت، نوسان می‌کند. حال نوع دیگری از سری زمانی را بررسی می‌کنیم که حول یک روند قطعی و معین، نوسان می‌کند. چنین فرایندی از دو بخش تشکیل شده است: یکی روند و دیگری جزء تصادفی.

$$Y_t = \alpha + \beta t + u_t \qquad (۱۴\text{-}۶)$$

امید ریاضی و واریانس Y_t عبارت است از:

$$E(Y_t) = \alpha + \beta t \qquad (۱۴\text{-}۷)$$

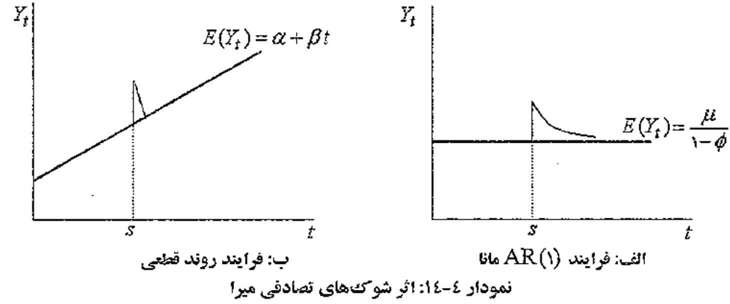
$$\text{var}(Y_t) = E[Y_t - E(Y_t)]^۲ = E[Y_t - (\alpha + \beta t)] = E(u_t^۲) = \sigma^۲$$

بنابراین، امید ریاضی Y_t دارای روند قطعی و معین است، به‌گونه ای که Y_t همواره حول میانگین خود، نوسان می‌کند. این مفهوم تا حدود زیادی مشابه با رفتار سری‌های مانا است. بنابراین، سری مانا که توسط فرایند AR(1) توصیف شد و الگوی روند قطعی، دو وجه تشابه دارند:

۱- هر دو حول میانگین، نوسان می‌کنند.

۲- اثر شوک‌های تصادفی بر هر دو، میرا است.

این دو ویژگی سبب می‌شود که هر دو مدل را از نوع مدل‌های مانا بدانیم. این مشابهت‌ها در نمودار ۴-۱۴ نشان داده شده است.



ب: فرایند روند قطعی — الف: فرایند $AR(1)$ مانا

نمودار ۴-۱۴: اثر شوک‌های تصادفی میرا

شرط مانا بودن روند قطعی آن است که u_t یک فرایند مانا باشد. از طرف دیگر، چون امید ریاضی Y_t تابعی از t است لذا شرایط مانایی ضعیف را تأمین نمی‌کند. اما همان‌طور که در مبحث بعدی خواهیم دید، تعریف نامانایی به‌گونه‌ای است که طبق آن، فرایند روند قطعی شرایط مانایی را دارد.

۶-۱۴ روند تصادفی

روند تصادفی بیانگر وضعیتی است که یک سری زمانی دارای روند مشخصی نیست و به طور تصادفی دچار تغییر روند می‌شود. بدیهی است که یک متغیر به‌سادگی دچار تغییر روند نمی‌شود، مگر آنکه تغییرات آن ناشی از عوامل و شوک‌هایی باشد که اثر آنها ماندگار باشد. این بحث یکی از نکات کلیدی نظریه دور تجاری حقیقی[1] است. این نظریه‌پردازان بر این باور بودند که سری‌های زمانی اقتصادی، دچار تغییرات اساسی می‌شوند به‌گونه ای که دچار «جابجایی روند» می‌شوند. لذا معتقدند که تغییر روند وقتی رخ می‌دهد که عوامل حقیقی مانند بهره‌وری و تکنولوژی موجب تغییر متغیرهای اقتصادی شده باشند. آنان این بحث را در مقابل تأثیر عوامل اسمی مطرح کردند. زیرا عوامل اسمی نمی‌توانند روند متغیرها را تغییر دهند، بلکه فقط آنها را از روند خود خارج کرده ولی مجدداً به روند برمی‌گردند. این بحث، نقطهٔ آغازی بر کاربرد مباحثی از قبیل روند تصادفی، آزمون ریشه واحد، انباشتگی و هم‌انباشتگی در مباحث اقتصادی و اقتصاد سنجی بود.

روند تصادفی را می‌توان توسط فرایند $AR(1)$ توصیف نمود که در آن $\phi=1$ است:

$$Y_t=\mu+Y_{t-1}+u_t \qquad (14\text{-}8)$$

این فرایند را «گام تصادفی با رانش»[2] می‌گویند که μ جملهٔ رانش است.

1- real business cycle
2- random walk with drift

به منظور بررسی ویژگی این مدل، آن را به صورت زیر حل می‌کنیم:

$$Y_1=\mu+Y_0+u_1$$
$$Y_2=\mu+Y_1+u_2=\mu+(\mu+Y_0+u_1)+u_2=2\mu+Y_0+u_1+u_2$$
$$Y_3=\mu++Y_2+u_3=\mu+(2\mu+Y_0+u_1+u_2)+u_3=3\mu+Y_0+u_1+u_2+u_3$$
$$\vdots$$
$$Y_t=Y_0+\mu t+u_1+u_2+\cdots+u_t=Y_0+\mu t+\sum_{i=0}^{t-1}u_{t-i} \qquad (14\text{-}9)$$

در مدل مانای $AR(1)$، دیدیم که ضریب u_{t-i} برابر با ϕ^i است، اما در اینجا برابر با ۱ می‌باشد. بدین‌ترتیب اثر شوک زمان $t-s$ بر Y_t برابر است با:

$$\frac{\Delta Y_t}{\Delta u_{t-s}}=1 \quad , \quad s=0,1,2,\cdots \qquad (14\text{-}10)$$

بنابراین، اثر شوک وارده در زمان $t-s$، با گذشت زمان، کاهش نمی‌یابد. لذا اگر شوکی Y_t را افزایش دهد، این افزایش همیشگی خواهد بود.

امید ریاضی و واریانس Y_t برابر است با:

$$E(Y_t)=Y_0+\mu t \qquad (14\text{-}11)$$
$$\text{var}(Y_t)=E(Y_t-EY_t)^2=E[Y_t-(Y_0+\mu t)]^2$$
$$=E(\sum_{i=0}^{t}u_i)^2=\sum_{i=1}^{t}E(u_i^2)=t\sigma^2 \quad , \quad E(u_iu_j)\neq 0$$

ملاحظه می‌شود که مانند فرایند روند قطعی، امید ریاضی Y_t تابعی خطی از t است. در واقع در هر دو مدل، Y_t برابر با امید ریاضی به‌علاوهٔ شوک‌های تصادفی است:

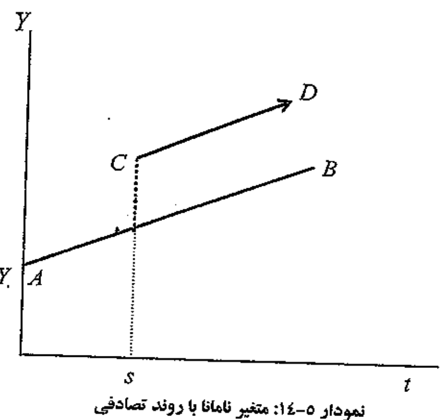
روند قطعی: $Y_t=E(Y_t)+u_t=\alpha+\beta t+u_t$

روند تصادفی: $Y_t=E(Y_t)+\sum_{i=0}^{t-1}u_{t-i}=Y_0+\mu t+u_1+u_2+\cdots+u_t=Y_0+\mu t+\sum_{i=0}^{t-1}u_{t-i}$

در مدل روند قطعی، مقدار Y_t در زمان t فقط تابعی از شوک‌های زمان t است و هیچ اثری از شوک‌های قبلی وجود ندارد. این در حالی است که در مدل روند تصادفی، مقدار Y_t در زمان t، علاوه بر شوک‌های زمان t، تابعی از شوک‌های قبلی نیز هست. به‌عبارت دیگر اثر شوک‌های زمان‌های گذشته، هرگز از بین نمی‌رود. در واقع Y_t متأثر از اثرات انباشته شدهٔ شوک‌های تصادفی از گذشته تا به‌حال است. به‌همین دلیل Y_t را فرایند یا سری زمانی انباشته[1] می‌گویند.

1- integrated

برای بررسی اثر شوک‌های تصادفی در مدل روند تصادفی، ابتدا فرض کنید که هیچ شوکی وجود نداشته باشد. بدیهی است که در این حالت طبق مدل (۹-۱۴)، روند Y_t توسط خط AB توصیف می‌شود. حال فرض کنید که در زمان s یک شوک تصادفی مثبت به Y_t وارد شود ($u_s > ۰$). برای سادگی فرض کنید که قبل و بعد از زمان s هیچ شوکی دیگری وجود نداشته باشد. شوک وارده در زمان s، روند Y_t را به CD انتقال می‌دهد و به مسیر قبلی خود بر نمی‌گردد. وقتی که این شوک‌ها تکرار می‌شوند، موجب می‌شود که روند Y_t ثابت نباشد به‌گونه‌ای که همواره از یک روند به روند دیگر می‌افتد. این همان الگوی گام تصادفی است که مسیر آن مشخص نیست، بلکه مسیر آن به‌صورت تصادفی تعیین می‌شود. به‌عبارت ساده، «معلوم نیست به‌کجا می‌رود».



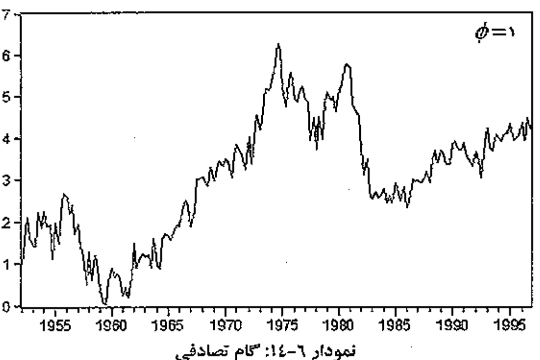
نمودار ۵-۱۴: متغیر نامانا با روند تصادفی

قبل و بعد از زمان s مقدار Y_t برابر است با:

$$Y_t = Y_۰ + \mu t \qquad t < s$$
$$Y_t = Y_۰ + \mu t + u_s \qquad t \geq s \tag{۱۴-۱۲}$$

از طرف دیگر، ضرایب خودهمبستگی در فرایند AR(1) برابر با $\rho_s = \phi^s$ است (فصل سیزدهم). در اینجا چون $\phi = ۱$ است، لذا ضرایب خودهمبستگی برابر با ۱ می‌باشند که بیانگر نامانایی Y_t است. توجه شود که اگر جملهٔ رانش (μ) وجود نداشته باشد، هنوز Y_t نامانا است، زیرا واریانس آن تابعی از t است، هرچند که امید ریاضی آن برابر با $Y_۰$ می‌باشد. علاوه‌براین،

همان‌طور که معادله (۹-۱۴) نشان می‌دهد، Y_t هنوز تابعی از شوک‌های تصادفی زمان‌های گذشته می‌باشد. نمودار زیر نمونه‌ای از گام تصادفی است.



نمودار ۶-۱۴: گام تصادفی

به‌طور کلی اگر یک سری زمانی نامانا باشد، برای آن اصطلاحات مختلفی به‌کار می‌رود که عبارتند از:

۱- Y_t از فرایند گام تصادفی به صورت $Y_t = Y_{t-1} + u_t$ و یا از گام تصادفی با رانش به‌صورت $Y_t = \mu + Y_{t-1} + u_t$ تبعیت می‌کند.

۲- Y_t فرایندی با ریشه واحد است که دلالت بر واحد بودن ϕ در مدل $Y_t = \mu + \phi Y_{t-1} + u_t$ دارد.

۳- Y_t دارای روند تصادفی است.

۴- Y_t یک سری انباشته است که اثر شوک‌های تصادفی دوره‌های گذشته بر Y_t، روی‌هم انباشته می‌شود.

۵- Y_t متغیری است که اثر شوک های تصادفی وارده به آن، با گذشت زمان از بین نمی‌رود.

۷-۱۴ ترکیب روند قطعی و روند تصادفی

در اینجا دو مدل روند قطعی و روند تصادفی را با هم ترکیب می‌کنیم. بدین منظور جملهٔ روند را به مدل (۸-۱۴) اضافه می‌کنیم:

$$Y_t = \mu + \beta t + Y_{t-1} + u_t \tag{۱۴-۱۳}$$

با حل این معادله، خواهیم داشت:[1]

$$Y_t = Y_0 + (\mu + \frac{\beta}{2})t + \frac{\beta}{2}t^2 + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

بنابراین، Y_t تابع درجهٔ دو از t است. امید ریاضی آن برابر با $Y_0 + (\mu + \frac{\beta}{2})t + \frac{\beta}{2}t^2$ و واریانس آن برابر با $t\sigma^2$ است که همچنان نامانا است. در اینجا نیز Y_t تحت تأثیر شوک‌های تصادفی زمان‌های گذشته است که اثر آنها کاهش نمی‌یابد.

روش دیگر برای ترکیب روند قطعی و روند تصادفی، تعریف الگوی زیر است:

$$Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t = \phi\varepsilon_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۱۴)$$

ε_t انحراف از روند قطعی در زمان t است. معادله Y_t را با یک تأخیر نوشته و در ϕ ضرب می‌کنیم و سپس نتیجه را از Y_t کم می‌کنیم:

$$\begin{matrix} Y_t = a_0 + a_1 t + \varepsilon_t \\ \phi Y_{t-1} = \phi a_0 + \phi a_1 (t-1) + \phi\varepsilon_{t-1} \end{matrix} \Rightarrow Y_t = [a_0(1-\phi) + a_1\phi] + a_1(1-\phi)t + \phi Y_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۱۵)$$

معادله فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi Y_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۱۶)$$

که $\alpha_0 = a_0(1-\phi) + a_1\phi$ و $\alpha_1 = a_1(1-\phi)$ است. براین اساس، می‌توان حالت‌های مختلف را برای Y_t تعریف نمود:

۱- اگر $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ و $\phi = 0$ باشد، آنگاه $Y_t = u_t$ خواهد بود که بیانگر «فرایند تصادفی محض» می‌باشد. فرایند تصادفی محض، همواره مانا است زیرا امید ریاضی و واریانس آن ثابت است و خودکوواریانس‌های آن نیز صفر می‌باشد.

۲- اگر $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ و $\phi = 1$ باشد، در این صورت Y_t از فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کند که یک فرایند نامانا است.

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۱۷)$$

[1] برای حل این معادله، $\beta t + u_t$ را برابر w_t بگیرید. در این صورت مشابه معادله (۱-۱۲) خواهد شد:

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + w_t \Rightarrow Y_t = Y_0 + \mu t + \sum_{i=1}^{t} w_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{t} w_i = \sum_{i=1}^{t}(\beta t + u_i) = \beta\frac{t(t+1)}{2} + \sum_{i=1}^{t} u_i$$

۳- اگر $\alpha_0 \neq 0$، $\alpha_1 = 0$ و $\phi = 1$ باشد، در این صورت Y_t از گام تصادفی با رانش تبعیت می‌کند که یک فرایند نامانا است.

$$Y_t = \alpha_0 + Y_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۱۸)$$

۴- اگر $\alpha_0 \neq 0$، $\alpha_1 \neq 0$ و $\phi = 1$ باشد، در این صورت نیز Y_t یک فرایند نامانا است.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + Y_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۱۹)$$

۱۴-۸ روندزدایی

روندزدایی به معنی حذف روند از یک سری زمانی است. روند زدایی از یک سری زمانی بستگی به ماهیت روند دارد، زیرا ممکن است روند آن تصادفی یا قطعی باشد.

دیدیم که یک سری زمانی که دارای روند تصادفی است، توسط گام تصادفی توصیف می‌شود:

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + u_t$$

تفاضل مرتبه اول Y_t عبارت است از:

$$\Delta Y_t = \mu + u_t$$

از آنجا که u_t مانا است لذا ΔY_t نیز مانا خواهد بود. بنابراین، فرایند گام تصادفی با تفاضل‌گیری، مانا خواهد شد. به‌عبارت دیگر، تفاضل‌گیری موجب حذف روندهای تصادفی شده است.

حال اگر Y_t دارای روند قطعی باشد، تفاضل مرتبه اول آن عبارت است از:

$$\Delta Y_t = \beta + \Delta u_t = \beta + u_t - u_{t-1} \qquad (۱۴-۲۰)$$

مدل فوق از میانگین متحرک مرتبه اول تبعیت می‌کند. ازآنجا که $\theta = 1$ است لذا یک فرایند معکوس‌پذیر نیست و نمی‌توان آن را تبدیل به فرایند AR نمود. در این صورت، نمی‌توان آن را تبدیل به یک خودرگرسیون کرده و آن را بر حسب مقادیر گذشته بیان نمود.

روش مناسب برای روندزدایی از یک فرایند روند قطعی، این است که ابتدا روند $\alpha + \beta t$ را برآورد نموده و سپس Y_t را روندزدایی کنیم:

$$Y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} t) = u_t \qquad (۱۴-۲۱)$$

$Y_t - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} t)$ فرایندی است که حول صفر، نوسان می‌کند.

۱۴-۹ آزمون ریشه واحد

همان‌طور که اشاره شد، ریشه واحد معادل با $\phi=1$ در هر یک از مدل‌های زیر است:

$$Y_t=\phi Y_{t-1}+u_t \qquad (14-22)$$

$$Y_t=\mu+\phi Y_{t-1}+u_t \qquad (14-22)$$

$$Y_t=\mu+\beta t+\phi Y_{t-1}+u_t \qquad (14-23)$$

نتیجه بحث فوق آن است که نامانایی Y_t یا ریشه واحد $(\phi=1)$ توسط فرایند AR(1) توصیف می‌شود که ممکن است بدون عرض از مبدأ، با عرض از مبدأ و یا با روند باشد.

فرضیه ریشه واحد را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$H_0: \phi=1$ ریشه واحد وجود دارد و متغیر مورد نظر نامانا است

$H_1: \phi<1$ ریشه واحد وجود ندارد و متغیر مورد نظر مانا است (۱۴-۲۴)

اما برای آزمون‌های کاربردی و مشابهت آن با آزمون‌های مرسوم، معادله (۱۴-۲۲) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Y_t-Y_{t-1}=\phi Y_{t-1}-Y_{t-1}+u_t \;\Rightarrow\; \Delta Y_t=\theta Y_{t-1}+u_t \;,\;\; \theta=\phi-1 \qquad (14-25)$$

در (۱۴-۲۵) آزمون ریشه واحد معادل $\theta=0$ است و $\phi<1$ نیز معادل با $\theta<0$ می‌باشد. لذا فرضیه (۱۴-۲۴) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$H_0: \theta=0$ ریشه واحد وجود دارد و متغیر مورد نظر نامانا است

$H_1: \theta<0$ ریشه واحد وجود ندارد و متغیر مورد نظر مانا است (۱۴-۲۶)

۱- بدون عرض از مبدأ و روند:

$$\Delta Y_t=\theta Y_{t-1}+u_t \qquad (14-27)$$

که در معادله (۱۴-۱۱)، $\alpha_0=\alpha_1=0$ خواهد بود.

۲- با عرض از مبدأ و بدون روند:

$$\Delta Y_t=\alpha_0+\theta Y_{t-1}+u_t \qquad (14-28)$$

که در معادله (۱۴-۱۱)، $\alpha_1=0$ است.

۳- با عرض از مبدأ و روند:

$$\Delta Y_t=\alpha_0+\alpha_1 t+\theta Y_{t-1}+u_t \qquad (14-29)$$

برای آزمون ریشه واحد، یکی از معادلات (۱۴-۲۷)، (۱۴-۲۸) و (۱۴-۲۹) را برآورد کرده و سپس بر اساس آمارهٔ t در خصوص فرضیه $\theta=0$ قضاوت می‌کنیم. مقدار آمارهٔ t را با مقدار بحرانی مقایسه کرده و نتیجه‌گیری می‌کنیم. با توجه به فرضیه H_1، ناحیه بحرانی به‌صورت زیر می‌باشد.

رد H_0
(رد ریشه واحد)
حد بحرانی

آمارهٔ t برای آزمون فرضیه $\theta=0$ عبارت است از:

$$t=\frac{\hat{\theta}}{SE(\hat{\theta})} \qquad (14-30)$$

برای تعیین مقادیر بحرانی t نمی‌توان از جدول توزیع t استفاده نمود، زیرا این مقادیر بر اساس فرض مانایی به‌دست آمده‌اند. در اینجا تحت فرضیه H_0، Y_t نامانا است و لذا این توزیع به توزیع t و در حد به توزیع نرمال گرایش ندارد. به‌همین دلیل مقادیر بحرانی دیگری برای آن محاسبه شده است. این مقادیر بحرانی به این نکته حساس هستند که آیا مدل دارای عرض از مبدأ و روند هست یا نه. به‌همین دلیل در آزمون ریشه واحد بایستی حالت‌های مختلف را بررسی نمود.

تا اینجا، آزمون دیکی- فولر را برای حالتی مطرح کردیم که Y_t از فرایند AR(1) تبعیت می‌کند. این آزمون را می‌توان برای حالت کلی، یعنی وقتی که Y_t از AR(p) و یا حتی از ARMA(p,q) تبعیت می‌کند، تعمیم داد که معروف به آزمون دیکی- فولر تقویت‌شده (ADF)[1] می‌باشد. اگر Y_t از AR(p) به‌صورت $Y_t=\mu+\phi_1 Y_{t-1}+\phi_2 Y_{t-2}+\cdots+\phi_p Y_{t-p}+u_t$ تبعیت کند، آنگاه می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Delta Y_t=\mu+\theta Y_{t-1}+\sum_{i=1}^{p}\gamma_i \Delta Y_{t-i}+u_t \qquad (14-31)$$

که $\theta=\phi_1+\cdots+\theta_p-1$ و $\gamma_j=\sum_{k=j+1}^{p}\phi_k$ است. برای مثال در AR(2)، اگر از طرفین آن Y_{t-1} را کم کرده و به سمت راست نیز $\phi_2 Y_{t-1}$ را اضافه و کم کنیم، رابطه $\Delta Y_t=\mu+\theta Y_{t-1}+\gamma_1\Delta Y_{t-1}+u_t$ به‌دست می‌آید که $\theta=\phi_1+\phi_2-1$ و $\gamma_1=-\theta_2$ است. همچنین برای AR(3)، رابطهٔ

[1] Augment Dikey-Fuller

$\Delta Y_t=\mu+\theta Y_{t-1}+\gamma_1\Delta Y_{t-1}+\gamma_2\Delta Y_{t-2}+u_t$ به‌دست می‌آید که $\theta=\phi_1+\phi_2+\phi_3-1$ ، $\gamma_1=-(\theta_2+\theta_3)$ و $\gamma_2=-\theta_3$ است. بدیهی است همان طور که در فصل ششم دیدیم اگر u_t دارای خودهمبستگی باشد، برای رفع خودهمبستگی، متغیر وابستهٔ تأخیری را به سمت راست رگرسیون اضافه می‌شود. براین اساس، می‌توان گفت که مدل (۳۱-۱۴) خودهمبستگی ندارد.

آزمون ریشه واحد با استفاده از Eviews فایل data2

برای انجام آزمون ریشه واحد در Eviews ابتدا از منوی Quick گزینه Series Statistics و سپس گزینه Unit root test را انتخاب می‌کنیم. در این حالت پنجره‌ای باز می‌شود که نام متغیر مورد نظر را در آن وارد می‌کنیم.

Series Name

Series name:

OK Cancel

با وارد کردن نام متغیر و انتخاب OK پنجره Unit root test باز می‌شود:

Unit Root Test

Test type: Augmented Dickey-Fuller

Test for unit root in: (•) Level ( ) 1st difference ( ) 2nd difference

Include in test equation: (•) Intercept ( ) Trend and intercept ( ) None

Lag length: (•) Automatic selection: Schwarz Info Criterion — Maximum lags: 9 ( ) User specified:

OK Cancel

در این پنجره می‌توان آزمون ریشه واحد (نامانایی) را برای مقدار متغیر (Level)، تفاضل مرتبه اول (1st Difference) و تفاضل مرتبه دوم (2nd Difference) انجام داد. همچنین می‌توان حالت‌های مختلف را که معادله مورد نظر دارای عرض از مبدأ باشد یا خیر در نظر گرفت. علاوه‌براین، می‌توان تعداد وقفه‌هایی مورد نیاز (Lagged Difference) (مانند معادله ۲۳-۱۴ که در حالت کلی برابر با p است) را وارد نمود. اگر تعداد وقفه‌ها را برابر با ۰ قرار دهیم مشابه معادله (۲۲-۱۴) می‌باشد. اگر بخواهیم تعداد وقفه‌ها را خودمان تعیین کنیم، گزینه user specified را انتخاب کرده و در مقابل آن تعداد وقفه‌های مورد نظر را وارد می‌کنیم. اما اگر بخواهیم خود نرم‌افزار Eviews تعداد وقفه‌های لازم (تعدادوقفه‌هایی که معنادار هستند) را انتخاب کند در این صورت اولاً بایستی گزینه Automatic selection را انتخاب کنیم و ثانیاً در مقابل گزینه Maximum Lags، حداکثر تعداد وقفه‌ها را که لازم می‌دانیم وارد می‌کنیم. در این حالت فقط تعداد وقفه‌هایی که از نظر آماری معنادار هستند به حساب می‌آید.

به‌عنوان مثال، آزمون ریشه واحد برای تولید ناخالص داخلی به قیمت ثابت (Y_t) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

Series: Y Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph | Stats

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on Y

Null Hypothesis: Y has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=0)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.524016	0.8018
Test critical values:	1% level	-4.243644	
	5% level	-3.544284	
	10% level	-3.204699	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Y)
Method: Least Squares
Date: 02/01/11 Time: 09:43
Sample (adjusted): 1346 1380
Included observations: 35 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y(-1)	-0.127640	0.083752	-1.524016	0.1373
C	17455.54	8926.172	1.955546	0.0593
@TREND(1338)	846.8632	503.7782	1.284024	0.2084

R-squared	0.068086	Mean dependent var	7280.163
Adjusted R-squared	0.009841	S.D. dependent var	14315.62
S.E. of regression	14245.01	Akaike info criterion	22.04802
Sum squared resid	6.49E+09	Schwarz criterion	22.18133
Log likelihood	-382.8403	Hannan-Quinn criter.	22.09404
F-statistic	1.168959	Durbin-Watson stat	1.103767
Prob(F-statistic)	0.323606		

در اینجا گزینه روند هم انتخاب شده است که با @TREND(1338) نشان داده شده است. در بالای جدول، مقدار ADF برابر با ۱/۵۲٤- است که در ناحیه بحرانی قرار ندارد. لذا فرضیه H_0 یعنی وجود ریشه واحد رد نمی‌شود. بنابراین متغیر تولید ناخالص داخلی دارای ریشه واحد است و نامانا می‌باشد. اما در اینجا آماره دوربین- واتسون نشان می‌دهد که این مدل دارای خود همبستگی است، لذا برای رفع خود همبستگی، تعداد وقفه‌ها را در پنجره Unit root test برابر با ۵ قرار می‌دهیم در این حالت، نتایج عبارتند از:

Series: Y Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph | Stats

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on Y

Null Hypothesis: Y has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=5)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-2.403310	0.3714
Test critical values:	1% level	-4.252879	
	5% level	-3.548490	
	10% level	-3.207094	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Y)
Method: Least Squares
Date: 02/01/11 Time: 09:46
Sample (adjusted): 1347 1380
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
Y(-1)	-0.188500	0.078433	-2.403310	0.0226
D(Y(-1))	0.502285	0.156349	3.212595	0.0031
C	18514.31	8611.217	2.150023	0.0397
@TREND(1338)	972.0467	459.6667	2.114677	0.0429

R-squared	0.308321	Mean dependent var	7240.983
Adjusted R-squared	0.239153	S.D. dependent var	14529.00
S.E. of regression	12673.15	Akaike info criterion	21.84249
Sum squared resid	4.82E+09	Schwarz criterion	22.02206
Log likelihood	-367.3223	Hannan-Quinn criter.	21.90373
F-statistic	4.457568	Durbin-Watson stat	2.120349

مجدداً ملاحظه می‌شود که تولید ناخالص داخلی به قیمت ثابت، دارای ریشه واحد است. در حالی که برای این

مدل DW=۲/۱ بوده و خود همبستگی ندارد. نتایج فوق نشان می‌دهد که فقط وقفه مرتبه اول معنادار است و چون از گزینه Automatic selection استفاده کرده‌ایم، لذا علی‌رغم آنکه تعداد وقفه را برابر با ۵ قرار داده‌ایم ولی نتایج فقط برای یک وقفه ارائه شده است، زیرا وقفه‌های ۲ تا ٤ معنادار نبوده‌اند.

حال اگر در پنجره Unit root test، ریشه واحد را برای تفاضل مرتبه اول بررسی کنیم، با انتخاب 1st Difference نتیجه زیر به دست می‌آید:

Series: Y Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(Y)

Null Hypothesis: D(Y) has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=0)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.537755	0.0511
Test critical values:	1% level	-4.252879	
	5% level	-3.548490	
	10% level	-3.207094	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Y,2)
Method: Least Squares
Date: 02/01/11 Time: 09:56
Sample (adjusted): 1347 1380
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(Y(-1))	-0.579839	0.163900	-3.537755	0.0013
C	4156.896	6662.584	0.623916	0.5372
@TREND(1338)	4.432251	238.2677	0.018602	0.9853

S.E. of regression	13614.41	Akaike info criterion	21.95974
Sum squared resid	5.75E+09	Schwarz criterion	22.09442
Log likelihood	-370.3156	Hannan-Quinn criter.	22.00567
Durbin-Watson stat	1.964504		

نتایج فوق نشان می‌دهد که در سطح ۵/۱ درصد، مقدار ADF معنی‌دار است، زیرا مقدار آن از ۳/۲- کوچکتر است. بنابراین تولید ناخالص داخلی با تفاضل مرتبه اول، مانا می‌باشد. به‌عبارت دیگر با تفاضل‌گیری مرتبه اول می‌توان این متغیر را تبدیل به یک متغیر مانا نمود.

در اینجا چون متغیر روند معنی‌دار نیست لذا می‌توان آن را حذف نمود. با حذف متغیر روند نتایج عبارتند از:

Series: Y Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(Y)

Null Hypothesis: D(Y) has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=0)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.599447	0.0110
Test critical values:	1% level	-3.639407	
	5% level	-2.951125	
	10% level	-2.614300	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(Y,2)
Method: Least Squares
Date: 02/01/11 Time: 09:52
Sample (adjusted): 1347 1380
Included observations: 34 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
D(Y(-1))	-0.579986	0.161132	-3.599447	0.0011
C	4270.959	2565.050	1.665059	0.1057

R-squared	0.288193	Mean dependent var	169.7242
Adjusted R-squared	0.265949	S.D. dependent var	15640.27
S.E. of regression	13400.07	Akaike info criterion	21.90093
Sum squared resid	5.75E+09	Schwarz criterion	21.99072
Log likelihood	-370.3158	Hannan-Quinn criter.	21.93155
F-statistic	12.95602	Durbin-Watson stat	1.964200
Prob(F-statistic)	0.001063		

در مدل فوق،فرضیه ریشه واحد حتی در سطح ۵ درصد نیز معنی‌دار نیست و لذا ریشه واحد وجود ندارد.

آزمون دیگری توسط فیلیپس و پرون (PP)[1] ارائه شده است که مشابه آزمون دیکی-فولر است. تفاوت آزمون فیلیپس- پرون با آزمون دیکی- فولر در این است که u_tها می‌توانند دارای خودهمبستگی باشند، هر چند که نتایج این دو آزمون تا حدود زیادی نزدیک است. در آزمون ADF وقتی متغیر وابسته تأخیری (ΔY_{t-i}ها) به سمت راست اضافه می‌شود، خودهمبستگی را

1- Phillips-Perron test

برطرف می‌کند، اما در آزمون PP آماره آزمون به‌گونه‌ای تعدیل می‌شود که خودهمبستگی u_tها را لحاظ می‌کند.

آزمون فیلیپس- پرون در Eviews

برای انجام آزمون فیلیپس- پرون می‌توان در پنجرهٔ Unit Root Test در قسمت Test Type به‌جای آزمون دیکی- فولر، آزمون فیلیپس- پرون یا سایر روش‌ها را انتخاب نمود.

به‌هرحال اگر Y_t مانا نباشد ولی تفاضل آن یعنی ΔY_t مانا باشد در این صورت می‌گوییم که Y_t دارای یک ریشه واحد است و آن را با I(۱) نشان می‌دهند. I(۱) را اصطلاحاً انباشته[1] از مرتبه ۱ می‌گویند.

حال اگر Y_t دارای دو ریشه واحد باشد آن را با I(۲) نشان می‌دهند و بدین معنی است که Y_t و ΔY_t مانا نیستند بلکه تفاضل مرتبه دوم آن یعنی $\Delta^2 Y_t$ مانا می‌باشد. در این حالت گفته می‌شود که Y_t، ΔY_t و $\Delta^2 Y_t$ به ترتیب I(۲)، I(۱) و I(۰) هستند. در حالت کلی اگر Y_t با تفاضل‌گیری مرتبهٔ d تبدیل به یک فرایند مانا شود آن را با $I(d)$ نشان می‌دهند.

طبق بحث فوق تاکنون فرضیه زیر را آزمون نموده‌ایم:

$H_0: Y_t \sim I(1)$ Y_t یک ریشه واحد دارد و نامانا است

$H_1: Y_t \sim I(0)$ Y_t ریشه واحد ندارد و مانا است

حال اگر فرضیه H_0 رد شود بدین معنی است که Y_t ریشه واحد ندارد. از طرف دیگر اگر H_0 رد نشود بدین معنی است که Y_t لااقل یک ریشه واحد دارد. زیرا Y_t ممکن است چند ریشه واحد داشته باشد. بدین ترتیب وقتی در آزمون ریشه واحد بدین نتیجه می‌رسیم که Y_t دارای ریشه واحد است، بایستی فرضیه وجود چند ریشه واحد را نیز بررسی کنیم:

$H_0: Y_t \sim I(2)$ Y_t دارای دو ریشه واحد است و ΔY_t نامانا است

$H_1: Y_t \sim I(1)$ Y_t دارای یک ریشه واحد است و ΔY_t مانا است

این آزمون معادل است با:

$H_0: \Delta Y_t \sim I(1)$ ΔY_t نامانا است

$H_1: \Delta Y_t \sim I(0)$ ΔY_t مانا است

1- integrated

معمولاً در اغلب موارد، تفاضل مرتبه اول، مانا می‌باشد و در غیر این صورت تفاضل مرتبه دوم مانا خواهد بود. به‌عبارت دیگر اغلب متغیرهای اقتصادی و مالی با یک یا دو بار تفاضل‌گیری، مانا می‌شوند.

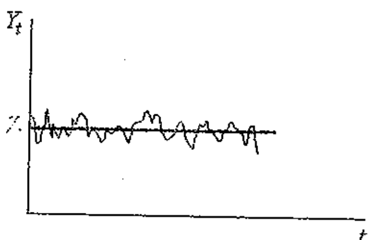
۱٤-۱۰ آزمون ریشه واحد و تغییر ساختاری

بسیاری از سری‌های زمانی دچار تغییر یا شکست ساختاری می‌شوند. ممکن است یک سری زمانی مانا که دچار تغییر ساختاری شده است، به‌اشتباه آن را به‌عنوان یک سری نامانا تصور کنیم. بدین منظور مدل ساده زیر را در نظر بگیرید که Y_t حول مقدار ثابت γ_0 نوسان می‌کند:

$$Y_t = \gamma_0 + u_t \qquad (۱۴-۳۲)$$

γ_0 می‌تواند مقدار تعادلی Y باشد. بدیهی است که Y مانا است زیرا هر شوکی که از طریق u وارد شود، Y را از حالت تعادلی خارج کرده ولی مجدداً به آن برمی‌گردد. به‌هرحال، Y شرایط مانایی را دارد.

$$E(Y_t) = \gamma_0$$
$$\mathrm{var}(Y_t) = \mathrm{var}(u_t) = \sigma^2$$
$$\mathrm{cov}(Y_t ; Y_{t-s}) = \mathrm{cov}(u_t , u_{t-s}) = 0$$

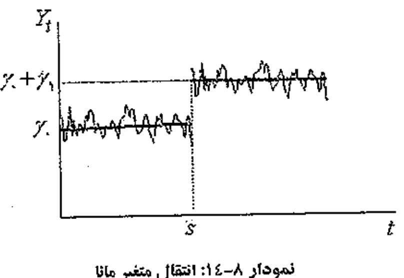


نمودار ۱٤-۷: متغیر مانا

حال تصور کنید که در زمان معینی مانند s، متغیر Y_t دچار تغییر ساختاری شود و برای همیشه مقدار آن به‌اندازه γ_1 افزایش یابد. این تغییر ساختاری را می‌توان به کمک متغیرهای مجازی لحاظ نمود:

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 D_s + u_t$$
$$D_s = \begin{cases} 1 & ; \quad t \geq s \\ 0 & ; \quad t < s \end{cases}$$

بنابراین، Y_t از زمان s به بعد برابر با $Y_t = (\gamma_0 + \gamma_1) + u_t$ و قبل از آن برابر با $Y_t = \gamma_0 + u_t$ خواهد بود. به‌عبارت دقیق‌تر یک متغیر مانا دچار انتقال دائمی شده است.



نمودار ۱٤-۸: انتقال متغیر مانا

حال فرایند گام تصادفی را در نظر بگیرید:

$$Y_t = Y_{t-1} + u_t \qquad (۱۴-۳۳)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_t = Y_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_t$$

این مدل نامانا است، زیرا:

$$E(Y_t) = Y_0$$
$$\mathrm{var}(Y_t) = t\sigma^2$$

Y_t به‌طور متوسط برابر با مقدار ثابت Y_0 است، اما هرگاه شوکی به آن وارد شود اثر آن برای همیشه باقی می‌ماند و لذا نامانا است. حال تصور کنید که به این متغیر نامانا در زمان s یک شوک مثبت وارد شود ولی در سایر زمان‌ها صفر باشد:

$$Y_t = Y_0 + \underbrace{u_1 + \ldots + u_{s-1}}_{0} + u_s + \underbrace{u_{s+1} + \ldots + u_t}_{0}$$

$$Y_t = \begin{cases} Y_0 & t < s \\ Y_0 + u_s & t \geq s \end{cases}$$

نتایج مدل فوق در نمودار ۹-۱۲ نشان داده شده است.



نمودار ۹-۱۴: انتقال روند متغیر نامانا

مقایسه نمودارهای ۸-۱۴ و ۹-۱۴ نشان می‌دهد که به‌ظاهر یکسان هستند ولی یکی بیانگر انتقال یک متغیر مانا (شکست ساختاری) و دیگری بیانگر اثر شوک آنی به یک متغیر نامانا و ماندگاری آن است.

ملاحظه می‌شود که نتایج مدل (۳۳-۱۴) که دارای ریشه واحد است بیانگر آن است که شوک وارده در زمان s دارای اثر همیشگی بر Y_t است و آن را برای همیشه انتقال می‌دهد، زیرا Y_t نامانا است. اما در مدل (۳۲-۱۴) Y_t یک متغیر مانا است که یک مقدار معین و تعادلی دارد و این مقدار تعادلی دچار تغییر شده و به یک تعادل جدید رسیده است. لذا در تشخیص و تفکیک این دو، دچار اشتباه می‌شویم. به‌عبارت دقیق‌تر، ظاهر هر دو مسئله یکسان است ولی ماهیت آنها متفاوت می‌باشد. لذا در تحلیل نامانایی، ممکن است «انتقال (تغییر ساختاری) یک سری زمانی مانا» را با «ریشه واحد» اشتباه کنیم و آن را یک سری نامانا بدانیم.

پرون[1] روش دیگری را برای آزمون ریشه واحد در صورت وجود تغییر ساختاری مطرح کرده است. در این روش، عوامل شکست ساختاری نیز لحاظ می‌شوند که این شکست ساختاری ممکن است به‌صورت تغییر عرض از مبدأ یا تغییر شیب روند، باشد. بدین منظور معادله زیر معرفی شده است که مشابه مدل (۳۱-۱۴) می‌باشد:

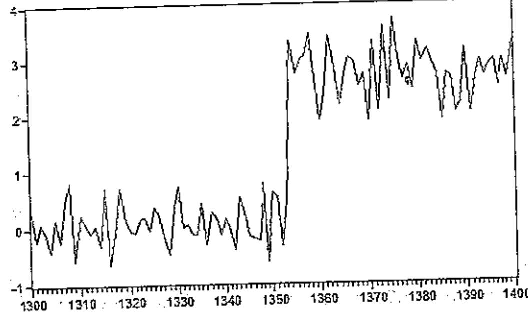
$$\Delta Y_t = \mu + \beta t + \gamma_1 D_t + \gamma_2 D_t t + \theta Y_{t-1} + \sum_i \alpha_i \Delta Y_{t-i} + u_t \qquad (۱۴-۳۴)$$

در اینجا فرضیه وجود ریشه واحد معادل با $\theta = 0$ در مقابل $\theta < 0$ می‌باشد. مقادیر آمارهٔ t برای آزمون فرضیه ریشه واحد توسط پرون استخراج شده است که وابسته به $\lambda = \frac{S}{T}$ است. T کل دوره (تعداد مشاهدات) و S سال تغییر ساختاری است. مثلاً اگر $T = 40$ و تغییر ساختاری در سال دهم رخ داده باشد، آنگاه $\lambda = \frac{10}{40} = 0/25$ خواهد بود. مقادیر آماره پرون در «ضمیمهٔ د» ارائه شده است.

1- Perron

آزمون پرون برای ریشه واحد در حالت شکست ساختاری با Eview فایل data12

داده های متغیر Z در نمودار زیر ترسیم شده است:



نتیجه آزمون دیکی- فولر عبارت است از:

Series: Z Workfile: UNTITLED::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph | Sta

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on Z

Null Hypothesis: Z has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 2 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.045735	0.7343
Test critical values:	1% level	-3.498439	
	5% level	-2.891234	
	10% level	-2.582678	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

و اگر متغیر روند را اضافه کنیم، نتیجهٔ آزمون دیکی- فولر عبارت است از:

Series: Z Workfile: UNTITLED::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph | Sta

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on Z

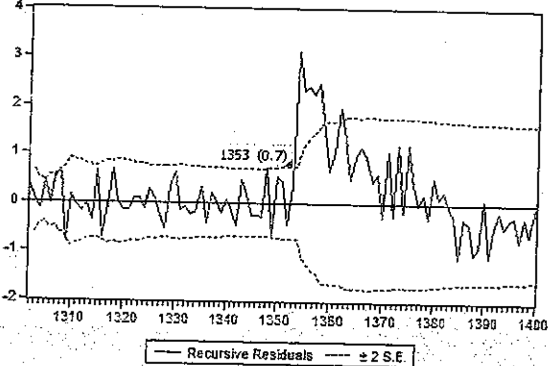
Null Hypothesis: Z has a unit root
Exogenous: Constant, Linear Trend
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=12)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-3.076760	0.1177
Test critical values:	1% level	-4.053392	
	5% level	-3.455842	
	10% level	-3.153710	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

آزمون دیکی- فولر وجود ریشه واحد را رد نمی‌کند. این در حالی است که Z یک متغیر مانا است که فقط دچار یک تغییر ساختاری شده است و آزمون دیکی- فولر نمی‌تواند بین انتقال یک متغیر مانا و انتقال روند یک متغیر نامانا، تفکیک قائل شود.

نمودار فوق نشان می دهد که Z دچار شکست ساختاری شده است. برای تعیین زمان شکست ساختاری بایستی از روش‌های ارائه شده در فصل هشتم استفاده نمود. به‌عنوان مثال با انجام آزمون بازگشتی، نمودار زیر به‌دست می‌آید که زمان تغییر ساختاری را در فصل سوم سال ۱۹۷۳ نشان می‌دهد (برای انجام این آزمون، ابتدا معادله $Z=a+bt$ را برآورد کرده و سپس آزمون شکست ساختاری، مثلاً آزمون باقیمانده‌های بازگشتی (recursive residuals) را مشابه آنچه در فصل هشتم گفته شد انجام می‌دهیم).



نقطه شکست در سال ۱۳۵۳ رخ داده است که برابر با مشاهدهٔ ۵۴ می‌باشد. با توجه به اینکه کل داده ها برابر با ۱۰۱ می‌باشد، لذا $\lambda=\frac{54}{101}=0/535\cong 0/5$ است. برای محاسبه آماره t، معادلهٔ زیر را برآورد می‌کنیم که مشابه معادله (۳۱-۱۴) است.

$$LS\ d(Z)\ \ C\ \ Z(-1)\ \ D1\ \ D1*@trend$$

D1 متغیر مجازی است که مقدار آن تا سال ۱۳۵۳ برابر صفر و برای بعد از آن برابر ۱ می‌باشد. @trend نیز روند را نشان می‌دهد. در معادله فوق فرض شده که تغییر ساختاری هم عرض از مبدأ و هم شیب روند را تغییر داده است. نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 07/24/14 Time: 10:43
Sample (adjusted): 1301 1400
Included observations: 100 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.088240	0.055874	1.579262	0.1176
Z(-1)	-1.254430	0.086100	-14.56950	0.0000
D1	3.617321	0.408489	8.855368	0.0000
D1*@TREND	-0.003303	0.004351	-0.759151	0.4496

R-squared	0.690276	Mean dependent var	0.029894
Adjusted R-squared	0.680597	S.D. dependent var	0.715792
S.E. of regression	0.404535	Akaike info criterion	1.067020
Sum squared resid	15.71025	Schwarz criterion	1.171227
Log likelihood	-49.35102	Hannan-Quinn criter.	1.109195
F-statistic	71.31791	Durbin-Watson stat	2.043590
Prob(F-statistic)	0.000000		

چون ضریب روند معنادار نیست لذا آن را حذف می‌کنیم:

Equation: UNTITLED Workfile: UNTITLED::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: D(Z)
Method: Least Squares
Date: 07/24/14 Time: 10:46
Sample (adjusted): 1301 1400
Included observations: 100 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.088340	0.055752	1.584531	0.1163
Z(-1)	-1.255911	0.085889	-14.62241	0.0000
D1	3.366676	0.240364	14.00742	0.0000

R-squared	0.688417	Mean dependent var	0.029894
Adjusted R-squared	0.681993	S.D. dependent var	0.715792
S.E. of regression	0.403650	Akaike info criterion	1.053006
Sum squared resid	15.80457	Schwarz criterion	1.131161
Log likelihood	-49.65029	Hannan-Quinn criter.	1.084637
F-statistic	107.1568	Durbin-Watson stat	2.025844
Prob(F-statistic)	0.000000		

آماره t برای حالتی که شکست ساختاری لحاظ شده است برابر با ۱۴/۶۲۲- است. از طرف دیگر مقدار بحرانی با توجه به $\lambda=0/5$ برابر با ۳/۷۶- است (جدول آمارهٔ پرون در بخش جداول آماری در ضمیمه «ه» را ببینید). چون مقدار آماره t در ناحیه بحرانی قرار دارد لذا وجود ریشه واحد رد می‌شود. این در حالی است که آزمون دیکی- فولر، وجود ریشه واحد را رد نمی‌کند و نمی‌تواند ریشه واحد (وجود روند تصادفی) را از شکست ساختاری متمایز کند.

زیوت و اندریو[1] روش دیگری را برای آزمون ریشه واحد در صورت وجود شکست ساختاری ارائه می‌کنند. ویژگی مهم این روش، آن است که نیازی به تعیین نقطه شکست ساختاری نمی‌باشد. این آزمون به گونه‌ای است که خود می‌تواند نقطه شکست ساختاری را تشخیص داده و بر اساس آن آزمون وجود ریشه واحد را انجام دهد. مراحل انجام این آزمون با استفاده از نرم‌افزار Eviews توضیح داده شده است.

1- Zivot and Andrew

آزمون زیوت- اندریو برای ریشه واحد در حالت شکست ساختاری با Eviews فایل data12

برای انجام آزمون زیوت-اندریو، ابتدا برنامه ZAURoot را دانلود و نصب می‌کنیم. این برنامه را می‌توان از آدرس زیر دانلود نمود.

www.eviews.com/addins/addins.shtml

بعد از نصب برنامه ZAURoot (مسیر نصب را به خاطر داشته باشید تا در صورت لزوم هریک از برنامه‌های آن را اجرا کنید)، مراحل زیر را برای انجام آزمون ریشه واحد طی می‌کنیم:

۱- فایل داده ها را باز می‌کنیم.

۲- برنامه zawarap.prg را اجرا می‌کنیم.

EViews
File Edit Object View Proc Quick Options Add-ins Window Help

Workfile: DATA12 - (h:\souri\econo...
View | Proc | Object | Save | Freeze | Details+/- | Show
Range: 1300 1400 – 101 obs Filter: *
Sample: 1300 1400 – 101 obs Order: Name
c
d1
q
resid
y
z
Untitled / New Page /

Program: ZAWRAP - (c:\users\dell\documents\ev...
Run | Print | Save | SaveAs | Cut | Copy | Paste | InsertTxt | Find | Replace
This is a general wrapper for the zivotandrews subroutine in zivotandrews.prg. It has a UI and option handling for setting the options, plus it builds a full output table.
include .\zivotandrews.prg
logmode +addin
'defaults
%maxlag = "4"
%model = "A"
!doGUI = 1
'check that an object exists
%type = @getthistype

۳- برای هر متغیری که می‌خواهیم آزمون ریشه واحد را انجام دهیم، دو بار روی آن کلیک می‌کنیم تا مقادیر آن را نشان دهد.

٤- با کلیک روی Run برنامه zawrap.prg را اجرا می‌کنیم.

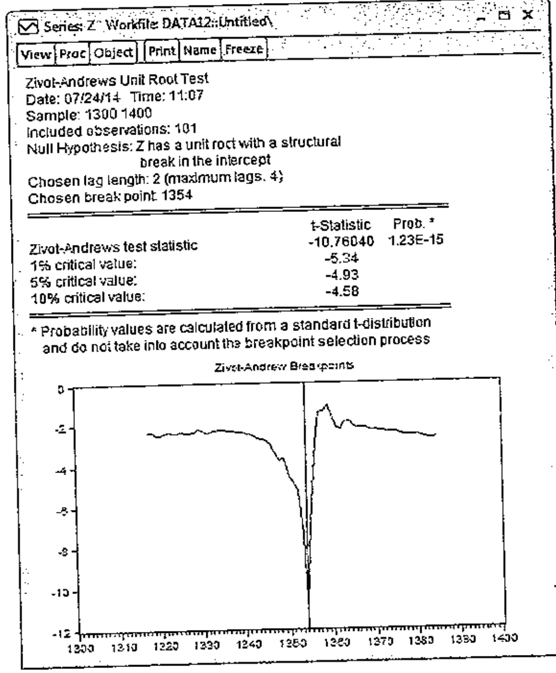
Workfile: DATA12 - (h:\souri\econo...
View | Proc | Object | Save | Freeze | Details+/- | Show
Range: 1300 1400 – 101 obs Filter: *
Sample: 1300 1400 – 101 obs Order: Name

Series: Z Workfile...
View | Proc | Object | Properties | Print
Z
Last updated: 07/24/1...

1300	0.285616
1301	-0.211686
1302	0.065981
1303	-0.096228
1304	-0.416455
1305	0.165449
1306	-0.233946
1307	0.482985
1308	0.822306
1309	-0.579864
1310	0.255897
1311	

Program: ZAWRAP - (c:\users\dell\documents\ev...
Run | Print | Save | SaveAs | Cut | Copy | Paste | InsertTxt | Find | Replace
This is a general wrapper for the zivotandrews subroutine in zivotandrews.prg. It has a UI and option handling for setting the options, plus it builds a full output table.
include .\zivotandrews.prg
logmode +addin
'defaults
%maxlag = "4"
%model = "A"
!doGUI = 1
'check that an object exists
%type = @getthistype

۵- نتایج به صورت زیر نشان داده می‌شود:


Series: Z Workfile: DATA12::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze

Zivot-Andrews Unit Root Test
Date: 07/24/14 Time: 11:07
Sample: 1300 1400
Included observations: 101
Null Hypothesis: Z has a unit root with a structural break in the intercept
Chosen lag length: 2 (maximum lags: 4)
Chosen break point: 1354

	t-Statistic	Prob. *
Zivot-Andrews test statistic	-10.76040	1.23E-15
1% critical value:	-5.34	
5% critical value:	-4.93	
10% critical value:	-4.58	

* Probability values are calculated from a standard t-distribution and do not take into account the breakpoint selection process

چون مقدار آماره آزمون (۱۰/۷۶-) در ناحیه بحرانی قرار دارد (از عدد بحرانی ۴/۹۳- کوچکتر است) لذا متغیر Z ریشه واحد ندارد و فقط دچار شکست ساختاری شده است.

۱٤-۱۱ هم‌انباشتگی[1]

قاعده عمومی آن است که ترکیب خطی از متغیرهای نامانا، نامانا خواهد بود و درجهٔ انباشتگی آن برابر با بزرگترین درجهٔ انباشتگی متغیرهای موردنظر می‌باشد. فرض کنید دو متغیر X_{1t} و X_{2t} به‌ترتیب درجه انباشتگی d_1 و d_2 دارند. ترکیب خطی از این دو متغیرِ نامانا را با ضرایب دلخواه α_1 و α_2 درنظر بگیرید:

$$Z_t = \alpha_1 X_{1t} + \alpha_2 X_{2t} \quad (۱۴-۳۵)$$

این ترکیب خطی دارای خواص زیر است:

1- cointegration

۱- Z_t نامانا است.

۲- درجهٔ انباشتگی Z_t برابر با $\max(d_1, d_2)$ است. اگر $d_2 > d_1$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} X_{1t} \sim I(d_1) \\ X_{2t} \sim I(d_2) \end{cases} \Rightarrow Z_t \sim I(\max(d_1, d_2)) = I(d_2) \qquad (14\text{-}36)$$

۳- تفاضل مرتبهٔ d_1 موجب مانایی $\Delta^{d_1} X_{1t}$ می‌شود ولی $\Delta^{d_1} X_{2t}$ هنوز نامانا است، زیرا $d_2 > d_1$ است. لذا درجهٔ انباشتگی $\Delta^{d_1} Z_t$ برابر با $d_2 - d_1$ خواهد بود.

$$\begin{cases} \Delta^{d_1} X_{1t} \sim I(0) \\ \Delta^{d_1} X_{2t} \sim I(d_2 - d_1) \end{cases} \Rightarrow \Delta^{d_1} Z_t \sim I(\max(0, d_2 - d_1)) = I(d_2 - d_1) \qquad (14\text{-}37)$$

۴- تفاضل مرتبهٔ d_2 موجب مانایی همه متغیرها خواهد شد:

$$\begin{cases} \Delta^{d_2} X_{1t} \sim I(0) \\ \Delta^{d_2} X_{2t} \sim I(0) \end{cases} \Rightarrow \Delta^{d_2} Z_t \sim I(\max(0,0)) = I(0) \qquad (14\text{-}38)$$

آنچه تا اینجا مطرح شد، یک قاعدهٔ عمومی برای متغیرهای نامانا است، ولی استثناهایی بر این قاعدهٔ عمومی نیز وجود دارد. هم‌انباشتگی یک استثناء بر این قاعدهٔ عمومی است. هم‌انباشتگی راهی برای عبور از انباشتگی[1] است. به‌طور کلی هم‌انباشتگی نشان می‌دهد که متغیرهای نامانا ممکن است دارای یک رابطهٔ واقعی (نه کاذب) باشند. به‌همین دلیل برای ترکیب خطیِ متغیرهای نامانا ممکن است درجه انباشتگی کاهش یابد.

برای تبیین مفهوم هم‌انباشتگی، فرض کنید درجه انباشتگی دو متغیر X_t و Y_t یکسان بوده و برابر با d باشد. حال اگر ترکیب خطی $u_t = \beta_1 Y_t + \beta_2 X_t$ دارای درجه انباشتگی $d-b$ باشد ($b > 0$)، آنگاه بردار $\beta' = [\beta_1 \;\; \beta_2]$ را بردار هم‌انباشته‌کننده یا بردار هم‌انباشتگی می‌گویند. نتایج حاصل از این بحث عبارت است از:

۱- اگر $d = b = 1$ باشد، آنگاه $u_t \sim I(0)$ خواهد بود. یعنی ترکیب خطی از X_t و Y_t مانا شده است. این ترکیب خطی را رابطه هم‌انباشتگی یا رابطه تعادلی می‌گویند و u_t معروف به خطای تعادل یا انحراف از تعادل است. در حالت تعادل، رابطه $\beta_1 Y_t + \beta_2 X_t = 0$ برقرار است، ولی چون

1- integration

معمولاً همواره انحراف از تعادل وجود دارد، لذا $\beta_1 Y_t + \beta_2 X_t = u_t$ است. بنابر این علی‌رغم نامانا بودن متغیرها، بین آنها یک رابطه تعادلی برقرار است و رگرسیون $Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t$ رگرسیون کاذب نیست ($\beta = -\frac{\beta_2}{\beta_1}$).

۲- وجود رابطهٔ هم‌انباشتگی می‌تواند عمومی‌تر از بحث فوق باشد. بدین منظور فرض کنید که شرایط زیر را داشته باشیم:

$X_t \sim I(1)$

$Y_t \sim I(2)$

$Z_t \sim I(2)$

فرض کنید که ترکیب خطی از Y_t و Z_t انباشته از درجه ۱ باشد:

$\alpha_1 Y_t + \alpha_2 Z_t = w_t \quad , \quad w_t \sim I(1)$

حال تصور کنید که یک ترکیب خطی از w_t و X_t نیز وجود دارد که انباشته از مرتبه صفر باشد:

$\gamma_1 w_t + \gamma_2 X_t = u_t \sim I(0)$

بنابراین بین سه متغیر X_t، Y_t و Z_t یک رابطه هم‌انباشتگی یا تعادلی پیدا کرده‌ایم که عبارت است از:

$$\gamma_1 w_t + \gamma_2 X_t = \gamma_1(\alpha_1 Y_t + \alpha_2 Z_t) + \gamma_2 X_t = \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_t + \beta_3 X_t = u_t \sim I(0) \qquad (14\text{-}39)$$

که $\beta_1 = \gamma_1 \alpha_1$، $\beta_2 = \gamma_1 \alpha_2$ و $\beta_3 = \gamma_2$ است.

۳- در بررسی رابطهٔ هم‌انباشتگی، اگر برخی از متغیرها $I(0)$ باشند، مشکلی ایجاد نمی‌کند.

۴- اگر K متغیر داشته باشیم بین آنها حداکثر $K-1$ رابطهٔ هم‌انباشتگی وجود دارد. بنابراین بین دو متغیر X_t و Y_t فقط یک رابطهٔ هم‌انباشتگی وجود دارد. اما بین سه متغیر X_t، Y_t و Z_t حداکثر دو رابطهٔ هم‌انباشتگی وجود دارد، هر چند که ممکن است فقط یک رابطه به‌دست آید.[1]

نتیجه کلی بحث فوق آن است که برای اجتناب از رگرسیون کاذب بایستی متغیرهای مورد نظر، مانا باشند. در صورت نامانایی، بایستی آنها را با استفاده از تفاضل‌گیری، مانا کنیم و رگرسیون را بر اساس متغیرهای ماناشده، برازش کنیم. راه دوم این است که یک ترکیب خطیِ مانا از

۱- جزئیات این بحث در فصل بیست و یکم بررسی شده است.

متغیرهای نامانا پیدا کنیم. این رابطه خطی بیانگر یک رابطه تعادلی بلندمدت است که منجر به رگرسیون کاذب نخواهد شد. بنابراین، استفاده از رابطه هم‌انباشتگی می‌تواند برای توصیف روابط بلندمدت به‌کار رود، هر چند که نمی‌تواند روابط و نوسانات کوتاه‌مدت را تبیین نماید. به همین دلیل مدل‌های دیگری مطرح شده‌اند که هم نوسانات کوتاه‌مدت و هم روابط تعادلی را مورد استفاده قرار می‌دهند. این مدل‌ها معروف به مدل‌های تصحیح خطا یا تصحیح تعادل هستند.

برای روشن شدن مفهوم هم‌انباشتگی و رابطه آن با تعادل، مدل سادهٔ تعیین درآمد ملی را در نظر بگیرید:

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = bY_t$$

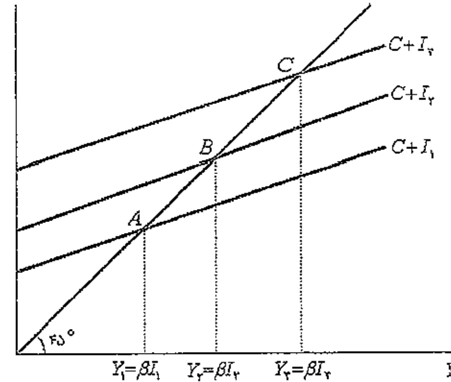
تساوی اول، شرط تعادل را نشان می‌دهد. اگر به‌جای C_t در شرط تعادل قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Y_t = bY_t + I_t$$
$$Y_t = \beta I_t \quad , \quad \beta = \frac{1}{1-b}$$

این یک رابطه تعادلی بین Y_t و I_t است که آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t - \beta I_t = 0$$

از آنجا که سمت راست، مانا است (زیرا همواره صفر است) بنابراین سمت چپ نیز باید مانا باشد. پس بین I_t و Y_t یک رابطهٔ مانا برقرار است که بیانگر رابطهٔ تعادلی است. این رابطهٔ تعادلی در نمودار زیر توصیف شده است:



نمودار ۱۰-۱۴: رابطهٔ تعادلی بین I و Y

نقاط A، B و C تعادل‌ها را نشان می‌دهند که بستگی به مقدار I_t دارد که به‌دنبال آن، Y_t نیز تعیین می‌شود. لذا اگر Y را روی I برازش کنیم. صرفاً نقاط تعادلی را توصیف می‌کند. در چنین شرایطی هم I و هم Y در طول زمان همراه با هم افزایش می‌یابند و در عین حال، نامانا هستند. اما این «هم‌جهتی» به معنای رگرسیون کاذب نیست، بلکه یک رابطهٔ تعادلی بین آنها باعث شده است که «هم‌جهت» با هم حرکت کنند. این رابطهٔ تعالی را رابطهٔ هم‌انباشتگی می‌گویند و متغیرهای I و Y را متغیرهای هم‌انباشته می‌گویند.

بدیهی است که رابطهٔ تعادلی الزاماً به‌طور کامل برقرار نیست و همواره مقداری انحراف از تعادل وجود دارد. به‌عنوان مثال اگر تابع مصرف را به‌صورت $C_t = bY_t + v_t$ بنویسیم، آنگاه رابطه تعادلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y_t = \beta I_t + u_t \;\Rightarrow\; Y_t - \beta I_t = u_t$$

که $u_t = \frac{v_t}{1-b}$ است. ملاحظه می‌شود که رابطه تعادلی برابر صفر نیست، بلکه برابر u_t است که u_t میزان انحراف از تعادل را نشان می‌دهد. اگر واقعاً u_t بیانگر انحراف از تعادل باشد، بایستی نوسانات آن حول صفر بوده و مانا باشد. بدین ترتیب برای آزمون وجود رابطه تعادلی بین دو متغیر نامانا بایستی آزمون مانا بودن برای u_t (البته e_t) را انجام دهیم. اگر e_t مانا باشد، می‌گوییم Y_t و I_t دارای رابطهٔ تعادلی یا رابطهٔ هم‌انباشتگی هستند و معادله رگرسیون با مشکل رگرسیون کاذب مواجه نخواهد بود.

۱۲-۱۴ آزمون هم‌انباشتگی

فرض کنید که مدل زیر را داشته باشیم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \cdots + \beta_K X_{Kt} + u_t \qquad (۱۴-۴۰)$$

اگر متغیرهای Y_t و X_{it} ها I(۱) باشند، در این صورت u_t نیز I(۱) است. اما الزاماً چنین نیست و ممکن است u_t مانا باشد.

همان‌طور که اشاره شد، مانا بودن u_t بیانگر این است که معادله (۱۴-۴۰) یک رابطه تعادلی (هم‌انباشتگی) بین Y_t و X_{it} ها را توصیف می‌کند. بنابراین، برای آزمون هم‌انباشتگی، ابتدا مدل

(۳۷-۱۴) را برآورد کرده و سپس e_tها را حساب می‌کنیم. با داشتن e_tها می‌توان آزمون ریشه واحد را برای e_t انجام داد:

$$\Delta e_t = \theta e_{t-1} + v_t \quad (۴۱-۱۴)$$

اگر e_t ریشه واحد نداشته باشد، نشان می‌دهد که مانا است و این دلالت بر وجود رابطهٔ تعادلی (هم‌انباشتگی) بین Y_t و X_{it} ها دارد.

در اینجا چون آزمون فرضیه راجع به باقیمانده‌ها (e_t) است، لذا مقادیر بحرانی با آزمون DF و ADF تفاوت می‌کند. بر این اساس، برای آزمون مانایی e_t، مقادیر بحرانی دیگری توسط انگل- گرانجر محاسبه شده است که موسوم به آزمون انگل- گرانجر (EG) و انگل- گرانجر تعمیم یافته (AEG) می‌باشند.

آزمون هم‌انباشتگی در Eviews فایل data2

برای انجام آزمون هم‌انباشتگی با استفاده از Eviews تابع تولید کاب- داگلاس را در نظر بگیرید. فرم لگاریتمی این تابع را با دستور زیر برآورد می‌کنیم:

LS log(YNO) C log(L) log(K)

YNO تولید ناخالص داخلی بدون نفت، L نیروی کار شاغل و K موجودی سرمایه را نشان می‌دهد. توجه شود که ابتدا بایستی آزمون ریشه واحد را برای هر یک از متغیرهای فوق انجام دهیم. فرض کنید که هر یک از این متغیرها دارای ریشه واحد یا I(1) باشند. بنابراین ابتدا مدل فوق را برآورد کرده و باقیمانده‌های آن (که با Resid01 نشان داده می‌شود) را حساب می‌کنیم.

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: LOG(YNO)
Method: Least Squares
Date: 02/02/11 Time: 06:13
Sample (adjusted): 1345 1380
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.073509	0.461212	0.159382	0.8743
LOG(L)	0.696210	0.074439	9.352772	0.0000
LOG(K)	0.569978	0.032315	17.63844	0.0000

R-squared	0.986461	Mean dependent var	11.91068
Adjusted R-squared	0.985640	S.D. dependent var	0.504797
S.E. of regression	0.060490	Akaike info criterion	-2.693006
Sum squared resid	0.120750	Schwarz criterion	-2.561046
Log likelihood	51.47411	Hannan-Quinn criter.	-2.646949
F-statistic	1202.204	Durbin-Watson stat	0.531235
Prob(F-statistic)	0.000000		

در پنجره‌ای که نتایج تخمین نشان داده می‌شود از طریق Proc → Make Residual Series باقیمانده‌ها را حساب می‌کنیم. نتایج حاصل از برآورد باقیمانده‌ها در پنجره‌ای نشان داده می‌شود که در آن، می‌توان از طریق View → Test Unit Root آزمون ریشه واحد را به روشی که قبلاً گفته شد برای باقیمانده‌ها انجام داد. نتایج مربوط به آزمون ریشه واحد برای باقیمانده‌ها (Resid01) در پنجره زیر نشان داده شده است.

از آنجا که مقدار ADF کوچکتر از مقادیر بحرانی است، لذا وجود ریشه واحد در باقیمانده‌ها یا نامانایی باقیمانده‌ها رد می‌شود. بنابراین متغیرهای این مدل، یعنی لگاریتم تولید ناخالص داخلی بدون نفت، نیروی کار و سرمایه هم‌انباشته هستند و یک رابطه تعادلی بلندمدت بین متغیر وابسته و متغیرهای توضیحی وجود دارد.

Series: RESID01 Workfile: YNO::Untitled\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on RESID01

Null Hypothesis: RESID01 has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 4 (Fixed)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-5.199435	0.0002
Test critical values:	1% level	-3.661661	
	5% level	-2.960411	
	10% level	-2.619160	

*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation
Dependent Variable: D(RESID01)
Method: Least Squares
Date: 02/02/11 Time: 06:16
Sample (adjusted): 1350 1380
Included observations: 31 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
RESID01(-1)	-0.756360	0.145470	-5.199435	0.0000
D(RESID01(-1))	0.477092	0.152829	3.121732	0.0045
D(RESID01(-2))	0.304921	0.163855	1.860917	0.0746
D(RESID01(-3))	0.381572	0.148142	2.575724	0.0163
D(RESID01(-4))	0.611149	0.154290	3.961032	0.0005
C	0.004776	0.005912	0.807838	0.4268

R-squared	0.574036	Mean dependent var	0.002459
Adjusted R-squared	0.488843	S.D. dependent var	0.045844
S.E. of regression	0.032776	Akaike info criterion	-3.826237
Sum squared resid	0.026857	Schwarz criterion	-3.548691
Log likelihood	65.30667	Hannan-Quinn criter.	-3.735764
F-statistic	6.738073	Durbin-Watson stat	2.077749

روش دیگر برای آزمون هم‌انباشتگی استفاده از «دوربین- واتسون رگرسیون هم‌انباشته $(CRDW)$»[1] می‌باشد. اگر مقدار آماره DW که از رگرسیون هم‌انباشته به‌دست می‌آید کوچکتر از مقادیر بحرانی (جدول زیر) باشد در این صورت، باقیمانده‌ها مانا نیستند.

1- cointegrating regression Durbin- Watson

مقادیر بحرانی آماره $CRDW$

سطح معنی‌دار بودن	مقدار بحرانی
٪۱	۰/۵۱۱
٪۵	۰/۳۸۶
٪۱۰	۰/۳۲۳

به‌عنوان مثال، در تخمین یک معادله، آماره DW برابر با ۰/۵۳۱ می‌باشد. از آنجا که $DW = ۰/۵۳۱$ از مقادیر بحرانی بزرگتر است، لذا فرضیه $H_۰$ یعنی وجود ریشه واحد در باقیمانده‌ها رد می‌شود و متغیرهای این رگرسیون، هم‌انباشته هستند.

۱۴-۱۳ مدل‌های تصحیح خطا (ECM)[1]

هنگامی که در دهه ۱۹۷۰ مفهوم نامانایی مطرح شد، اولین واکنش‌ها این بود که برای مانا کردن سری‌های زمانی می‌توان از تفاضل مرتبه اول استفاده نمود. اما بدیهی است که وقتی رابطه بین خود متغیرها مورد نظر باشد، این روش نمی‌تواند مناسب باشد. هر چند که این روش از نظر آماری معتبر است، ولی مدل‌هایی که از تفاضل مرتبه اول استفاده می‌کنند نمی‌توانند راه‌حل‌های بلندمدت را توصیف کنند. در واقع ایراد اساسی این روش آن است که با تفاضل‌گیری، اطلاعات بلندمدت از بین می‌رود. به‌عنوان مثال معادله‌ای را در نظر بگیرید که شامل متغیرهای Y و X باشد. فرض کنید که این دو متغیر I(1) باشند. در مواجهه با نامانایی متغیرها، می‌توان از تفاضل آنها استفاده نمود:

$$\Delta Y_t = \alpha \Delta X_t + u_t \qquad (۱۴-۴۲)$$

مدل فوق شاید برای تبیین نوسانات کوتاه‌مدت، مناسب باشد، اما در خصوص روابط بلندمدت چیزی بیان نمی‌کند. زیرا در بلندمدت، متغیرها به سطح تعادلی خود می‌رسند و تغییر نمی‌کنند. بنابراین در چنین شرایطی $Y_t = Y_{t-1} = Y$ و $X_t = X_{t-1} = X$ خواهد بود. بدیهی است که در این حالت، تفاضل‌ها برابر با صفر خواهند بود ($\Delta Y_t = ۰$ و $\Delta X_t = ۰$) و لذا معادله‌ای مانند (۱۴-۴۲) گویای هیچ نکته خاصی در مورد روابط بلندمدت نمی‌باشد.

1- error correction models

معادله (۱۴-۴۲) یک رابطهٔ ایستا را بین تغییرات Y_t و X_t در کوتاه‌مدت توصیف می‌کند. این رابطه، پویایی‌ها و تعدیلات زمانی را در نظر نمی‌گیرد. برای لحاظ نمودن پویایی‌ها و تعدیلات زمانی، لازم است از مدل‌های دیگری که معروف به مدل‌های تصحیح خطا یا تصحیح تعادل هستند، استفاده کنیم. نحوه استخراج این مدل‌ها در فصل دوازدهم بخش ۱۰-۱۲ ارائه گردید. طبق این مدل‌ها تمام تغییرات Y_t در سال t ناشی از تغییرات X در سال t نیست، بلکه بخشی از آن ناشی از واکنش به عدم‌تعادل‌های قبلی جهت تصحیح آنها و حرکت به سمت تعادل است. بنابراین، مدل تصحیح خطا برای تغییرات Y دو منشأ را مورد تأکید قرار می‌دهد:

۱- تغییرات Y در زمان t که ناشی از تغییرات X در زمان t است. این تغییرات با $\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t$ توصیف می‌شود که α_1 واکنش آنی Y_t به تغییرات X_t را نشان می‌دهد.

۲- تغییرات Y در زمان t که ناشی از عدم تعادل دوره قبلی است. در زمان t، Y برای رسیدن به تعادل و اصلاح عدم‌تعادل‌های زمان $t-1$، دچار تغییر می‌شود. در واقع فرض بر این است که تعادل به‌طور آنی برقرار نمی‌شود و نیاز به گذشت زمان دارد. اگر e_{t-1} بیانگر انحراف از تعادل در زمان قبلی باشد، آنگاه واکنش Y_t به آن برابر با $\alpha_2 e_{t-1}$ می‌باشد. α_2 ضریب تصحیح خطا یا تصحیح تعادل است.

بدین ترتیب، تغییرات Y_t در زمان t برابر است با:

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + \alpha_2 e_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (۱۴-۴۳)$$

ε_t جملهٔ خطا است.

به‌طور کلی این مدل‌ها، از ترکیب تفاضل‌های مرتبه اول و مقادیر تأخیری برای «متغیرهای هم‌انباشته» استفاده می‌کنند. ترکیب متغیرهای هم‌انباشته توسط e_{t-1} لحاظ می‌شود، زیرا $e_{t-1} = Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{t-1}$ است:

$$\Delta Y_t = \alpha_1 \Delta X_t + \alpha_2 (Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{t-1}) + \varepsilon_t \qquad (۱۴-۴۳)$$

جملهٔ $Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{t-1}$ معروف به جملهٔ تصحیح خطا است. مشروط به اینکه ترکیب خطی Y_t و X_t با ضرایب β_1 و β_2 هم‌انباشته باشند، در این صورت $Y_{t-1} - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 X_{t-1}$ انباشته از مرتبهٔ I(0) خواهد بود و لذا استفاده از روش OLS می‌تواند معتبر باشد.

مدل تصحیح خطا را مدل تصحیح تعادل نیز می‌نامند. ابتدا توجه داریم که مدل (۴۳-۱۴) همان مدل (۴۲-۱۴) است که به آن، جمله $\alpha_2(Y_{t-1}-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{t-1})$ اضافه شده است. بنابراین از آنجا که (۴۲-۱۴) بیانگر رابطه کوتاه‌مدت بین تغییرات Y و X است، لذا α_1 ضریبی است که تغییرات Y در زمان t را با تغییرات X در همان زمان مرتبط می‌سازد. اما بخشی از تغییرات Y ناشی از تصحیح عدم تعادلی است که در دوره قبل وجود داشته است. توجه داریم که جمله تصحیح خطا، یعنی e_{t-1} با یک وقفه ظاهر شده است. بنابراین تغییرات Y یکی ناشی از تغییرات X و دیگری ناشی از تصحیح خطا یا تصحیح عدم تعادل است. بر این اساس بردار $\beta'=[\beta_1 , \beta_2]$ بیانگر رابطه بلندمدت بین X و Y است، در حالی که α_1 رابطه کوتاه‌مدت بین تغییرات X و تغییرات Y را نشان می‌دهد. همچنین α_2 سرعت تعدیل به سمت تعادل است و نشان می‌دهد که چه درصدی از خطای تعادل دوره قبل، در دوره جاری اصلاح می‌شود.

اگر رابطه بلندمدت بین X و Y به‌صورت $Y_t=\beta_1+\beta_2X_t+u_t$ باشد، آنگاه تخمین آن برابر با $\hat{Y}_t=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_t$ و $e_t=Y_t-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_t$ است. حال اگر Y_t و X_t انباشته از مرتبهٔ I(۱) و e_t نیز I(۰) باشد، در این صورت در مدل (۴۳-۱۴)، جملهٔ $(Y_{t-1}-\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2X_{t-1})$ مانا است. از طرف دیگر چون Y_t و X_t، I(۱) هستند، لذا تفاضل مرتبه اول آنها یعنی ΔY_t و ΔX_t نیز I(۰) و مانا خواهند بود. در نتیجه، معادله (۴۳-۱۴) یک مدل مانا می‌باشد.

مدل تصحیح خطا را می‌توان برای حالتی که بیش از یک متغیر توضیحی داشته باشیم، تعمیم داد. بدین منظور مدل زیر را در نظر بگیرید.

$$\Delta Y_t=\alpha_1\Delta X_t+\alpha_2\Delta Z_t+\alpha_3(Y_{t-1}-\beta_1X_{t-1}-\beta_2Z_{t-1})+u_t \qquad (۱۴\text{-}۴۴)$$

در اینجا نیز α_1 و α_2 واکنش آنی Y را به تغییرات X و Z نشان می‌دهند. α_3 نیز ضریب تصحیح خطای تعادل می‌باشد.

۱٤-۱٤ تخمین مدل تصحیح خطا

تصور کنید که داده‌های سری‌های زمانی نامانا ولی مدل دارای هم‌انباشتگی باشد. حال سؤال این است که ضرایب آن را چگونه برآورد کنیم. سه روش برای برآورد چنین مدل‌هایی وجود

دارد: روش انگل- گرانجر[1]، روش انگل- یو[2] و روش جوهانسن[3]. در اینجا به روش انگل- گرانجر می‌پردازیم. روش جوهانسون را در فصل بیست و یکم برای برآورد مدل‌های تصحیح خطای برداری بررسی خواهیم کرد.

روش انگل-گرانجر[4]

روش انگل-گرانجر در دو مرحله انجام می‌شود:

مرحله اول

ابتدا باید مطمئن شویم که همه سری‌های زمانی، I(۱) و یا یک رابطهٔ هم‌انباشتگی بین آنها وجود دارد. سپس معادلهٔ هم‌انباشته را که بیانگر رابطهٔ بلندمدت بین متغیرها است با روش OLS برآورد می‌کنیم (یعنی معادله $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$). توجه شود که هیچ‌گونه استنتاجی را بر مبنای ضرایب این معادله انجام نمی‌دهیم، بلکه فقط معادله را برآورد می‌کنیم. حال از این معادله، باقیمانده‌ها (e_t) را حساب کرده و آزمون مانایی را برای آن انجام می‌دهیم. در صورتی که باقیمانده‌ها I(۰) باشند می‌توان به مرحله دوم رفت.

مرحله دوم

باقیمانده‌های مرحله اول (e_t) بیانگر جملهٔ تصحیح خطا هستند. لذا مدل تصحیح خطا را برای حالتی که یک متغیر توضیحی داشته باشیم، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta Y_t=\alpha_1\Delta X_t+\alpha_2e_{t-1}+v_t \qquad (۱۴\text{-}۴۵)$$

توجه شود که $e_{t-1}=Y_{t-1}-(\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_{t-1})$ است.

حال بر اساس معادله (۴۵-۱۴) می‌توان استنتاج‌های آماری را انجام داد، زیرا در این حالت تمامی داده‌ها مانا هستند.

البته توجه شود که در صورتی که همهٔ داده‌ها I(۱) نباشند، نمی‌توان با یک رابطهٔ هم‌انباشتگی دست یافت، مگر در حالت‌های خاصی که ترکیب برخی از متغیرهای I(۲) بتواند منجر به به ترکیب مانا شود. این مباحث در بخش ۱۱-۱۲ بحث شد.

1- Engle-Granger
2- Engle-Yoo
3- Johansen
4- Brooks, 2002, p.392.

مسائل

۱-۱۴ تفاوت آزمون ریشه واحد و آزمون هم‌انباشتگی چیست؟

۲-۱۴ اگر Y_t از مرتبه I(۳) باشد، ΔY_t از چه مرتبه‌ای است؟

۳-۱۴ فرایند گام تصادفی را توضیح دهید.

۴-۱۴ تفاوت فرایند گام تصادفی و فرایندی که روند قطعی دارد، چیست؟

۵-۱۴ تفاوت فرایند گام تصادفی و فرایند گام تصادفی با رانش چیست؟

۶-۱۴ مفهوم رگرسیون هم‌انباشته را توضیح دهید.

۷-۱۴ فرضیه $H_0 : Y_t \sim I(1)$ رد شده است، آیا ΔY_t مانا است؟

۸-۱۴ در مسئله ۱-۱ فصل اول، آزمون مانایی را برای Y، X و Z انجام دهید.

۹-۱۴ در مسئله ۱-۱ فصل اول، آزمون هم‌انباشتگی را برای هر یک از معادلات زیر انجام دهید:

الف) $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + u_t$

ب) $Y_t = \beta_1 + \beta_2 Z_t + u_t$

ج) $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$

۱۰-۱۴ در مسئله ۱ فصل اول، مدل ECM را برآورد کرده و نتایج آن را تحلیل کنید.

۱۱-۱۴ رگرسیون کاذب به چه معنی است و چرا به‌وجود می‌آید؟

۱۲-۱۴ تفاوت روند تصادفی و روند قطعی چیست؟

۱۳-۱۴ دو مدل $Y_t = \mu + \phi Y_{t-1} + u_t$ و $Y_t = \alpha + \beta t + u_t$ را داریم.

الف) اگر $0 < \phi < 1$ باشد، تفاوت و مشابهت این دو مدل را تشریح کنید.

ب) اگر $\phi = 1$ باشد، تفاوت و مشابهت این دو مدل را تشریح کنید.

۱۴-۱۴ برای Y_t یک فرایند با روند قطعی به‌صورت $Y_t = \alpha + \beta t + u_t$ و یک فرایند با روند تصادفی به‌صورت $Y_t = \alpha + Y_{t-1} + u_t$ معرفی شده است. وجه مشترک این دو فرایند چیست؟ ثابت کنید.

۱۵-۱۴ نشان دهید که شوک‌های تصادفی وارده به Y_t طبق فرایند گام تصادفی با رانش $Y_t = \alpha + Y_{t-1} + u_t$ ماندگار است و با گذشت زمان کاهش نمی‌یابد.

۱۶-۱۴ ثابت کنید که در معادله $Y_t = \alpha + \phi Y_{t-1} + u_t$ اگر $0 < \phi < 1$ باشد، آنگاه اثر شوک‌های وارده به Y_t با گذشت زمان، کاهش می‌یابد.

۱۷-۱۴ رابطه ریشه واحد و روند تصادفی چیست؟

۱۸-۱۴ برای Y_t مدل ECM به‌صورت $\Delta Y_t = 0/8 \Delta X_t - 0/6 e_{t-1}$ معرفی شده است. با فرض اینکه $\Delta X_t = 0$ و $e_{t-1} = 10$ باشد:

الف) در سال t، تغییرات Y چقدر است و مفهوم آن چیست؟

ب) در سال $t+1$، تغییرات Y چقدر است و مفهوم آن چیست؟

ج) در سال $t+m$، تغییرات Y چقدر است و مفهوم آن چیست؟

۱۹-۱۴ برای Y_t مدل ECM به‌صورت $\Delta Y_t = 0/8 \Delta X_t - 0/6 e_{t-1}$ برآورد شده است. فرض کنید $e_{t-1} = 0$ و $\Delta X_t = 100$ باشد.

الف) مفهوم $e_{t-1} = 0$ چیست؟

ب) در سال t تغییرات Y_t چقدر است؟

ج) با فرض اینکه در سال $t+1$، X_t ثابت باشد، $(\Delta X_{t+1} = 0)$، آیا انتظار دارید که در سال $t+1$، Y_t تغییر کند؟

د) اگر انتظار دارید که $\Delta Y_{t+1} \neq 0$ باشد، آیا می‌توان تغییرات آن را حساب کرد؟

۲۰-۱۴ رابطه تعادلی X و Y به‌صورت $Y_t - (100 + 0/5 X_t) = e_t$ برآورد شده‌است. فرض کنید در سال $t-1$ مقدار X_t برابر با ۴۰۰ باشد.

الف) در سال $t-1$ مقدار تعادلی Y را حساب کنید.

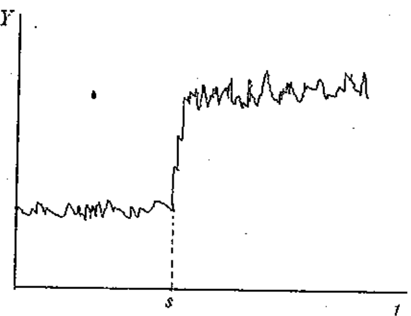
ب) مفهوم e_t را بیان کنید.

ج) اگر در سال t نیز X برابر با ۴۰۰ باشد، تغییرات Y در سال t چقدر است؟ چرا؟

د) اگر در سال t، $\Delta X_t = ۱۰۰$ باشد، تغییرات Y در سال t چقدراست؟

هـ) با توجه به بند د، اگر $\Delta X_{t+1} = ۱۰$ باشد، تغییرات Y در سال $t+1$ را حساب کنید.

۲۱-۱۴ مشاهدات Y_t در طول زمان به‌صورت نمودار زیر است:



Y در زمان s دچار تغییرات ساختاری شده است.

الف) اگر آزمون ریشه واحد را انجام دهیم، منجر به این نتیجه می‌شود که Y دارای ریشه واحد (نامانا) است. چرا؟

ب) چگونه می توان اثر تغییر ساختاری را لحاظ کرد تا آزمون ریشه واحد، معتبر باشد؟

ضمیمه فصل چهاردهم: آزمون‌های مانایی در Stata

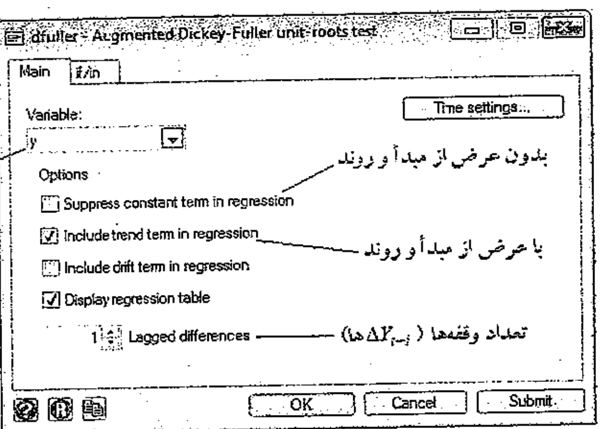
آزمون ریشه واحد در Stata

فایل data2

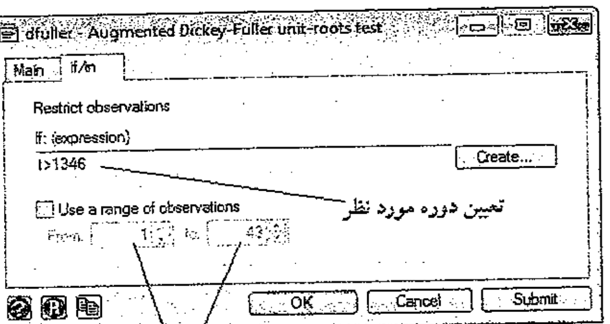
بدین منظور مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

tests → time series → statistics

- Augmented Dickey-Fuller unit-root test — آزمون ریشه واحد دیکی-فولر
- DF-GLS test for a unit root
- Phillips-Perron unit roots test — آزمون ریشه واحد فیلیپس-پرون
- Bartlett's periodogram-based white noise test
- Portmanteau white noise test
- Time-series specification tests after regress



توجه شود که در اینجا از دوره ۸۰-۱۳٤۷ استفاده کرده‌ایم. بدین منظور در پنجرۀ فوق، با انتخاب گزینه if/in پنجره دیگری باز می شود که در آن t>1346 را وارد می‌کنیم:



با انتخاب OK نتایج به صورت زیر به دست می‌آید:

```
. dfuller y if t>1346, trend regress lags(1)

Augmented Dickey-Fuller test for unit root         Number of obs   =        34

                               ---------- Interpolated Dickey-Fuller ----------
                  Test         1% Critical       5% Critical      10% Critical
               Statistic          Value             Value             Value
------------------------------------------------------------------------------
 Z(t)            -2.403            -4.297            -3.564            -3.218
------------------------------------------------------------------------------
MacKinnon approximate p-value for Z(t) = 0.3779

------------------------------------------------------------------------------
D.y          |     Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           y |
         L1. |  -.1885001   .0784335   -2.40   0.023    -.3486826   -.0283175
         LD. |   .5022849   .1563486    3.21   0.003     .1829784    .8215914
      _trend |   972.0467   459.6667    2.11   0.043     33.28194    1910.811
       _cons |   27262.73   10572.36    2.58   0.015     5671.086    48854.38
------------------------------------------------------------------------------
```

مقدار آماره دیکی- فولر برابر با ۲/۴۰۳- است که با توجه به عدد بحرانی ۳/۵۶۴-(در سطح ۵٪)، وجود ریشه واحد رد نمی‌شود.
توجه شود که آماره دیکی- فولر با z(t) نشان داده می شود.
آزمون دیکی- فولر را می‌توان با فرمان زیر نیز انجام داد:

```
dfuller y, trend regress lags(1)
```

اگر بخواهیم برای سال‌های بعد از ۱۳۴۶، آزمون را انجام دهیم، فرمان زیر را اجرا می کنیم:

```
dfuller y if t>1346, trend regress lags(1)
```

همچنین برای دوره ۱۳۴۷ تا ۱۳۷۵ از فرمان زیر استفاده می کنیم:

```
dfuller y if 1346< t<1376, trend regress lags(1)
```

آزمون هم‌انباشتگی در Stata

برای آزمون هم‌انباشتگی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا معادله مورد نظر را تخمین می زنیم:

```
reg y x
```

۲- سپس باقیمانده‌ها را برآورد می کنیم:

```
predict e, residual
```

۳- حال آزمون ریشه واحد را برای e انجام می‌دهیم:

```
dfuller e, trend regress lags(1)
```

اگر e مانا باشد بیانگر وجود هم‌انباشتگی بین X و Y است.

فصل پانزدهم

سری‌های زمانی فصلی

۱-۱۵ مقدمه

تحلیل سری‌های زمانی که در فصل سیزدهم و چهاردهم ارائه شد، بر این فرض استوار بود که از الگوهای فصلی تبعیت نمی‌کنند. الگوهای فصلی بیانگر یک نوع رفتار تناوبی است که طی سال یا طی یک دوره ممکن است چند بار تکرار شود. مثلاً یک رفتار ممکن است هر شش ماه یکبار تکرار شود. یا ممکن است در هر فصل (سه ماه یکبار) یا در هر ماه، یک رفتار به‌خصوص تکرار شود. به‌طور کلی چنین رفتارهای تناوبی را الگوی فصلی می‌گویند. لذا الگوهای فصلی الزاماً به‌معنای مرسوم فصل (یعنی دوره سه ماه) نیست، بلکه رفتاری است که طی یک سال در حال تکرار است که ممکن است شش‌ماهه (نیم سال)، فصلی ($\frac{1}{4}$ سال)، ماهانه ($\frac{1}{12}$ سال) و یا حتی هفتگی و روزانه باشد. به عنوان مثال برای یک سری زمانی ممکن است مقدار آن در فصل بهار سال جاری با مقدار آن در فصل بهار سال گذشته همبستگی داشته باشد. یا ممکن است مقدار آن در مهرماه هر سال با مهر ماه سال قبل در ارتباط باشد. همچنین در تحلیل داده‌های روزانه ممکن است مقدار متغیر مورد نظر در هر دوشنبه با مقدار آن در دوشنبه قبل همبستگی داشته باشد.

سری‌هایی که از الگوهای فصلی تبعیت می‌کنند از رفتارهای خاصی برخوردارند که مدل‌سازی آنها را تا حدودی متفاوت از مباحث مرسوم سری‌های زمانی می‌کند. در این فصل ابتدا خصوصیات سری‌های زمانی فصلی قطعی و سپس مدل‌سازی سری‌های زمانی فصلی تصادفی را در چارچوب مدل‌های ARMA و ARIMA بررسی می‌کنیم که معروف به SARMA و SARIMA هستند.

در پایان نیز آزمون ریشه واحد را برای سری‌های زمانی فصلی بررسی خواهیم کرد. اغلب مباحث این فصل را برای داده‌های فصلی (سه ماهه) مطرح می‌کنیم، هر چند که به‌سادگی قابل تعمیم به سایر الگوهای فصلی نیز می‌باشد.

۱۵-۲ الگوی فصلی قطعی

الگوی فصلی قطعی یا فصلی بودن قطعی بیانگر سیکل (چرخه) فصلی است که از قبل معلوم است. معمولاً این مفهوم مترادف با میانگین فصلی ثابت است. بدین معنی که متغیر موردنظر برای هر فصل یک مقدار معین دارد که هر سال تکرار می‌شود. الگوی فصلی قطعی چون به صورت سیکل‌های تکراری است، لذا می‌توان آن را با متغیرهای مجازی و یا با استفاده از توابع مثلثاتی، مدل‌سازی نمود.

۱۵-۲-۱ متغیرهای مجازی فصلی

الگوی فصلی قطعی را می‌توان با استفاده از متغیرهای مجازی توصیف نمود، زیرا Y_t در هر فصل، مقدار معینی دارد که هر سال آن را تکرار می‌کند.

$$Y_t = \sum_{s=1}^{S} \gamma_s D_{st} + u_t \qquad (15-1)$$

برای داده‌های فصلی $S=4$ و برای داده‌های ماهانه $S=12$ می‌باشد. بنابراین، برای داده‌های فصلی معادله زیر را داریم:

$$Y_t = \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + u_t \qquad (15-2)$$

در اینجا برای هر فصل یک متغیر مجازی تعریف شده است. توجه شود که مدل (۱۵-۲) عرض از مبدأ ندارد و لذا چهار متغیر مجازی تعریف شده است. به‌عنوان مثال $D_{1t}=1$ برای فصل بهار و $D_{1t}=0$ برای سایر فصل‌ها می‌باشد. بدین ترتیب γ_s میانگین فصل s است. اگر میانگین

فصلی را با m_s نشان دهیم، در این صورت تخمین میانگین فصلی برابر با $\hat{\gamma}_s$ می‌باشد. به‌عنوان مثال برای فصل بهار داریم:

$$D_{1t}=1,\ D_{2t}=D_{3t}=D_{4t}=0 \ \Rightarrow\ Y_t=\gamma_1+u_t \qquad (15-3)$$

که γ_1 میانگین فصل بهار است.

به‌هرحال اگر نوسانات فصلی را با S_t نشان دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Y_t &= S_t + u_t \\ S_t &= \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} \end{aligned} \qquad (15-4)$$

Y_t شامل نوسانات فصلی به‌علاوهٔ عوامل تصادفی (u_t) است.

به‌هرحال، مدل فوق حالتی را توصیف می‌کند که Y چهار مقدار m_1، m_2، m_3 و m_4 را برای هر یک از چهار فصل اختیار می‌کند. این مقادیر هر سال تکرار می‌شوند، هر چند که حول این مقادیر، اندکی نوسانات تصادفی وجود دارد. با نادیده گرفتن u_t و با این فرض که Y_t در هر فصل یک مقدار معین و ثابت دارد، جزئیات این بحث در جدول ۱-۱۵ توصیف شده است.

جدول ۱-۱۵

ردیف	سال	فصل	Y_t	D_{1t}	D_{2t}	D_{3t}	D_{4t}
۱		۱	m_1	۱	۰	۰	۰
۲	۱	۲	m_2	۰	۱	۰	۰
۳		۳	m_3	۰	۰	۱	۰
۴		۴	m_4	۰	۰	۰	۱
۵		۱	m_1	۱	۰	۰	۰
۶	۲	۲	m_2	۰	۱	۰	۰
۷		۳	m_3	۰	۰	۱	۰
۸		۴	m_4	۰	۰	۰	۱
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		۱	m_1	۱	۰	۰	۰
⋮	$\frac{n}{4}$	۲	m_2	۰	۱	۰	۰
		۳	m_3	۰	۰	۱	۰
n		۴	m_4	۰	۰	۰	۱

فرم ماتریسی معادله (۲-۱۵) عبارت است از:

$$\mathbf{y}=\mathbf{D}\boldsymbol{\gamma}+\mathbf{u} \qquad (۱۵-۵)$$

تخمین γ با روش OLS برابر است با:

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}=(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}'\mathbf{y} \qquad (۱۵-۶)$$

با توجه به تعریف $\mathbf{D}$ در جدول ۱-۱۵، خواهیم داشت:

$$\mathbf{D}'\mathbf{D}=\frac{n}{4}\mathbf{I}_4 \quad , \quad (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}=\frac{4}{n}\mathbf{I}_4 \quad , \quad \mathbf{D}'\mathbf{y}=\frac{n}{4}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\gamma}=(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}'y=(\frac{4}{n}\mathbf{I}_4)\frac{n}{4}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}=\mathbf{m} \qquad (۱۵-۷)$$

بنابراین تخمین ضرایب متغیرهای مجازی (یعنی $\hat{\gamma}_s$) معادل با میانگین فصلی (m_s) است.

۲-۲-۱۵ الگوهای مثلثاتی

روش دیگر برای نشان دادن الگوی فصلی قطعی، استفاده از توابع مثلثاتی است. شکل کلی این توابع به صورت زیر است:

$$Y_t=\alpha_0+\sum_{s=1}^{\frac{S}{2}}\left[\alpha_s\cos\left(\frac{2\pi kt}{S}\right)+\beta_s\sin\left(\frac{2\pi kt}{S}\right)\right]+u_t \qquad (۱۵-۸)$$

S دورهٔ تناوب است که برای داده‌های فصلی $S=4$ می‌باشد:

$$Y_t=\alpha_0+\sum_{s=1}^{2}\left[\alpha_s\cos\left(\frac{2\pi kt}{S}\right)+\beta_s\sin\left(\frac{2\pi kt}{S}\right)\right]+u_t$$
$$=\alpha_0+\alpha_1\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\beta_1\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\alpha_2\cos(\pi t)+u_t \qquad (۱۵-۹)$$

$\sin(\pi t)=0$ است. مدل فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Y_t=\alpha_0+\alpha_1X_{1t}+\beta_1X_{2t}+\alpha_2X_{3t}+u_t \qquad (۱۵-۱۰)$$

که $X_{1t}=\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$، $X_{2t}=\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ و $X_{3t}=\cos(\pi t)$ است.

مقادیر هر یک از این متغیرها برای برآورد ضرایب معادله (۱۰-۱۵) در جدول ۲-۱۵ خلاصه شده است:

جدول ۲-۱۵

ردیف	سال	فصل	X_{1t}	X_{2t}	X_{3t}	Y_t
۱		۱	۰	۱	-۱	$\alpha_0-\alpha_2+\beta_1=m_1$
۲	۱	۲	-۱	۰	۱	$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=m_2$
۳		۳	۰	-۱	-۱	$\alpha_0-\alpha_2-\beta_1=m_3$
۴		۴	۱	۰	۱	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m_4$
۵		۱	۰	۱	-۱	$\alpha_0-\alpha_2+\beta_1=m_1$
۶	۲	۲	-۱	۰	۱	$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=m_2$
۷		۳	۰	-۱	-۱	$\alpha_0-\alpha_2-\beta_1=m_3$
۸		۴	۱	۰	۱	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m_4$
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮
		۱	۰	۱	-۱	$\alpha_0-\alpha_2+\beta_1=m_1$
⋮		۲	-۱	۰	۱	$\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=m_2$
	$\frac{n}{4}$	۳	۰	-۱	-۱	$\alpha_0-\alpha_2-\beta_1=m_3$
n		۴	۱	۰	۱	$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m_4$
جمع		n	۰	۰	۰	$\alpha_0=m_1+m_2+m_3+m_4$

جدول فوق نشان می‌دهد که میانگین X_{kt} ها برابر صفر است:

$$\overline{X}_1=\overline{X}_2=\overline{X}_3=0 \;, \quad \overline{Y}=\alpha_0=\frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4} \qquad (۱۵-۱۱)$$

برای تخمین ضرایب مدل (۱۰-۱۵) می‌توان از دو روش استفاده نمود. روش اول، استفاده از سیستم معادلات زیر است:

$$\begin{aligned} Y_1&=\alpha_0-\alpha_2+\beta_1=m_1 \\ Y_2&=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=m_2 \\ Y_3&=\alpha_0-\alpha_2-\beta_1=m_3 \\ Y_4&=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=m_4 \end{aligned} \qquad (۱۵-۱۲)$$

فرم ماتریسی سیستم معادلات فوق عبارت است از:

$$\mathbf{R\beta=m} \quad , \mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{m}=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}13)$$

با حل سیستم معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\hat{\beta}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{m} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4} \\ \frac{-m_2+m_4}{2} \\ \frac{m_1-m_3}{2} \\ \frac{-m_1+m_2-m_3+m_4}{4} \end{bmatrix} \qquad (24\text{-}14)$$

روش دیگر این است که نتایج فوق را با روش OLS به‌دست آوریم. بدین منظور ابتدا فرم ماتریسی معادله (۱۰-۱۵) به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y=X\beta+u} \qquad (15\text{-}15)$$

$\mathbf{y}$ بردار $n\times 1$ است که در جدول ۲-۱۵ تعریف شده است. ماتریس $\mathbf{X}$ نیز $n\times 4$ است که ستون اول آن برابر با ۱ و ستون دوم، سوم و چهارم آن بیانگر مشاهدات X_{1t}، X_{2t} و X_{3t} است که در جدول ۲-۱۵ تعریف شده است. تخمین‌زنندهٔ OLS عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y} \qquad (15\text{-}16)$$

ماتریس‌های $\mathbf{X'X}$ و $\mathbf{X'y}$ عبارتند از:

$$\mathbf{X'X}=\begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{X'X})^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{n} \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}17)$$

$$\mathbf{X'y}=\frac{n}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}=\frac{n}{4}\mathbf{R'm} \qquad (15\text{-}18)$$

با جایگذاری در (۱۶-۱۵) تخمین‌زنندهٔ OLS به‌دست می‌آیند:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y} \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_0 \\ \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{m_1+m_2+m_3+m_4}{4} \\ \frac{-m_2+m_4}{2} \\ \frac{m_1-m_3}{2} \\ \frac{-m_1+m_2-m_3+m_4}{4} \end{bmatrix} \qquad (15\text{-}19)$$

از آنجا که در مدل (۲-۱۵) تخمین ضرایب به‌صورت $\hat{\gamma}=\mathbf{m}$ و در مدل (۱۰-۱۵) به‌صورت $\hat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{m}$ است، لذا رابطه بین ضرایب این دو مدل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\left.\begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{R}^{-1}\hat{\gamma} \\ \hat{\gamma}=\mathbf{m} \end{array}\right. \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{R}^{-1}\hat{\gamma} \;,\; \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}=\hat{\gamma} \qquad (15\text{-}20)$$

$\mathbf{R}$ ماتریسی است که ضرایب این دو مدل را به همدیگر تبدیل می‌کند.

مثال ۱-۱۵: فرض کنید میانگین‌های فصلی به‌صورت زیر باشد:

$$m_1=-1/5 \;,\; m_2=-0/5 \;,\; m_3=0/5 \;,\; m_4=1/5$$

تخمین ضرایب عبارت است:

$$\hat{\alpha}_0=0 \;,\; \hat{\alpha}_1=1 \;,\; \hat{\beta}_1=-1 \;,\; \hat{\alpha}_2=\frac{1}{2}$$

بنابراین، تخمین مدل فصلی عبارت است از:

$$Y_t=0+1X_{1t}-1X_{2t}+\frac{1}{2}X_{3t}=X_{1t}-X_{2t}+\frac{1}{2}X_{3t}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos(\pi t)$$

مثال ۲-۱۵: فرض کنید داده‌های فصلی Y برای دوره ۸۰-۱۵۶۸ به‌صورت زیر باشد:

سال	فصل			
	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۶۱	۱/۵۰۸	۲/۰۰۶	۱/۰۰۰	۰/۴۹۱
۱۳۶۲	۱/۵۲۸	۲/۰۱۱	۱/۰۱۱	۰/۴۹۱
۱۳۶۳	۱/۵۱۴	۲/۰۲۶	۰/۹۲۲	۰/۴۹۷
۱۳۶۴	۱/۵۱۷	۲/۰۲۷	۰/۹۸۶	۰/۵۱۶
۱۳۶۵	۱/۵۰۷	۲/۰۳۲	۰/۹۸۷	۰/۵۰۶
۱۳۶۶	۱/۴۸۴	۲/۰۳۷	۰/۹۹۰	۰/۵۰۳
۱۳۶۷	۱/۴۷۶	۲/۰۴۱	۰/۹۷۹	۰/۵۰۳
۱۳۶۸	۱/۴۸۵	۲/۰۳۰	۰/۹۹۹	۰/۵۰۴
۱۳۶۹	۱/۴۷۷	۲/۰۲۷	۰/۹۹۲	۰/۵۰۸
۱۳۷۰	۱/۴۷۶	۲/۰۳۳	۱/۰۰۲	۰/۵۰۴
۱۳۷۱	۱/۴۷۷	۲/۰۳۹	۱/۰۰۴	۰/۵۰۱
۱۳۷۲	۱/۴۸۹	۲/۰۳۲	۱/۰۰۶	۰/۴۸۷
۱۳۷۳	۱/۴۹۵	۲/۰۴۰	۱/۰۱۵	۰/۴۸۳
۱۳۷۴	۱/۴۹۴	۲/۰۴۶	۱/۰۰۳	۰/۴۹۵
۱۳۷۵	۱/۴۹۰	۲/۰۵۰	۰/۹۹۸	۰/۴۸۷
۱۳۷۶	۱/۴۸۳	۲/۰۵۰	۱/۰۰۳	۰/۴۹۶
۱۳۷۷	۱/۴۸۰	۲/۰۵۳	۰/۹۹۶	۰/۴۸۷
۱۳۷۸	۱/۴۷۹	۲/۰۶۵	۱/۰۰۶	۰/۴۹۴
۱۳۷۹	۱/۴۸۴	۲/۰۶۹	۱/۰۰۶	۰/۵۰۲
۱۳۸۰	۱/۴۸۷	۲/۰۷۸	۰/۹۹۹	۰/۴۹۸

برآورد معادله (۲-۱۵) یا (۵-۱۵) عبارت است از:

$$\hat{Y}_t = ۱/۴۹۱D_{1t} + ۲/۰۴D_{2t} + ۰/۹۹۸D_{3t} + ۰/۴۹۸D_{4t} \qquad R^2 = ۰/۹۹۹$$
$$(۵۰۳) \quad (۶۸۹) \quad (۳۳۷) \quad (۱۶۸)$$

برآورد معادله (۷-۱۵) نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{Y}_t = ۱/۲۵۷ + ۰/۲۴۶\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + ۰/۷۷۱\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - ۰/۰۱۲\cos(\pi t)$$
$$(۸۴۹) \quad (۱۱۸) \quad (۳۶۸) \quad (-۸/۳)$$

اگر داده‌های فصلی همراه با روند باشند در این صورت می‌توان برای Y_t سه جزء را مشخص نمود:

۱- جزء روند که تابعی از زمان است (Q_t).

۲- جزء فصلی که تناوب فصلی را منعکس می‌کند (S_t).

۳- جزء نامنظم (تصادفی) که با u_t نشان داده می‌شود و بیانگر اثر عوامل تصادفی است.

$$Y_t = Q_t + S_t + u_t \tag{۱۵-۲۱}$$

که S_t به‌صورت (۲-۱۵) توصیف شد. Q_t نیز جزء روند است که ممکن است خطی و یا غیرخطی باشد:

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_r t^r \tag{۱۵-۲۲}$$

۳-۱۵ مدل‌های ARMA فصلی (SARMA)[1]

اگر داده‌های فصلی مانا باشند می‌توان آنها را با روش ARMA مدل‌سازی نمود. به‌عنوان مثال اگر Y_t صرفاً از یک الگوی فصلی تبعیت کند که دورهٔ تناوب آن s باشد، آنگاه می‌توان آن را با فرایند AR مدل‌سازی نمود:

$$Y_t = a_s Y_{t-s} + u_t \tag{۱۵-۲۳}$$

مدل فوق را فرایند فصلی محض می‌گویند. اگر $s=۴$ آنگاه دورهٔ تناوب به‌صورت فصلی و اگر برابر با ۱۲ باشد دورهٔ تناوب به‌صورت ماهانه است. بنابراین، برای داده‌های فصلی خواهیم داشت:

$$Y_t = a_4 Y_{t-4} + u_t \tag{۱۵-۲۴}$$

برای این فرایند، محاسبات زیر را انجام می دهیم:

$$\gamma_0 = \mathrm{var}(Y_t) = \mathrm{var}(u_t) = \sigma^2$$
$$\gamma_k = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t-k}) = E(Y_t Y_{t-k}) = E\big(Y_t(a_4 Y_{t-k-1} + u_{t-k})\big)$$
$$= \phi_4 E(Y_t Y_{t-k-1}) = a_4 \gamma_{k-1} \quad , \quad k = ۴,۸,۱۲,\ldots \tag{۱۵-۲۵}$$

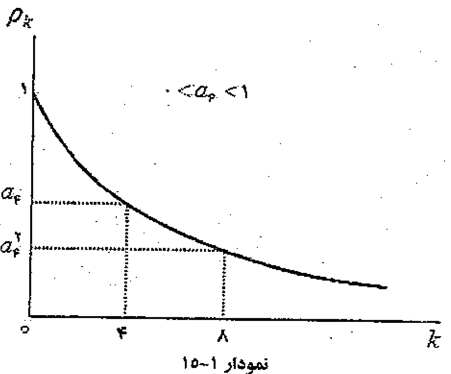
با جایگذاری‌های تکراری، می‌توان تابع خودکواریانس را به‌صورت زیر نوشت:

$$\gamma_k = a_4^{k/4}\gamma_0 = a_4^{k/4}\sigma^2 \quad ; \quad k = ۴,۸,۱۲,\ldots \tag{۱۵-۲۶}$$

و ضرایب خودهمبستگی عبارتند از:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = a_4^{k/4} \quad ; \quad k = ۴,۸,۱۲,\ldots \tag{۱۵-۲۷}$$

1- seasonal ARMA



نمودار ۱-۱۵

در حالت کلی، به‌ازای هر دوره تناوب مانند s خواهیم داشت:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = a_s^{k/s} \quad , \quad k = s, 2s, 3s, \ldots \qquad (۱۵-۲۸)$$

طبق مدل (۱۵-۲۴) مقدار Y_t در زمان t (در اینجا زمان بیانگر یک فصل معین در یک سال معین است) بستگی به مقدار آن در فصل $t-4$ (یعنی فصل مشابه در سال قبل) دارد. به‌عنوان مثال دیگر، بین مقدار Y_t در فصل بهار هر سال با مقدار آن در فصل بهار سال قبل همبستگی وجود دارد. ولی مقدار Y_t در فصل بهار هیچ ارتباطی با مقدار آن در فصل زمستان ندارد. حال اگر Y_t هم وابسته به مقدار خود در فصل مشابه سال قبل و هم وابسته به مقدار خود در فصل قبل باشد بایستی Y_{t-1} و Y_{t-4} را نیز لحاظ کرد. در این صورت آن را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + a_4 Y_{t-4} + u_t \qquad (۱۵-۲۹)$$

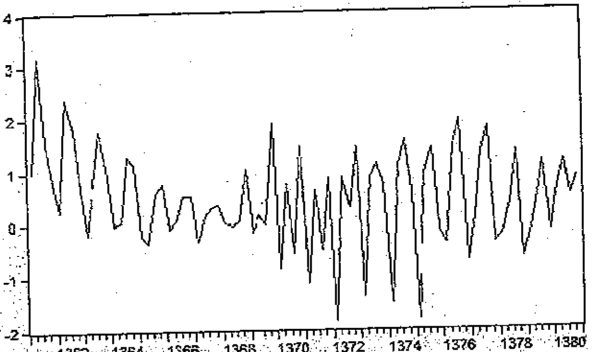
از طرف دیگر، به‌جای فرایند خودرگرسیون می‌توان یک فرایند میانگین متحرک فصلی را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$Y_t = u_t + b_4 u_{t-4} \qquad (۱۵-۳۰)$$

ضرایب خودهمبستگی این مدل عبارتند از:

$$\rho_k = b_4 \quad , \quad k = 4$$
$$= 0 \quad , \quad k \neq 0 \qquad (۱۵-۳۱)$$

مثال ۳-۱۵: فرایند $Y_t = 0/8 Y_{t-1} + u_t$ را در نظر بگیرید که یک فرایند فصلی مانا است. مقادیر حاصله برای Y_t با فرمان genr y=0.8*y(-1)+nrnd توسط نرم افزار Eviews ایجاد شده است که نمودار زیر آن را نشان می‌دهد.



توابع خودهمبستگی (AC) و خودهمبستگی (PAC) به‌صورت زیر به دست آمده است. این نمودار نشان می‌دهد که ضرایب خود همبستگی برای وقفه های ۴، ۸، ۱۲ و ... غیرصفر است. هم‌چنین ضریب خودهمبستگی جزئی برای وقفه ۴، غیرصفر و در سایر وقفه ها برابر صفر است.

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.066	-0.066	0.3574	0.550
		2	-0.153	-0.158	2.3379	0.311
		3	-0.116	-0.142	3.4786	0.324
		4	0.775	0.766	55.321	0.000
		5	-0.106	-0.199	56.302	0.000
		6	-0.164	-0.025	58.677	0.000
		7	-0.106	0.085	59.692	0.000
		8	0.529	-0.250	85.155	0.000
		9	-0.144	0.006	87.077	0.000
		10	-0.133	0.083	88.743	0.000
		11	-0.025	0.073	88.802	0.000
		12	0.370	0.012	102.02	0.000
		13	-0.147	0.030	104.15	0.000
		14	-0.127	-0.081	105.75	0.000
		15	0.064	0.077	106.15	0.000
		16	0.218	-0.144	111.03	0.000
		17	-0.160	-0.038	113.71	0.000
		18	-0.156	-0.036	116.30	0.000
		19	0.091	-0.092	117.20	0.000

در مباحث فوق، فرض بر این بود که Y_t فقط از یک الگوی فصلی تبعیت می‌کند. به همین دلیل برای آن یک الگوی AR فصلی و یا MA فصلی معرفی کردیم. اما در عمل، تشخیص

الگوهای فصلی و غیرفصلی مشکل است. به‌عبارت دیگر Y_t می‌تواند هم از الگوی فصلی تبعیت کند که طبق آن، با Y_{t-4} همبستگی دارد و هم می‌تواند از یک الگوی غیرفصلی تبعیت کند که طبق آن با Y_{t-1} همبستگی خواهد داشت. اگر خصوصیات فصلی را لحاظ کنیم، آنگاه بایستی تغییراتی در مدل ARMA ایجاد کنیم. به‌عنوان مثال، الگوهای زیر را در نظر بگیرید که در آنها، اثرات فصلی به مدل ARMA(1,1) اضافه شده است:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \underbrace{a_4 Y_{t-4}}_{\text{اثرات فصلی}} + u_t + \theta_1 u_{t-1} \qquad (۱۵\text{-}۳۲)$$

و یا

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \underbrace{b_4 u_{t-4}}_{\text{اثرات فصلی}} \qquad (۱۵\text{-}۳۳)$$

در معادله (۳۲-۱۵) یک AR فصلی (یعنی Y_{t-4}) و در معادله (۳۳-۱۵) یک MA فصلی (یعنی u_{t-4}) به مدل ARMA(1,1) اضافه شده است. الگوهای فوق را می‌توان بسط داد و به‌صورت زیر توصیف نمود:

$$(1-\phi_1 L)(1-a_4 L^4)Y_t = (1+\theta_1 L)u_t \qquad (۱۵\text{-}۳۴)$$

$$(1-\phi_1 L)Y_t = (1+\theta_1 L)(1+b_4 L^4)u_t \qquad (۱۵\text{-}۳۵)$$

مدل‌های فوق معروف به الگوهای ضربی[1] هستند. با بسط مدل‌های فوق، خواهیم داشت:

$$(1-\phi_1 L - a_4 L^4 + \phi_1 a_4 L^5)Y_t = (1+\theta_1 L)u_t \;\Rightarrow\; Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - a_4 Y_{t-4} + \phi_1 a_4 Y_{t-5} = u_t + \theta_1 u_{t-1}$$

$$(1-\phi_1 L)Y_t = (1+\theta_1 L + b_4 L^4 + \theta_1 b_4 L^5)u_t \;\Rightarrow\; Y_t - \phi_1 Y_{t-1} = u_t + \theta_1 u_{t-1} + b_4 u_{t-4} + \theta_1 b_4 u_{t-5}$$

حال می‌توان شکل کلی مدل‌های ARMA ضربی را برای لحاظ نمودن اثرات فصلی معرفی نمود. بدین منظور مدل ARMA(p,q) را به‌صورت $\phi_p(L)Y_t = \theta_q(L)u_t$ درنظر بگیرید که به آن، اثرات فصلی را اضافه می‌کنیم. بدین‌منظور یک جزء AR فصلی و یک جزء MA فصلی را اضافه می‌کنیم که اولی را با $A_P(L^s)$ و دومی را با $B_Q(L^s)$ نشان می‌دهیم. شکل کلی این مدل عبارت است از:

$$\phi_p(L)A_P(L^s)Y_t = \theta_q(L)B_Q(L^s)u_t \qquad (۱۵\text{-}۳۶)$$

1- multiplicative models

عملگرهای معرفی شده در مدل فوق، عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\phi_p(L) &= 1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p \\
\theta_q(L) &= 1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+\cdots+\theta_q L^q \\
A_P(L^s) &= 1-a_s L^s-a_{2s}L^{2s}-\cdots-a_{Ps}L^{Ps} \\
B_Q(L^s) &= 1+b_s L^s+b_{2s}L^{2s}+\cdots+b_{Qs}L^{Qs}
\end{aligned} \qquad (۱۵\text{-}۳۷)$$

به‌عنوان مثال به‌ازای $p=0$ و $p=1$، مقادیر $\phi_0(L)=1$ و $\phi_1(L)=1-\phi_1 L$ را داریم. این روابط برای سایر عملگرها نیز برقرار است.

مدل فوق را به‌اختصار با $SARMA(p,q)(P,Q)_s$ نشان می‌دهند. p و q مرتبهٔ ARMA غیرفصلی، P و Q مرتبهٔ ARMA فصلی را نشان می‌دهند. s نیز دوره تناوب داده‌ها است که برای داده‌های فصلی $s=4$ و برای داده‌های ماهانه $s=12$ و برای داده‌های هفتگی $s=52$ است.

مثال ۴-۱۵: معادله (۳۲-۱۵) بیانگر الگوی $SARMA(1,1)(1,0)_4$ است.

مثال ۵-۱۵: معادله (۳۳-۱۵) بیانگر الگوی $SARMA(1,1)(0,1)_4$ است.

مثال ۶-۱۵: معادله زیر بیانگر الگوی $SARMA(1,2)(1,1)_4$ است:

$$(1-\phi_1 L)(1-a_4 L^4)Y_t = (1+\theta_1 L+\theta_2 L^2)(1+b_4 L^4)u_t$$

$$\begin{aligned}
p=1 &\Rightarrow \phi_p(L)=1-\phi_1 L \\
q=2 &\Rightarrow \theta_q(L)=1+\theta_1 L+\theta_2 L^2 \\
P=1 &\Rightarrow A_P(L^4)=1-a_4 L^4 \\
Q=1 &\Rightarrow B_Q(L^4)=1+b_4 L^4
\end{aligned}$$

با جایگذاری در معادله فوق، خواهیم داشت:

$$(1-\phi_1 L-a_4 L^4+\phi_1 a_4 L^5)Y_t = (1+\theta_1 L+\theta_2 L^2+b_4 L^4+\theta_1 b_4 L^5+\theta_2 b_4 L^6)u_t$$

$$Y_t-\phi_1 Y_{t-1}-a_4 Y_{t-4}+\phi_1 a_4 Y_{t-5} = u_t+\theta_1 u_{t-1}+\theta_2 u_{t-2}+b_4 u_{t-4}+\theta_1 b_4 u_{t-5}+\theta_2 b_4 u_{t-6}$$

۴-۱۵ مدل ARIMA فصلی (SARIMA)

فرض مدل‌های ARMA آن است که Y_t مانا است. اگر Y_t نامانا باشد، با تفاضل‌گیری می‌توان آن را مانا کرد. این موضوع در خصوص داده‌های فصلی تا حدودی متفاوت است. زیرا ممکن

است تفاضل مرتبه اول که به‌صورت $\Delta Y_t=(1-L)Y_t=Y_t-Y_{t-1}$ است، موجب مانا شدن Y_t نشود. در این صورت ممکن است نوع دیگری از تفاضل‌گیری که معروف به تفاضل‌گیری فصلی است، Y_t را مانا کند. تفاضل‌گیری فصلی را با $\Delta_s Y_t=Y_t-Y_{t-s}$ نشان می‌دهیم. علاوه‌بر این، ممکن است نیاز به هم تفاضل‌گیری مرتبه اول و هم تفاضل‌گیری فصلی به‌طور همزمان داشته باشیم. بنابراین برای مانا کردن Y_t ممکن است یکی از سه حالت زیر نیاز باشد:

الف) تفاضل مرتبه اول

$$\Delta Y_t=(1-L)Y_t=Y_t-Y_{t-1} \qquad (15\text{-}38)$$

ب) تفاضل فصلی

$$\Delta_s Y_t=(1-L^s)Y_t=Y_t-Y_{t-s} \qquad (15\text{-}39)$$

برای داده‌های فصلی $s=4$ و برای داده‌های ماهانه $s=12$ است.

ج) تفاضل مرتبه اول و فصلی

$$\begin{aligned}\Delta\Delta_s Y_t&=\Delta(\Delta_s Y_t)=\Delta_s(\Delta Y_t)=(1-L)(1-L^s)Y_t\\&=(1-L-L^s+L^{s+1})Y_t=Y_t-Y_{t-1}-Y_{t-s}+Y_{t-s-1}\end{aligned} \qquad (15\text{-}40)$$

حال شکل کلی تفاضل‌گیری معمولی و فصلی را به‌صورت زیر نشان می دهیم:

$$\Delta^d\Delta_s^D Y_t=(1-L)^d(1-L^s)^D Y_t \qquad (15\text{-}41)$$

d مرتبه تفاضل‌گیری معمولی و D مرتبه تفاضل‌گیری فصلی است. هم‌چنین s دوره تناوب داده‌ها است که برای داده‌های فصلی برابر ۴ است.

مثال ۷-۱۵: اگر $d=2$ و $D=1$ باشد، بیانگر تفاضل معمولی مرتبهٔ دو و تفاضل فصلی مرتبهٔ یک است:

$$\begin{aligned}\Delta^2\Delta_4 Y_t&=(1-L)^2(1-L^4)Y_t\\&=(1-2L+L^2-L^4+2L^5-L^6)Y_t\\&=Y_t-2Y_{t-1}+Y_{t-2}-Y_{t-4}+2Y_{t-5}-Y_{t-6}\end{aligned}$$

اگر داده‌های فصلی با تفاضل‌گیری مرتبهٔ d و D مانا شود، آنگاه از یک مدل ARIMA به‌صورت زیر استفاده می‌شود که شکل دیگری از مدل (۳۶-۱۵) است:

$$\phi_p(L)A_P(L^s)(\Delta^d\Delta^D Y_t)=\theta_q(L)B_Q(L^s)u_t \qquad (15\text{-}42)$$

اگر به جای $\Delta^d\Delta_s^D Y_t$ از (۴۱-۱۵) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$\phi_p(L)A_P(L^s)(1-L)^d(1-L^s)^D Y_t=\theta_q(L)B_Q(L^s)u_t \qquad (15\text{-}43)$$

مدل فوق به اختصار با $SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)_s$ نشان داده می‌شود.

مثال ۸-۱۵: مدل $SARIMA(p,0,q)(0,0,0)_s$ معادل با $ARMA(p,q)$ است.

مثال ۹-۱۵: مدل $SARIMA(p,d,q)(0,0,0)_s$ معادل با $ARIMA(p,d,q)$ است.

مثال ۱۰-۱۵: مدل $SARIMA(1,0,0)(1,0,0)_s$ عبارت است از:

$$p=1\ ,\ d=0\ ,\ q=0\ ,\ P=1\ ,\ D=0\ ,\ Q=0$$
$$\phi_1(L)A_1(L^s)(1-L)^0(1-L^s)^0Y_t=\theta_0(L)B_0(L^s)u_t$$
$$(1-\phi_1L)(1-a_sL^s)Y_t=u_t$$
$$(1-\phi_1L-a_sL^s+\phi_1a_sL^{s+1})Y_t=u_t$$
$$Y_t-\phi_1Y_{t-1}-a_sY_{t-s}+\phi_1a_sY_{t-s-1}=u_t$$

مثال ۱۱-۱۵: مدل $SARIMA(1,0,1)(1,0,1)_s$ عبارت است از:

$$p=1\ ,\ d=0\ ,\ q=1\ ,\ P=1\ ,\ D=0\ ,\ Q=1$$
$$\phi_1(L)A_1(L^s)(1-L)^0(1-L^s)^0Y_t=\theta_1(L)B_1(L^s)u_t$$
$$(1-\phi_1L)(1-a_sL^s)Y_t=(1+\theta_1L)(1+b_sL^s)u_t$$
$$(1-\phi_1L-a_sL^s+\phi_1a_sL^{s+1})Y_t=(1+\theta_1L+b_sL^s+\theta_1b_sL^{s+1})u_t$$

مثال ۱۲-۱۵: مدل خطوط هوایی: این مدل اولین بار توسط باکس و جنکینز(۱۹۷۶) برای مدل‌سازی خطوط هوایی ارائه گردید. این مدل به‌صورت $SARIMA(0,1,1)(0,1,1)_{12}$ می‌باشد:

$$p=0\ ,\ d=1\ ,\ q=1\ ,\ P=0\ ,\ D=1\ ,\ Q=1\ ,\ s=12$$
$$\phi_0(L)A_0(L)(1-L)^1(1-L^{12})^1Y_t=\theta_1(L)B_1(L)u_t$$
$$\Rightarrow\ (1-L)(1-L^{12})Y_t=(1+\theta_1L)(1+b_{12}L^{12})u_t$$

چون $(1-L)(1-L^{12})Y_t$ مانا است، لذا سمت راست آن نیز مانا است.

۱۵-۵ ضرایب خودهمبستگی سری‌های زمانی فصلی

ضرایب خودهمبستگی را برای داده‌های فصلی می‌توان مشابه سایر سری‌ها حساب نمود. ضرایب خودهمبستگی می‌تواند در شناسایی الگوهای فصلی کمک نمایند. برخی از این محاسبات در مثال‌های زیر ارائه شده است.

مثال ۱۳-۱۵: ضرایب خودهمبستگی را برای مدل زیر حساب می‌کنیم $(s=12)$:

$$Y_t=(1+\theta L)(1+bL^{12})u_t=(1+\theta L+bL^{12}+\theta bL^{13})u_t$$
$$=u_t+\theta u_{t-1}+bu_{t-12}+\theta bL^{13}u_{t-13}$$

۱) $E(Y_t)=0$

۲) $\gamma_0=\mathrm{var}(Y_t)=(1+\theta^2)(1+b^2)\sigma^2$

۳) $$\rho_k=\begin{cases}1 & k=0\\ \dfrac{-\theta}{1+\theta^2} & k=1\\ \dfrac{\theta b}{(1+\theta^2)(1+b^2)} & k=11,13\\ \dfrac{-b}{(1+b^2)} & k=12\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

مثال ۱۴-۱۵: برای مدل $SARIMA(0,0,1)(0,0,1)_s$ توابع خودکوواریانس عبارتند از:

$$Y_t=(1+\theta L)(1+bL^s)u_t=(1+\theta L+bL^s+\theta bL^{s+1})u_t$$
$$=u_t+\theta u_{t-1}+bu_{t-s}+\theta bu_{t-s-1}$$
$$\gamma_0=\mathrm{var}(Y_t)=(1+\theta^2)(1+b^2)\sigma^2$$
$$\gamma_1=\mathrm{cov}(Y_t,Y_{t-1})=-\theta(1+b^2)\sigma^2$$
$$\gamma_{s-1}=\mathrm{cov}(Y_t,Y_{t-(s-1)})=\theta b\sigma^2$$
$$\gamma_s=\mathrm{cov}(Y_t,Y_{t-s})=-b(1+\theta^2)\sigma^2$$
$$\gamma_{s+1}=\mathrm{cov}(Y_t,Y_{t-(s+1)})=\theta b\sigma^2$$
$$\gamma_r=\mathrm{cov}(Y_t,Y_{t-r})=0 \qquad r\neq 0,1,s-1,s,s+1$$

ضرایب خودهمبستگی عبارتند از:

$$\rho_0=1$$
$$\rho_1=\frac{-\theta}{1+\theta^2}$$
$$\rho_s=\frac{-b}{1+b^2}$$
$$\rho_{s-1}=\rho_{s+1}=\rho_1\rho_s=\frac{\theta b}{(1+\theta^2)(1+b^2)}$$
$$\rho_r=0 \qquad r\neq 0,1,s-1,s\,s+1$$

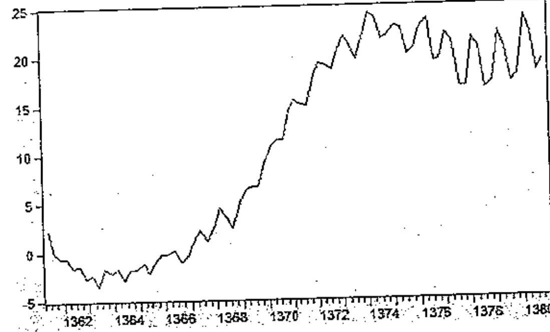
مثال ۱۵-۱۵: در مثال ۱۴-۱۵ به ازای $s=4$، ضرایب خودهمبستگی عبارتند از:

$$\rho_1=\frac{-\theta}{1+\theta^2}$$
$$\rho_4=\frac{-b}{1+b^2}$$
$$\rho_3=\rho_5=\rho_1\rho_4=\frac{\theta b}{(1+\theta^2)(1+b^2)}$$
$$\rho_r=0 \qquad r\neq 0,1,3,4,5$$

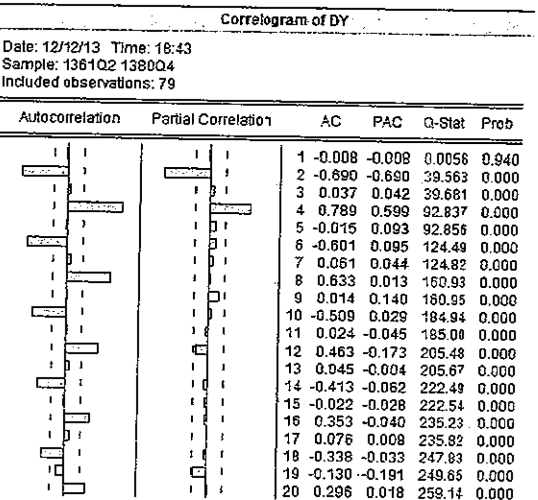
مثال ۱۶-۱۵: فرایند Y_t را در نظر بگیرید که از $SARIMA(0,1,0)(0,1,0)_4$ تبعیت می‌کند. این مدل عبارت است از:

$$(1-L)(1-L^4)Y_t=u_t$$
$$(1-L-L^4+L^5)Y_t=u_t$$
$$Y_t-Y_{t-1}-Y_{t-4}+Y_{t-5}=u_t$$

داده‌های این فرایند با فرمان genr y=y(-1)+y(4)-y(-5)+nrnd با استفاده از نرم افزار Eviews ایجاد شده است که در نمودار زیر ترسیم شده است (فایل data13):



ضرایب خودهمبستگی برای تفاضل مرتبه اول، یعنی $\Delta Y_t=(1-L)Y_t$، عبارتند از:

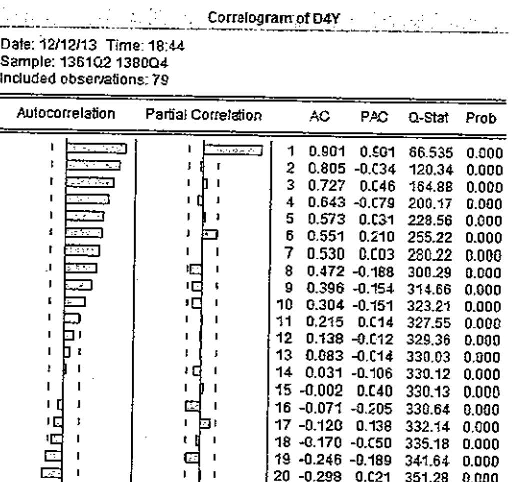


Correlogram of DY

Date: 12/12/13 Time: 18:43
Sample: 1361Q2 1380Q4
Included observations: 79

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.008	-0.008	0.0056	0.940
		2	-0.690	-0.690	39.563	0.000
		3	0.037	0.042	39.681	0.000
		4	0.789	0.599	92.837	0.000
		5	-0.015	0.093	92.856	0.000
		6	-0.601	0.095	124.49	0.000
		7	0.061	0.044	124.82	0.000
		8	0.633	0.013	160.93	0.000
		9	0.014	0.140	160.95	0.000
		10	-0.509	0.029	184.94	0.000
		11	0.024	-0.045	185.00	0.000
		12	0.463	-0.173	205.48	0.000
		13	0.045	-0.004	205.67	0.000
		14	-0.413	-0.062	222.49	0.000
		15	-0.022	-0.028	222.54	0.000
		16	0.353	-0.040	235.23	0.000
		17	0.076	0.008	235.82	0.000
		18	-0.338	-0.033	247.83	0.000
		19	-0.130	-0.191	249.65	0.000
		20	0.296	0.018	259.14	0.000

تفاضل‌گیری مرتبه اول نتوانسته است که تغییرات فصلی را حذف کند. ضرایب خودهمبستگی برای تغییرات فصلی (یعنی $\Delta_4 Y_t = (1-L^4)Y_t$) عبارتند از:

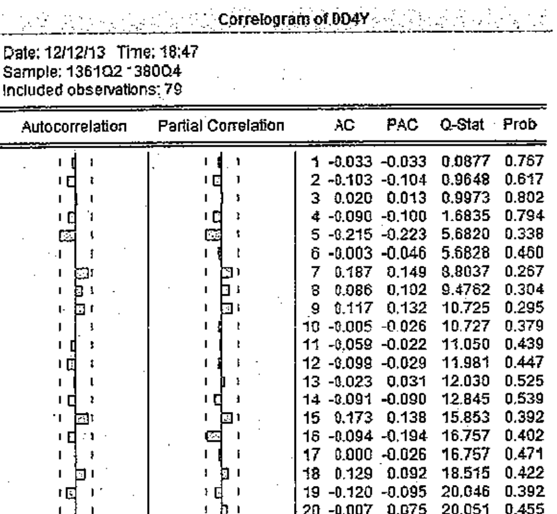


Correlogram of D4Y

Date: 12/12/13 Time: 18:44
Sample: 1361Q2 1380Q4
Included observations: 79

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.901	0.901	66.535	0.000
		2	0.805	-0.034	120.34	0.000
		3	0.727	0.046	164.88	0.000
		4	0.643	-0.079	200.17	0.000
		5	0.573	0.031	228.56	0.000
		6	0.551	0.210	255.22	0.000
		7	0.530	0.003	280.22	0.000
		8	0.472	-0.188	300.29	0.000
		9	0.396	-0.154	314.66	0.000
		10	0.304	-0.151	323.21	0.000
		11	0.215	0.014	327.55	0.000
		12	0.138	-0.012	329.36	0.000
		13	0.083	-0.014	330.03	0.000
		14	0.031	-0.106	330.12	0.000
		15	-0.002	0.040	330.13	0.000
		16	-0.071	-0.205	330.64	0.000
		17	-0.120	0.138	332.14	0.000
		18	-0.170	-0.050	335.18	0.000
		19	-0.246	-0.189	341.64	0.000
		20	-0.298	0.021	351.28	0.000

ملاحظه می‌شود که تغییرات فصلی نیز نتوانسته است تغییرات Y_t را حذف کند. حال اگر تغییرات فصلی و معمولی را توأم حساب کنیم آنگاه ضرایب خودهمبستگی برای $\Delta\Delta_4 Y_t$ به‌صورت زیر به دست می‌آید که کاملاً مانا است.



Correlogram of DD4Y

Date: 12/12/13 Time: 18:47
Sample: 1361Q2 1380Q4
Included observations: 79

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.033	-0.033	0.0877	0.767
		2	-0.103	-0.104	0.9648	0.617
		3	0.020	0.013	0.9973	0.802
		4	-0.090	-0.100	1.6835	0.794
		5	-0.215	-0.223	5.6820	0.338
		6	-0.003	-0.046	5.6828	0.460
		7	0.187	0.149	8.8037	0.267
		8	0.086	0.102	9.4762	0.304
		9	0.117	0.132	10.725	0.295
		10	-0.005	-0.026	10.727	0.379
		11	-0.059	-0.022	11.050	0.439
		12	-0.098	-0.029	11.981	0.447
		13	-0.023	0.031	12.030	0.525
		14	-0.091	-0.090	12.845	0.539
		15	0.173	0.138	15.853	0.392
		16	-0.094	-0.194	16.757	0.402
		17	0.000	-0.026	16.757	0.471
		18	0.129	0.092	18.515	0.422
		19	-0.120	-0.095	20.046	0.392
		20	-0.007	0.075	20.051	0.455

۱۵-۶ ریشه واحد فصلی

اگر Y_t دارای ریشه واحد فصلی باشد آنگاه از یک فرایند گام تصادفی تبعیت خواهد کرد. در فصل چهارهم دیدیم که برای بررسی ریشه واحد سری‌های زمانی از فرایند AR (۱) استفاده می‌شود. در اینجا نیز برای آزمون ریشه واحد از یک فرایند AR فصلی استفاده می‌کنیم که عبارت است از (برای سادگی به‌جای a_4 از a استفاده می‌کنیم):

$$Y_t = aY_{t-4} + u_t \qquad (۱۵-۴۴)$$
$$(1-aL^4)Y_t = u_t$$

اما $1-aL^4$ را می‌توان به‌صورت زیر تجزیه نمود:

$$1-aL^4 = (1-\sqrt{a}L^2)(1+\sqrt{a}L^2) = (1-\sqrt[4]{a}L)(1+\sqrt[4]{a}L)(1-\sqrt[4]{a}iL)(1+\sqrt[4]{a}iL) \qquad (۱۵-۴۵)$$

و یا در حالت کلی می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$1-aL^4 = (1-a_1L)(1+a_2L)(1-a_3iL)(1+a_4iL) \qquad (۱۵-۴۶)$$

ریشه واحد بدان معنا است که $a=1$ باشد و این معادل با $a_1=a_2=a_3=a_4=1$ است. بنابراین برای Y_t یک معادله تفاضلی به‌صورت $(1-aL^4)Y_t=u_t$ داریم که شکل همگن آن عبارت است از:

$$(1-aL^4)Y_t=0 \Rightarrow (1-a_1L)(1+a_2L)(1-a_3iL)(1+a_4iL)Y_t=0 \qquad (15-47)$$

صفر شدن معادله فوق می‌تواند به یکی از اشکال $(1-a_1L)Y_t=0$، $(1+a_2L)Y_t=0$، $(1-a_3iL)Y_t=0$ و $(1+a_4iL)Y_t=0$ برقرار شود. اگر $a_i=1$ باشد آنگاه هر یک از این حالت‌ها بیانگر نوع خاصی از ریشه واحد است. هر یک از این موارد را بررسی می‌کنیم.

حالت اول) ریشه واحد غیرفصلی $(a_1=1)$

اگر $a_1=1$ باشد آنگاه شرط $(1-a_1L)Y_t=0$ تبدیل به $(1-L)Y_t=0$ می‌شود:

$$(1-L)Y_t=0 \Rightarrow Y_t-Y_{t-1}=0 \Rightarrow Y_t=Y_{t-1} \qquad (15-48)$$

این رابطه بیانگر آن است که تفاضل مرتبه اول، یعنی Y_t-Y_{t-1} مانا است. این بدان معنا است که Y_t از یک فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کند و لذا دارای ریشه واحد غیرفصلی است و به همین دلیل، تفاضل مرتبه اول آن مانا است. در این شرایط مقدار Y_t در هر زمان (فصل) برابر با مقدار آن در زمان قبلی (فصل قبلی) می‌باشد. البته همراه با نوسانات تصادفی که ناشی از u_t است.

حالت دوم) ریشه واحد فصلی (شش ماهه) $(a_2=1)$

اگر $a_2=1$ باشد آنگاه $(1+a_2L)Y_t=0$ تبدیل به $(1+L)Y_t=0$ می‌شود. بنابراین به‌ازای $a_2=1$ شرایط زیر را داریم:

$$(1+L)Y_t=0 \Rightarrow Y_t+Y_{t-1}=0 \Rightarrow Y_t=-Y_{t-1} \qquad (15-49)$$

بدین ترتیب اگر $a_2=1$ باشد آنگاه Y_t+Y_{t-1} مانا خواهد بود. در این حالت، مقدار Y_t طی یک دورهٔ شش‌ماهه تکرار خواهد شد. به‌عنوان مثال اگر در یک سال معین، مقدار Y_t در فصل اول برابر با c باشد، خواهیم داشت:

فصل اول: $Y_t=c$
فصل دوم: $Y_{t+1}=-Y_t=-c$
فصل سوم: $Y_{t+2}=-Y_{t+1}=-(-c)=c$
فصل چهارم: $Y_{t+3}=-Y_{t+2}=-c$

جدول ۳-۱۵

ردیف	سال	فصل	Y_t
۱		۱	c
۲	۱	۲	$-c$
۳		۳	c
۴		۴	$-c$
۵		۱	c
۶	۲	۲	$-c$
۷		۳	c
۸		۴	$-c$
⋮	⋮	⋮	⋮
		۱	c
⋮	$\frac{n}{4}$	۲	$-c$
		۳	c
n		۴	$-c$

در اینجا ریشه واحد شش‌ماهه (نیم‌سالانه) وجود دارد و لذا تفاضل شش‌ماهه، مانا خواهد بود. تفاضل شش‌ماهه به‌صورت $\Delta_2Y_t=Y_t-Y_{t-2}=(1-L^2)Y_t$ است که بیانگر تفاضل مقدار Y در زمان t از مقدار Y در زمان $t-2$ است. بنابراین، از آنجا که تفاضل شش‌ماهه مانا است، نتیجه می‌شود که ریشه واحد شش‌ماهه وجود دارد. در واقع $Y_t+Y_{t-1}=0$ معادل با $\Delta_2Y_t=Y_t-Y_{t-2}=0$ است که بیانگر مانا بودن تفاضل شش‌ماهه است. در اینجا چون مقدار Y هر دو فصل یکبار تکرار می‌شود لذا طول هر سیکل برابر با شش‌ماه (دو فصل یا نیم سال) است و لذا در هر سال دو سیکل خواهیم داشت.

حالت سوم) ریشه واحد فصلی (سه ماهه) ($a_3=1$ یا $a_4=1$)

اگر $a_3=1$ باشد، آنگاه $(1-\phi_3iL)Y_t=0$ تبدیل به $(1-iL)Y_t=0$ می‌شود. بنابراین، به‌ازای $a_3=1$ شرایط زیر را داریم:

$$(1-iL)Y_t=0 \Rightarrow Y_t-iY_{t-1}=0 \Rightarrow Y_t=iY_{t-1} \qquad (15-50)$$

بدین ترتیب اگر $a_3=1$ باشد، آنگاه Y_t-iY_{t-1} مانا خواهد بود. در این حالت، مقدار Y_t طی یک دوره چهار فصلی، تکرار خواهد شد. به‌عنوان مثال اگر در یک سال معین، مقدار Y_t در فصل اول برابر با c باشد، خواهیم داشت:

فصل اول: $Y_t = c$

فصل دوم: $Y_{t+1} = iY_t = ic$

فصل سوم: $Y_{t+2} = iY_{t+1} = i(ic) = i^2c = -c$

فصل چهارم: $Y_{t+3} = iY_{t+2} = i(-c) = -ic$

فصل اول: $Y_{t+4} = iY_{t+3} = i(-ic) = -i^2c = c$

جدول ٤-۱۵

ردیف	سال	فصل	Y_t
۱		۱	c
۲	۱	۲	ic
۳		۳	$-c$
۴		۴	$-ic$
۵		۱	c
۶	۲	۲	ic
۷		۳	$-c$
۸		۴	$-ic$
⋮	⋮	⋮	⋮
		۱	c
⋮	$\frac{n}{4}$	۲	ic
		۳	$-c$
n		۴	$-ic$

در اینجا ریشه واحد فصلی وجود دارد و لذا تفاضل فصلی، مانا خواهد بود. تفاضل فصلی به‌صورت $\Delta_4 Y_t = Y_t - Y_{t-4} = (1-L^4)Y_t$ است که بیانگر تفاضل مقدار Y در زمان t از مقدار Y در زمان $t-4$ است. بنابراین، از آنجا که تفاضل فصلی مانا است، نتیجه می‌شود که ریشه واحد فصلی وجود دارد. در واقع $Y_t - iY_{t-1} = 0$ معادل با $\Delta_4 Y_t = Y_t - Y_{t-4} = 0$ است که بیانگر مانا بودن تفاضل فصلی است. در اینجا چون مقدار Y هر چهار فصل یکبار تکرار می‌شود لذا طول هر سیکل برابر با دوازده ماه (چهار فصل) است و لذا در هر سال یک سیکل خواهیم داشت. همان‌طور که گفته شد، مانا بودن $Y_t - iY_{t-1} = 0$، معادل با مانا بودن تفاضل فصلی است که می‌توان آن را به‌صورت زیر اثبات نمود:

$$
\begin{aligned}
Y_t - iY_{t-1} = 0 \Rightarrow\ & Y_{t-3} = iY_{t-4} \\
& Y_{t-2} = iY_{t-3} = i(iY_{t-4}) = i^2 Y_{t-4} = -Y_{t-4} \\
& Y_{t-1} = iY_{t-2} = i(-Y_{t-4}) = -iY_{t-4} \\
& Y_t = iY_{t-1} = i(-iY_{t-4}) = -i^2 Y_{t-4} = Y_{t-4} \Rightarrow Y_t - Y_{t-4} = 0
\end{aligned}
\qquad (15\text{-}51)
$$

رابطهٔ آخر بیانگر $Y_t - Y_{t-4} = 0$ است و نشان می‌دهد که تفاضل فصلی مانا است. بنابراین، $a_4 = 1$ به معنی وجود ریشه واحد فصلی است. این نتایج برای $a_4 = 1$ نیز برقرار است.

۱۵-۷ آزمون ریشه واحد فصلی

در بخش قبلی دیدیم که داده‌های فصلی علاوه‌بر ریشه واحد معمولی (غیرفصلی) ممکن است دارای ریشه واحد فصلی نیز باشند. در اینجا حالت‌های مختلف را بررسی می‌کنیم. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که داده‌های فصلی داری نوسانات فصلی قطعی هستند و سپس به بررسی حالت عمومی می‌پردازیم که برای هر نوع سری زمانی فصلی قابل کاربرد است.

اگر فرایند Y_t دارای نوسانات فصلی قطعی باشد (مانند آنچه در بخش ۱۵-۲ معرفی شد)، در این صورت می‌توان نوسانات فصلی آن را با استفاده از متغیرهای مجازی فصلی لحاظ کرده و آزمون ریشه واحد را مشابه روش دیکی- فولر انجام داد:

$$\Delta Y_t = \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \gamma_4 D_{4t} + \theta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^{r} \beta_i Y_{t-i} + u_t \qquad (15\text{-}52)$$

آزمون فرضیه $H_0: \theta = 0$ معادل با آزمون ریشه واحد است که دقیقاً مشابه آزمون دیکی- فولر می‌باشد.

اما روش عمومی آن است که در بخش قبلی معرفی شد. دیدیم که یک مدل فصلی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y_t = aY_{t-4} + u_t \Rightarrow (1-aL^4)Y_t = u_t \qquad (15\text{-}53)$$

و یا آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A(L)Y_t = u_t \quad , \quad A(L) = 1 - aL^4 \qquad (15\text{-}54)$$

در بخش قبلی دیدیم که می‌توان مدل فوق را به‌صورت زیر نوشت:

$$A(L) = (1-aL^4) = (1-a_1L)(1+a_2L)(1-a_3iL)(1+a_4iL) \qquad (15\text{-}55)$$

ریشه واحد بدان معنا است که $a=1$ باشد و این معادل با $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ است.

در بخش قبلی دیدیم که $a_1 = 1$ بیانگر ریشه واحد غیرفصلی، $a_2 = 1$ بیانگر ریشه واحد شش‌ماهه (نیم‌سالانه) و $a_3 = 1$ یا $a_4 = 1$ یا $a_3 = a_4 = 1$ بیانگر ریشه واحد فصلی است.

برای انجام آزمون هر یک از موارد فوق، ابتدا $A(L)$ را حول $a_1=a_2=a_3=a_4=1$ با تقریب خطی می‌نویسیم.[1] با محاسبهٔ تقریب خطی $A(L)$، مدل (۱۵-۵۳) را به‌صورت زیر می‌نویسیم[2]:

$$(1-L^4)Y_t-(a_1-1)(1+L+L^2+L^3)LY_t+(a_2-1)(1-L+L^2-L^3)LY_t$$
$$+(1-L^2)\{[(a_4-1)-(a_3-1)]i+[(a_4-1)+(\phi_3-1)]\ L\}LY_t=u_t \qquad (15-56)$$

۱- این نوع از بحث در اندرس، ترجمه صادقی و شوال‌پور (۱۳۸۶) ارائه شده است.

۲- چون $A(L)$ تابعی از چهار ضریب a_1، a_2، a_3 و a_4 است، لذا تقریب خطی آن به‌ازای $a_1=a_2=a_3=a_4=1$ عبارت است از:

$$A(L)\cong A(L)\Big|_{a_i=1}+\frac{\partial A(L)}{\partial a_1}\Big|_{a_i=1}(a_1-1)+\frac{\partial A(L)}{\partial a_2}\Big|_{a_i=1}(a_2-1)+\frac{\partial A(L)}{\partial a_3}\Big|_{a_i=1}(a_3-1)+\frac{\partial A(L)}{\partial a_4}\Big|_{a_i=1}(a_4-1)$$

با توجه به اینکه $A(L)=(1-aL^4)=(1-a_1L)(1+a_2L)(1-a_3iL)(1+a_4iL)$ است، هر یک از جملات رابطهٔ فوق عبارتند از:

$$A(L)\Big|_{a_i=1}=(1-L^4)$$
$$\frac{\partial A(L)}{\partial a_1}\Big|_{a_i=1}=-L(1+a_2L)(1-a_3iL)(1+a_4iL)\Big|_{a_i=1}=-L(1+L)(1-iL)(1+iL)$$
$$=-L(1+L)(1+L^2)=-L(1+L+L^2+L^3)$$
$$\frac{\partial A(L)}{\partial a_2}\Big|_{a_i=1}=L(1-a_1L)(1-a_3iL)(1+a_4iL)\Big|_{a_i=1}=L(1-L)(1-iL)(1+iL)$$
$$=L(1-L)(1+L^2)=L(1-L+L^2-L^3)$$
$$\frac{\partial A(L)}{\partial a_3}\Big|_{a_i=1}=-iL(1-a_1L)(1+a_2L)(1+a_4iL)\Big|_{a_i=1}=-iL(1-L)(1+L)(1+iL)$$
$$=-iL(1-L^2)(1+iL)=-(1-L^2)(i-L)L$$
$$\frac{\partial A(L)}{\partial a_4}\Big|_{a_i=1}=iL(1-a_1L)(1+a_2L)(1-a_3iL)\Big|_{a_i=1}=iL(1-L)(1+L)(1-iL)$$
$$=iL(1-L^2)(1-iL)=(1-L^2)(i+L)L$$

بنابراین، $A(L)$ برابر است با:

$$A(L)\cong(1-L^4)-L(1+L+L^2+L^3)(a_1-1)+L(1-L+L^2-L^3)(a_2-1)$$
$$-(1-L^2)(i-L)L(a_3-1)+(1-L^2)(i+L)L(a_4-1)$$
$$=(1-L^4)-(a_1-1)(1+L+L^2+L^3)L+(a_2-1)(1-L+L^2-L^3)L$$
$$+(1-L^2)\{[(a_4-1)-(a_3-1)]i+[(a_4-1)+(a_3-1)]L\}L$$

حال از $a_1-1=\pi_1$، $a_2-1=\pi_2$، $a_3-1=c_3$ و $a_4-1=c_4$ استفاده کرده و معادله فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$(1-L^4)Y_t=\pi_1(1+L+L^2+L^3)Y_{t-1}-\pi_2(1-L+L^2-L^3)Y_{t-1}$$
$$+(1-L^2)[(c_4-c_3)i-(c_4+c_3)L]Y_{t-1}+u_t \qquad (15-57)$$

حال برای ضرایب مدل فوق، روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(c_4-c_3)i=2k_1$$
$$c_4+c_3=2k_2$$

با حل معادلات فوق برای c_3 و c_4 خواهیم داشت:

$$c_3=k_2+ik_1$$
$$c_4=k_2-ik_1$$

با جایگذاری به‌جای ضرایب در (۱۵-۵۷) خواهیم داشت:

$$(1-L^4)Y_t=\pi_1(1+L+L^2+L^3)Y_{t-1}-\pi_2(1-L+L^2-L^3)Y_{t-1}$$
$$+(1-L^2)[2k_1-2k_2L]Y_{t-1}+u_t \qquad (15-58)$$

حال با استفاده از $2k_1=\pi_3$ و $2k_2=\pi_4$، معادله فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(1-L^4)Y_t=\pi_1(1+L+L^2+L^3)Y_{t-1}-\pi_2(1-L+L^2-L^3)Y_{t-1}$$
$$+\pi_3(1-L^2)Y_{t-1}-\pi_4(1-L^2)LY_{t-1}+u_t \qquad (15-59)$$

و یا

$$\Delta_4Y_t=A(L)Y_t=(1-L^4)Y_t$$
$$=\pi_1(1+L+L^2+L^3)Y_{t-1}-\pi_2(1-L+L^2-L^3)Y_{t-1}$$
$$+\pi_3(1-L^2)Y_{t-1}-\pi_4(L-L^3)Y_{t-1}+u_t \qquad (15-60)$$
$$=\pi_1(Y_{t-1}+Y_{t-2}+Y_{t-3}+Y_{t-4})-\pi_2(Y_{t-1}-Y_{t-2}+Y_{t-3}-Y_{t-4})$$
$$+\pi_3(Y_{t-1}-Y_{t-3})-\pi_4(Y_{t-2}-Y_{t-4})+u_t$$

حال متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم:

$$Z_{1t}=(1+L+L^2+L^3)Y_t=Y_t+Y_{t-1}+Y_{t-2}+Y_{t-3}$$
$$Z_{2t}=-(1-L+L^2-L^3)Y_t=-Y_t+Y_{t-1}-Y_{t-2}+Y_{t-3} \qquad (15-61)$$
$$Z_{3t}=(1-L^2)Y_t=Y_t-Y_{t-2}$$
$$Z_{4t}=-(L-L^3)Y_t=-Y_{t-1}+Y_{t-3}=-Z_{3t-1}$$

متغیرهای Z_{it} را می‌توان بر حسب ماتریس $\mathbf{R}$ نوشت که قبلاً معرفی گردید. در واقع $\mathbf{R}$، متغیرهای Y را به Z تبدیل می‌کند.

$$\mathbf{z}_{t-1}=\mathbf{R}'\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\Y_{t-2}\\Y_{t-3}\\Y_{t-4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\-1&1&-1&1\\1&0&-1&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{t-1}\\Y_{t-2}\\Y_{t-3}\\Y_{t-4}\end{bmatrix} \quad (15\text{-}62)$$

مدل فوق را می‌توان به‌صورت ماتریسی نوشت:

$$\Delta_4 Y_t=(1-L^4)Y_t=\pi_1 Z_{1t-1}-\pi_2 Z_{2t-1}+\pi_3 Z_{3t-1}-\pi_4 Z_{4t-1}+u_t \quad (15\text{-}63)$$

برای آزمون وجود ریشه واحد در داده‌های فصلی، ابتدا بایستی مدل (۶۳-۱۵) را برآورد کرده و سپس فرضیه ریشه واحد غیرفصلی ($\pi_1=0$)، ریشه واحد شش‌ماهه ($\pi_2=0$) و ریشه واحد فصلی ($\pi_3=\pi_4=0$) را آزمون نمود. بدین منظور بایستی مراحل زیر را انجام دهیم:

۱- ابتدا متغیرهای Z_{1t}، Z_{2t}، Z_{3t} و Z_{4t} را طبق فرمول‌های (۵۸-۱۵) حساب می‌کنیم.

۲- معادله (۶۳-۱۵) را برآورد می‌کنیم.

۳- فرضیه وجود ریشه واحد را در هر یک از حالت‌های زیر آزمون می‌کنیم.

الف) آزمون ریشه واحد غیرفصلی ($\pi_1=0$)

فرضیه $\pi_1=0$ معادل با فرضیه $a_1=1$ است. این فرضیه به معنی وجود ریشه واحد غیرفصلی است. با تخمین معادله (۶۳-۱۵) مقدار آمارهٔ t برای ضریب π_1 را با مقدار بحرانی آن مقایسه و نتیجه‌گیری می‌کنیم. اگر آمارهٔ t از مقدار بحرانی کوچکتر باشد، ریشه واحد غیرفصلی رد می‌شود. مقادیر بحرانی برای انجام این آزمون در جدول (۵-۱۵) ارائه شده است.

ب) آزمون ریشه واحد فصلی (شش‌ماهه) ($\pi_2=0$)

فرضیه $\pi_2=0$ معادل با فرضیه $a_2=1$ است. این فرضیه به معنی وجود ریشه واحد شش‌ماهه است. با تخمین معادله (۶۳-۱۵) مقدار آمارهٔ t برای ضریب π_2 را با مقدار بحرانی آن مقایسه و نتیجه‌گیری می‌کنیم. اگر آمارهٔ t از مقدار بحرانی کوچکتر باشد، ریشه واحد شش‌ماهه رد می‌شود. مقادیر بحرانی برای انجام این آزمون در جدول (۵-۱۵) ارائه شده است.

ج) آزمون ریشه فصلی (سه ماهه) ($\pi_3=\pi_4=0$)

فرضیه $\pi_3=\pi_4=0$ معادل با فرضیه $a_3=a_4=1$ است. این فرضیه به معنی وجود ریشه واحد فصلی است. برای آزمون فرضیه $\pi_3=\pi_4=0$ از آمارهٔ F استفاده می‌شود که مقادیر آن در جدول (۵-۱۵) ارائه شده است. دلیل استفاده از آمارهٔ F این است که $\pi_3=\pi_4=0$ بیانگر وجود دو محدودیت است که مشابه آزمون محدودیت‌ها و یا مقایسهٔ مدل‌های مقید و غیرمقید، می‌توان آن را آزمون نمود.

جدول ۵-۱۵: مقادیر بحرانی برای آزمون ریشه واحد فصلی در داده‌های سه ماهه

نوع مدل	n	$\pi_1=0$			$\pi_2=0$			$\pi_3=\pi_4=0$		
		٪۱	٪۵	٪۱۰	٪۱	٪۵	٪۱۰	٪۱	٪۵	٪۱۰
بدون عرض از مبدأ، روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	-۲/۷۲	-۱/۹۵		-۲/۶۷	-۱/۹۵		۵/۰۲	۳/۲۶	
	۱۰۰	-۲/۶۰	-۱/۹۷		-۲/۶۱	-۱/۹۲		۴/۸۹	۳/۱۲	
	۱۳۶	-۲/۶۲	-۱/۹۳		-۲/۶۰	-۱/۹۴		۴/۸۱	۳/۱۴	
	۲۰۰	-۲/۶۲	-۱/۹۴		-۲/۶۰	-۱/۹۵		۴/۸۱	۳/۱۶	
با عرض از مبدأ، بدون روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	-۳/۶۶	-۲/۹۶	-۲/۶۲	-۲/۶۸	-۱/۹۵	-۱/۶۰	۴/۷۸	۳/۰۴	۲/۳۲
	۱۰۰	-۳/۴۷	-۲/۸۸	-۲/۵۸	-۲/۶۱	-۱/۹۵	-۱/۶۰	۴/۷۷	۳/۰۸	۲/۳۵
	۱۳۶	-۳/۵۱	-۲/۸۹	-۲/۵۸	-۲/۶۰	-۱/۹۱	-۱/۵۸	۴/۷۳	۳/۰۰	۲/۳۶
	۲۰۰	-۳/۴۵	-۲/۸۷	-۲/۵۷	-۲/۵۸	-۱/۹۲	-۱/۵۹	۴/۷۶	۳/۱۲	۲/۳۷
با عرض از مبدأ و متغیرهای مجازی فصلی، بدون روند	۴۸	-۳/۷۷	-۳/۰۸	-۲/۷۲	-۳/۷۵	-۳/۰۴	-۲/۶۹	۹/۲۲	۶/۶۰	۵/۵۰
	۱۰۰	-۳/۵۵	-۲/۹۵	-۲/۶۳	-۳/۶۰	-۲/۹۴	-۲/۶۳	۸/۷۴	۶/۵۷	۵/۵۶
	۱۳۶	-۳/۵۶	-۲/۹۴	-۲/۶۲	-۳/۴۹	-۲/۹۰	-۲/۵۹	۸/۹۲	۶/۶۳	۵/۵۶
	۲۰۰	-۳/۵۱	-۲/۹۱	-۲/۵۹	-۳/۵۰	-۲/۸۹	-۲/۶۰	۸/۹۳	۶/۶۱	۵/۵۶
با عرض از مبدأ و روند، بدون متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	-۴/۲۳	-۳/۵۶	-۳/۲۱	-۲/۶۵	-۱/۹۱	-۱/۵۷	۴/۶۴	۲/۹۵	۲/۳۲
	۱۰۰	-۴/۰۷	-۳/۴۷	-۳/۱۶	-۲/۵۸	-۱/۹۴	-۱/۶۰	۴/۷۰	۲/۹۸	۲/۳۵
	۱۳۶	-۴/۰۹	-۳/۴۶	-۳/۱۶	-۲/۵۹	-۱/۹۶	-۱/۶۳	۴/۵۷	۳/۰۴	۲/۳۶
	۲۰۰	-۴/۰۵	-۳/۴۴	-۳/۱۵	-۲/۵۹	-۱/۹۵	-۱/۶۲	۴/۶۶	۳/۰۷	۲/۳۷
با عرض از مبدأ، متغیرهای مجازی فصلی و روند	۴۸	-۴/۴۶	-۳/۷۱	-۳/۳۷	-۳/۸۰	-۳/۰۸	-۲/۷۳	۹/۲۷	۶/۵۵	۵/۳۷
	۱۰۰	-۴/۰۹	-۳/۶۳	-۳/۲۲	-۳/۶۰	-۲/۹۴	-۲/۶۳	۸/۷۹	۶/۶۰	۵/۵۲
	۱۳۶	-۴/۱۵	-۳/۵۲	-۳/۲۱	-۳/۵۷	-۲/۹۳	-۲/۶۱	۸/۷۷	۶/۶۲	۵/۵۵
	۲۰۰	-۴/۰۵	-۳/۴۹	-۳/۱۸	-۳/۵۲	-۲/۹۱	-۲/۶۰	۸/۹۶	۶/۵۷	۵/۵۶

جدول ۵-۱۵: ادامه

نوع مدل	n	$\pi_3=0$		$\pi_4=0$		$\pi_3=\pi_4=0$		
		٪۱	٪۵	٪۱	٪۵	٪۹۹	٪۵	٪۱۰
بدون عرض از مبدأ، روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	-۲/۶۶	-۱/۹۳	-۲/۵۱	-۲/۱۱	۵/۰۲	۳/۲۶	
	۱۰۰	-۲/۵۵	-۱/۹۰	-۲/۴۳	-۲/۰۱	۴/۸۹	۳/۱۲	
	۱۳۶	-۲/۵۸	-۱/۹۲	-۲/۴۴	-۱/۹۹	۴/۸۱	۳/۱۴	
	۲۰۰	-۲/۵۸	-۱/۹۲	-۲/۴۳	-۱/۹۸	۴/۸۱	۳/۱۶	
با عرض از مبدأ، بدون روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	-۲/۶۴	-۱/۹۰	-۲/۴۴	-۲/۰۶	۴/۷۸	۳/۰۴	۲/۳۲
	۱۰۰	-۲/۶۱	-۱/۹۰	-۲/۳۸	-۱/۹۹	۴/۷۷	۳/۰۸	۲/۳۵
	۱۳۶	-۲/۵۳	-۱/۸۸	-۲/۳۶	-۱/۹۸	۴/۷۳	۳/۰۰	۲/۳۶
	۲۰۰	-۲/۵۷	-۱/۹۰	-۲/۳۶	-۱/۹۸	۴/۷۶	۳/۱۲	۲/۳۷
با عرض از مبدأ و متغیرهای مجازی فصلی، بدون روند	۴۸	-۴/۳۱	-۳/۶۱	-۲/۸۶	-۲/۳۷	۹/۲۲	۶/۶۰	۵/۵۰
	۱۰۰	-۴/۰۶	-۳/۴۴	-۲/۷۸	-۲/۳۲	۸/۷۴	۶/۵۷	۵/۵۶
	۱۳۶	-۴/۰۶	-۳/۴۴	-۲/۷۲	-۲/۳۱	۸/۹۲	۶/۶۳	۵/۵۶
	۲۰۰	-۴/۰۰	-۳/۳۸	-۲/۷۴	-۲/۳۳	۸/۹۳	۶/۶۱	۵/۵۶
با عرض از مبدأ و روند، بدون متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	-۲/۶۸	-۱/۹۲	-۲/۴۱	-۲/۰۵	۴/۶۴	۲/۹۵	۲/۳۲
	۱۰۰	-۲/۵۶	-۱/۸۹	-۲/۳۸	-۱/۹۷	۴/۷۰	۲/۹۸	۲/۳۵
	۱۳۶	-۲/۵۶	-۱/۹۰	-۲/۳۶	-۱/۹۷	۴/۵۷	۳/۰۴	۲/۳۶
	۲۰۰	-۲/۵۸	-۱/۹۲	-۲/۳۵	-۱/۹۷	۴/۶۶	۳/۰۷	۲/۳۷
با عرض از مبدأ، متغیرهای مجازی فصلی و روند	۴۸	-۴/۴۶	-۳/۶۶	-۲/۷۵	-۲/۲۶	۹/۲۷	۶/۵۵	۵/۳۷
	۱۰۰	-۴/۱۲	-۳/۴۸	-۲/۷۶	-۲/۳۲	۸/۷۹	۶/۶۰	۵/۵۲
	۱۳۶	-۲/۰۵	-۳/۴۴	-۲/۷۱	-۲/۷۸	۸/۷۷	۶/۶۲	۵/۵۵
	۲۰۰	-۲/۰۴	-۳/۴۱	-۲/۶۵	-۲/۲۷	۸/۹۶	۶/۵۷	۵/۵۶

آزمون ریشه واحد فصلی در Eviews فایل data14

برای آزمون ریشه واحد فصلی مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا متغیرهای Z_{it} را با فرمان genr حساب می‌کنیم.

```
genr Z1=Y+Y(-1)+Y(-2)+Y(-3)
genr Z2=-Y+Y(-1)-Y(-2)+Y(-3)
genr Z3=Y-Y(-2)
genr Z4=-Y(-1)+Y(-3)
```

۲- معادله (۶۳-۱۵) را به‌صورت زیر برآورد می‌کنیم:

```
LS d4Y C Z1(-1) Z2(-1) Z3(-1) Z4(-1)
```

d4Y تفاضل فصلی Y است که با فرمان genr d4Y=Y-Y(-4) حساب می‌شود.

برای آزمون فرضیه $\pi_1=0$ و فرضیه $\pi_2=0$ مقدار آماره t را با مقادیر بحرانی مقایسه می‌کنیم. اما برای آزمون فرضیه $\pi_3=\pi_4=0$ بایستی از آزمون محدودیت‌ها استفاده کنیم.

فرض کنید نتایج تخمین به‌صورت زیر باشد:

```
Equation: UNTITLED   Workfile: DATA14::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: D4Y
Method: Least Squares
Date: 12/29/13   Time: 09:13
Sample (adjusted): 1361Q3 1380Q4
Included observations: 78 after adjustments

Variable        Coefficient    Std. Error    t-Statistic    Prob.

C               1.632766       0.256478      6.366094       0.0000
Z1(-1)          -0.010527      0.004350      -2.420184      0.0180
Z2(-1)          0.005972       0.013643      0.437758       0.6629
Z3(-1)          0.059400       0.043232      1.373997       0.1736
Z4(-1)          0.025868       0.043072      0.600588       0.5500

R-squared             0.104812    Mean dependent var       1.101524
Adjusted R-squared    0.055760    S.D. dependent var       1.025777
S.E. of regression    0.996768    Akaike info criterion    2.893359
Sum squared resid     72.52894    Schwarz criterion        3.044430
Log likelihood        -107.8410   Hannan-Quinn criter.     2.953835
F-statistic           2.136777    Durbin-Watson stat       2.139472
Prob(F-statistic)     0.084806
```

نتایج فوق نشان می‌دهد که:

۱- فرضیه $\pi_1=0$ (ضریب مربوط به Z_1) رد نمی‌شود زیرا آماره t در ناحیه بحرانی قرار ندارد (مقدار بحرانی در جدول ۵-۱۵ برابر با ۲/۸۸- است).

۲- فرضیه $\pi_2=0$ (ضریب مربوط به Z_2) رد نمی‌شود زیرا آماره t در ناحیه بحرانی قرار ندارد (مقدار بحرانی در جدول ۵-۱۵ برابر با ۱/۹۱- است).

۳- برای آزمون فرضیه $\pi_3=\pi_4=0$ بایستی این دو محدودیت را آزمون کنیم. بدین منظور در پنجره فوق از منوی View مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

View → coefficient diagnostics → wald test-coefficient restrictions

پنجره‌ای به شکل زیر باز می‌شود که بایستی محدودیت‌ها را در آن وارد کنیم:

```
Wald Test
Coefficient restrictions separated by commas
c(3)=0, C(4)=0

Examples
C(1)=0, C(3)=2*C(4)
OK    Cancel
```

با انتخاب OK نتایج آزمون به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: SESONAL10::Untitl...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats

Wald Test:
Equation: Untitled

Test Statistic	Value	df	Probability
F-statistic	1.674670	(2, 74)	0.1944
Chi-square	3.349339	2	0.1874

Null Hypothesis: C(3)=0, C(4)=0
Null Hypothesis Summary:

Normalized Restriction (= 0)	Value	Std. Err.
C(3)	0.096889	0.053048
C(4)	-0.003695	0.053038

Restrictions are linear in coefficients.

از مقایسه مقدار $F=1/67$ با عدد بحرانی ۳/۰ (این عدد بحرانی از جدول ۵-۱۵ به‌دست آمده است). نتیجه می‌شود که فرضیه $\pi_3=\pi_4=0$ رد نمی‌شود لذا ریشه واحد فصلی وجود دارد.

بنابراین، Y_t دارای یک ریشه واحد غیرفصلی، یک ریشه واحد شش‌ماهه و ریشه واحد فصلی می‌باشد.

مسائل

۱-۱۵ مقادیر Y در چهار فصل به‌ترتیب برابر با ۱، ۲-، ۲ و ۰ است. برای این متغیر، الگوهای زیر را برآورد کنید:

الف) متغیرهای مجازی فصلی.

ب) الگوی مثلثاتی

۲-۱۵ مقادیر Y در چهار فصل به‌ترتیب برابر با ۱، ۲-، ۱ و ۲- است. برای این متغیر، الگوهای زیر را برآورد کنید:

الف) متغیرهای مجازی.

ب) الگوی مثلثاتی.

۳-۱۵ تفاوت ریشه واحد فصلی با ریشه واحد غیر فصلی چیست؟

۴-۱۵ مقدار Y در هر یک از ماهای سال برابر با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ است. این مقادیر هر سال تکرار می‌شوند. یک مدل برای توصیف Y معرفی و برآورد نمایید.

۵-۱۵ ضرایب خودهمبستگی الگوی $Y_t=\mu+a_4Y_{t-1}+u_t$ را حساب کنید.

۶-۱۵ ضرایب خودهمبستگی الگوی $Y_t=\mu+u_t+b_4u_{t-1}$ را حساب کنید.

۷-۱۵ الگوی $SARIMA(1,1,1)(1,1,1)_4$ را بنویسید.

۸-۱۵ الگوی $SARIMA(1,1,1)(1,1,1)_4$ را بنویسید.

۹-۱۵ الگوی $SARIMA(1,1,0)(1,1,0)_{12}$ را بنویسید.

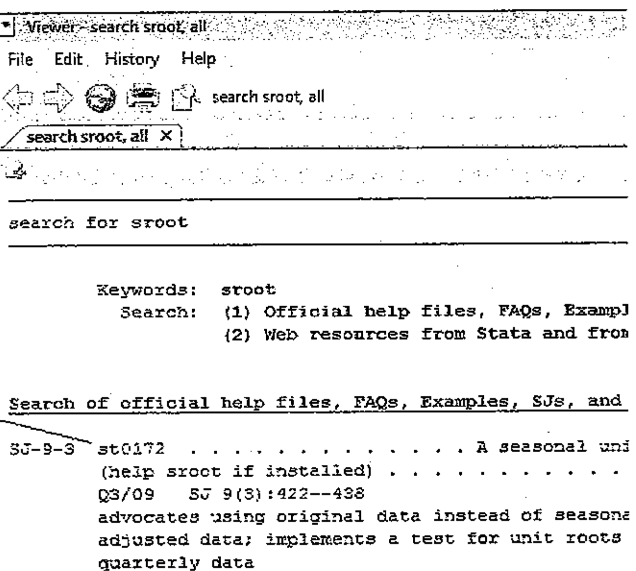
۱۰-۱۵ ضرایب خودهمبستگی را برای الگوی $SARIMA(0,0,1)(0,0,1)_4$ را حساب کنید.

۱۱-۱۵ ضرایب خودهمبستگی الگوی $Y_t=(1-\theta L-bL^{12})u_t$ را حساب کنید.

ضمیمه فصل پانزدهم: ریشه واحد فصلی در Stata

آزمون ریشه واحد فصلی در Stata فایل data14

برای انجام آزمون ریشه واحد فصلی ابتدا لازم است برنامه مذکور را نصب کنید. بدین منظور در سطر فرمان عبارت findit sroot را اجرا کنید. در این صورت صفحه زیر باز می‌شود:



با کلیک روی st0172 صفحه زیر باز می‌شود:

```
Viewer - net sj 9-3 st0172
File  Edit  History  Help
net sj 9-3 st0172                                   Command
net sj 9-3 st0172 ×

package st0172 from http://www.stata-journal.com/software/sj9-3

TITLE
      SJ9-3 st0172.  A seasonal unit root test with Stata

DESCRIPTION/AUTHOR(S)
      A seasonal unit root test with Stata
      by Domenico Depalo, Bank of Italy, Roma, Italy
      Support:  domenico.depalo@bancaditalia.it
      After installation, type help sroot

INSTALLATION FILES                               (click here to install)
      st0172/sroot.ado
      st0172/sroot.hlp
      st0172/hegy4.ado

ANCILLARY FILES                                  (click here to get)
      st0172/hegy.do
      st0172/baum.do

(click here to return to the previous screen)
```

کلیک کنید

با کلیک روی click here to install برنامهٔ sroot روی کامپیوتر شما نصب می‌شود و به دنبال آن صفحهٔ زیر باز می‌شود:

```
Viewer - net install st0172.pkg
File  Edit  History  Help
net install st0172.pkg
net install st0172.pkg ×

package installation

package name:  st0172.pkg
       from:  http://www.stata-journal.com/software/sj9-3/

checking st0172 consistency and verifying not already installed...
all files already exist and are up to date.

(click here to return to the previous screen)
```

کلیک کنید

سپس صفحهٔ help باز می‌شود که می‌توانید نحوه انجام آزمون ریشه واحد فصلی را بررسی کنید. فرمان عمومی برای آزمون ریشه واحد فصلی به‌صورت زیر است:

sroot y,lag(4) trend season(t) regress

y= متغیر مورد نظر،

Lag(4)= تعداد وقفه‌های متغیر وابسته که برابر با ٤ در نظر گرفته شده است،

Trend= متغیر روند،

Season(t)= متغیر فصلی،

Regress= برای نشان دادن نتایج تخمین رگرسیون.

فصل شانزدهم

مدل‌های تغییرپذیری

۱-۱۶ مقدمه

در فصل‌های قبلی در مورد برآورد معادله میانگین شرطی بحث کردیم که طبق آن، میانگین شرطی Y تابعی از متغیرهای توضیحی است. از طرف دیگر، فرض کردیم که واریانس شرطی Y (یا واریانس شرطی جمله اختلال) ثابت است. هر چند در فصل ششم راجع به واریانس ناهمسانی بحث شد، ولی مباحث صرفاً در خصوص آزمون ثابت بودن واریانس بود. در صورت ثابت نبودن واریانس، روش‌هایی برای رفع «واریانس ناهمسانی» ارائه شد تا تخمین‌های OLS از کارایی برخوردار شوند. در این فصل، واریانس شرطی Y به‌صورت دیگری معرفی می‌شود تا از این طریق امکان برآورد معادله واریانس شرطی فراهم شود.

۲-۱۶ واریانس ناهمسانی

در فصل ششم راجع به فرض واریانس همسانی و نقض آن بحث شد. همان‌طور که اشاره شد واریانس شرطی Y ممکن است دچار تغییر شود و متأثر از برخی متغیرهای مدل باشد. برای روشن شدن بحث، مثال زیر را درنظر بگیرید:

فرض کنید تابع احتمال شرطی Y به‌صورت زیر باشد:

$$f(Y|X)=\frac{1}{\alpha+\beta X}e^{-\frac{Y}{\alpha+\beta X}} \quad ; \quad Y>0$$

امید ریاضی شرطی و غیرشرطی Y

امید ریاضی شرطی Y عبارت است از:

$$E(Y|X)=\int_{0}^{\infty} Y\frac{1}{\alpha+\beta X}e^{-\frac{Y}{\alpha+\beta X}}dY=\alpha+\beta X$$

امید ریاضی غیرشرطی Y عبارت است از:

$$E(Y)=E(\alpha+\beta X)=\alpha+\beta E(X) \qquad (۱۶-۱)$$

از طرف دیگر برای Y معادله رگرسیون را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y=E(Y|X)+u=\alpha+\beta X+u \qquad (۱۶-۲)$$

واریانس شرطی و غیرشرطی Y

واریانس شرطی Y برابر است با:

$$\mathrm{var}(Y|X)=E[Y-E(Y|X)]^{2}=E(Y^{2}|X)-[E(Y|X)]^{2}$$

که در مثال فوق، واریانس شرطی Y برابر است با:[1]

$$\sigma^{2}=\mathrm{var}(Y|X)=\mathrm{var}(u|X)=(\alpha+\beta X)^{2}$$

واریانس غیرشرطی Y عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(Y)&=E[Y-E(Y)]^{2}\\&=E\{[Y-E(Y|X)]-[E(Y|X)-E(Y)]\}^{2}\\&=E[Y-E(Y|X)]^{2}+E[E(Y|X)-E(Y)]^{2}\\&=\mathrm{var}(Y|X)+\mathrm{var}[E(Y|X)]\end{aligned} \qquad (۱۶-۳)$$

بنابراین «واریانس غیرشرطی» برابر با «واریانس شرطی» به‌علاوهٔ «واریانس امید ریاضی شرطی» می‌باشد.

۱- برای محاسبه واریانس ابتدا $E(Y^{2}|X)$ را حساب می‌کنیم:

$$E(Y^{2}|X)=\int Y^{2}\frac{1}{\alpha+\beta X}e^{-\frac{Y}{\alpha+\beta X}}dY=2(\alpha+\beta X)^{2}$$

بنابراین، واریانس شرطی Y برابر است با:

$$\mathrm{var}(Y|X)=E(Y^{2}|X)-[E(Y|X)]^{2}=(\alpha+\beta X)^{2}$$

واریانس شرطی جملهٔ خطا عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(u|X)&=E[u-E(u|X)]^{2}\\&=E(u^{2}|X)=\sigma^{2} \quad , \quad E(u|X)=0\end{aligned}$$

واریانس غیرشرطی u نیز مشابه با (۳-۱۶) برابر است با:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(u)&=\mathrm{var}(u|X)+\mathrm{var}[E(u|X)]\\&=\mathrm{var}(u|X)+\mathrm{var}(0)=\sigma^{2}\end{aligned}$$

بنابراین واریانس شرطی u با واریانس غیرشرطی آن برابر است.

اگر واریانس جملهٔ خطا ثابت باشد، می‌توان ضرایب معادله رگرسیون $Y=\alpha+\beta X+u$ را با روش OLS و یا روش حداکثر درستنمایی[1]، برآورد نمود. به‌عنوان مثال برای استفاده از روش حداکثر درستنمایی می‌توان لگاریتم تابع درستنمایی را با فرض اینکه u و به‌دنبال آن Y، توزیع نرمال داشته باشند، به‌صورت زیر نوشت:

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln(\sigma^{2})-\frac{1}{2}\frac{\sum[Y_{t}-(\alpha+\beta X_{t})]^{2}}{\sigma^{2}}$$

با مشتق‌گیری از این تابع نسبت‌به α، β و σ^{2}، تخمین آنها به‌دست می‌آید.

اگر واریانس u ثابت نباشد آن را با σ_{t}^{2} نشان داده و تابع درستنمایی را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{t}\ln(\sigma_{t}^{2})-\frac{1}{2}\sum_{t}\frac{[Y_{t}-(\alpha+\beta X_{t})]^{2}}{\sigma_{t}^{2}}$$

چون σ_{t}^{2} ثابت نیست، لذا با مشتق‌گیری از معادله فوق، نمی‌توان تخمین پارامترها را به‌دست آورد. بدین منظور از روش‌های تکراری استفاده می‌شود. در روش‌های تکراری، معمولاً یک مقدار اولیه به ضرایب α، β و σ_{t}^{2} داده می‌شود و سپس با تکرارهای مختلف، آن مقدار از ضرایب که تابع درستنمایی را حداکثر می‌کند به‌دست می‌آید.

۱- به فصل نهم مراجعه شود.

برای تحلیل هر متغیری مانند Y_t، معمولاً از میانگین و واریانس استفاده می‌شود. در تحلیل رگرسیون نیز از این دو شاخص استفاده می‌شود، ولی به‌جای آنها، از میانگین شرطی و واریانس شرطی استفاده می‌شود. فرض ثابت بودن واریانس شرطی بدان معناست که میانگین شرطی و واریانس شرطی عبارتند از:

$$E(Y_t|X_t)=\alpha+\beta X_t$$
$$\operatorname{var}(Y_t|X_t)=\sigma^2$$

حال اگر واریانس شرطی ثابت نباشد، معادلات زیر را داریم:

$$E(Y_t|X_t)=\alpha+\beta X_t \qquad \text{میانگین شرطی } Y$$
$$\operatorname{var}(Y_t|X_t)=\sigma^2=f(Z_t) \qquad \text{واریانس شرطی } Y$$

Z_t مجموعه‌ای از متغیرها است که تعیین‌کنندهٔ σ_t^2 می‌باشند.

در رابطه با واریانس ناهمسانی، موضوع اصلی این است که ساختار σ_t^2 چگونه است و وابسته به چه عواملی است. در فصل ششم دیدم که σ_t^2 را می‌توان بر حسب یک یا چند متغیر توضیحی بیان نمود. علاوه بر این، تا اینجا دیدیم که $E(u|\mathbf{X})=0$ است و در صورت واریانس ناهمسانی، $\sigma_t^2=E(u_t^2|\mathbf{X})\neq\sigma^2$ می‌باشد. در اینجا امید ریاضی‌های شرطی را مشروط به معلوم بودن $\mathbf{X}$ کرده‌ایم. یعنی مجموعه اطلاعات ما برای محاسبه امید ریاضی شرطی و واریانس شرطی u شامل $\mathbf{X}$ است. حال می‌توان مجموعه اطلاعات را به‌صورت دیگری تعریف کرده و به‌عنوان مثال آنها را بر اساس مقادیر قبلی جملهٔ خطا، یعنی u_{t-1}، u_{t-2} و ... بیان نمود.

$$E(u_t|u_{t-1},u_{t-2},\dots)=0$$
$$E(u_t^2|u_{t-1}^2,u_{t-2}^2,\dots)\neq 0$$

اولی بیانگر امید ریاضی شرطی است و نشان می‌دهد که بین u_t و مقادیر قبلی آن همبستگی خطی وجود ندارد. دومی واریانس شرطی را نشان می‌دهد و بیانگر آن است که واریانس شرطی u_t وابسته به مقادیر قبلی آن است. همان‌طور که برای متغیر Y_t رابطه $Y_t=E(Y_t|X_t)+u_t$ را می‌نویسیم، برای u_t^2 نیز می‌توان معادله $u_t^2=E(u_t^2|u_{t-1}^2,u_{t-2}^2,\dots)+v_t$ را نوشت. در واقع این رابطه معادل با $u_t^2=\sigma_t^2+v_t$ است که σ_t^2 برابر با امیدریاضی u_t^2 می‌باشد.

۱۶-۳ تغییرپذیری و نااطمینانی

طی سال‌های اخیر در مورد مدل‌سازی و پیش‌بینی تغییرپذیری به‌ویژه در بازار سهام، نرخ ارز، تورم و ... مطالعات تجربی و زیادی انجام شده است. تغییرپذیری یکی از مباحث مهم در مطالعات اقتصادی و مالی است. تغییرپذیری را اغلب به‌صورت انحراف معیار یا واریانس تعریف می‌کنند که در هر مثال و موضوعی دارای مفهوم خاصی است. به‌عنوان مثال در رابطه با بازدهی سهام، انحراف معیار بیانگر ریسک می‌باشد.

ساده‌ترین برخورد با تغییرپذیری، استفاده از برآوردهای تاریخی است. تغییرپذیری تاریخی مستلزم محاسبه واریانس (یا انحراف معیار) متغیر مورد نظر در طول دوره مورد بررسی است که آن را به‌عنوان معیاری برای تغییرپذیری آینده به‌کار می‌برند. از طرف دیگر، واریانس تاریخی روش مفیدی برای مقایسه توانایی پیش‌بینی مدل‌ها می‌باشد.

همه مدل‌هایی که برای قیمت‌گذاری دارایی‌های مالی طرح می‌شوند، نیازمند برآورد و پیش‌بینی تغییرپذیری می‌باشند، زیرا هم پیش‌بینی بازدهی اهمیت دارد و هم نوسانات آتی بازدهی‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است.

سری زمانی Y را درنظر بگیرید که Y_t مقدار آن در زمان t می‌باشد. در رگرسیون مرسوم، یک معادله برای Y_t معرفی می‌کنیم که در ساده‌ترین حالت به‌صورت $Y_t=\alpha+\beta X_t+u_t$ است. آنچه در اینجا برآورد می‌شود، معادله میانگین شرطی Y_t، یعنی $E(Y_t|X_t)=\alpha+\beta X_t$ است که برآورد آن را $\hat{Y}_t=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_t$ نشان می‌دهیم. در این شرایط، فرض ضمنی این است که واریانس شرطی Y_t ثابت است.

در مباحث رگرسیون یک متغیره دیدیم که تغییرات Y_t شامل دو قسمت است: یکی تغییرات توضیح داده شده که توسط $\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_t$ تبیین می‌شود و دیگری تغییرات توضیح داده نشده که توسط $\hat{u}_t$ یا e_t توصیف می‌شود. یعنی در زمان t بخشی از Y_t توسط $\hat{\alpha}+\hat{\beta}X_t$ تبیین می‌شود که برای ما قابل پیش‌بینی است و هیچ نااطمینانی راجع به آن وجود ندارد و بخشی نیز مربوط به جمله خطا است که فرض می‌شود این قسمت از تغییرات Y_t در هر زمانی برابر با مقدار ثابت $\hat{\sigma}^2$ است.

بنابراین یک جزء نامطمئن داریم که آن را ثابت فرض کرده‌ایم. یعنی فرض کرده‌ایم که تغییرات غیرقابل پیش‌بینی Y_t که ناشی از عوامل تصادفی است، ثابت است.

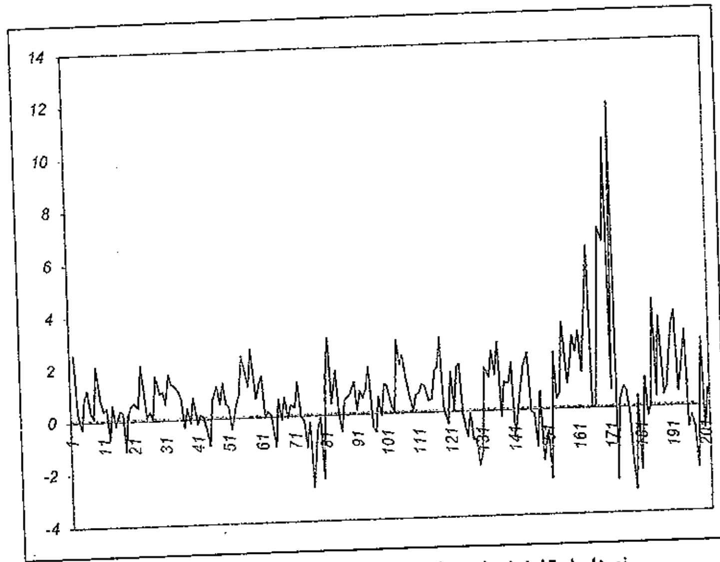
به‌هرحال در این مباحث، تغییرات غیرقابل پیش‌بینی را که ناشی از عوامل تصادفی است، معادل با نااطمینانی در Y_t درنظر می‌گیرند و همان‌طور که ملاحظه شد، معیار نااطمینانی، واریانس جمله خطا (σ^2) می‌باشد. حال موضوع دیگری که راجع‌به نااطمینانی یا تغییرات پیش‌بینی نشدهٔ Y_t مطرح است این است که σ^2 به‌عنوان معیار نااطمینانی لزوماً ثابت نیست. به‌عنوان مثال در مورد بازدهی سهام، همچنان که مقدار بازدهی به‌طور متوسط افزایش می‌یابد، ممکن است نااطمینانی نسبت به آن (مثلاً واریانس یا انحراف معیار آن که بیانگر ریسک است) نیز افزایش یابد. در چنین حالتی، σ^2 نمی‌تواند ثابت باشد که آن را با σ_t^2 نشان می‌دهیم. بدین ترتیب σ_t^2 بیانگر تغییرات Y_t است که ناشی از عوامل تصادفی می‌باشد و معیاری از تغییرپذیری یا نااطمینانی در خصوص Y_t است. بنابراین همان‌طور که برای میانگین شرطی Y_t یک معادله رگرسیون تعریف و برآورد می‌کنیم، لازم است برای واریانس شرطی نیز یک معادله تعریف و برآورد نماییم.

۱۶-۴ مدل ARCH

مدل ARCH، روشی برای بررسی ساختار واریانس u_t است که به صورت «واریانس شرطی خودرگرسیونی»[1]، تعریف می‌کنند. به‌خاطر داریم که در یک مدل رگرسیون، جملهٔ خطا دارای ویژگی $u_t \sim N(0,\sigma^2)$ می‌باشد. فرض ثابت بودن واریانس u_t تضمین می‌کند که برآوردکننده‌های OLS ناریب و کارا باشند.

اما یکی از ویژگی‌های مهم برخی از سری‌های زمانی اقتصادی و مالی این است که دارای تغییرپذیری خوشه‌ای هستند. یعنی تغییرات بزرگ منجر به تغییرات بزرگ، و تغییرات کوچک منجر به تغییرات کوچک می‌شود. به عبارت دیگر سطح جاری تغییرپذیری، رابطه مثبت با مقادیر گذشته آن دارد. این پدیده در نمودار (۱-۱۶) برای نرخ رشد هفتگی شاخص قیمت سهام در بورس تهران نشان داده شده است.

1- autoregressive conditional heteroskedasticity



نمودار ۱-۱۶: نرخ رشد هفتگی شاخص قیمت سهام در بورس تهران

مدل ARCH یکی از روش‌های مناسب برای مدل‌سازی تغییرپذیری است. برای توصیف مدل ARCH، بحث را با مفهوم واریانس شرطی u_t شروع می‌کنیم. تمایز بین واریانس شرطی و غیرشرطی دقیقاً مشابه با میانگین شرطی و غیرشرطی است که در فصل سوم بررسی شد. واریانس شرطی u_t که با σ_t^2 نشان داده می‌شود، عبارت است از:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}(u_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = E[(u_t - E(u_t))^2 \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots] \quad (16\text{-}4)$$

با فرض $E(u_t) = 0$، خواهیم داشت:

$$\sigma_t^2 = \mathrm{var}(u_t \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = E(u_t^2 \mid u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) \quad (16\text{-}5)$$

معادله (۵-۱۶) بیان می‌کند که واریانس شرطی u_t برابر با امید ریاضی شرطی u_t^2 است. لذا σ_t^2 برای زمان t به شرط معلوم بودن مقدار خطاهای گذشته، محاسبه می‌شود.

در مدل ARCH، «خودهمبستگی در تغییرپذیری»[1] توسط واریانس شرطی جمله خطا بیان می‌شود که در ساده‌ترین حالت، بستگی به مجذور خطای دوره قبل دارد:

1- autocorrelation in volatility

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 \qquad (۱۶-۶)$$

مدل (۶-۱۶) را ARCH(1) می‌گویند، زیرا واریانس شرطی فقط بستگی به خطای دوره قبل دارد. توجه شود که (۶-۱۶) فقط بخشی از کل مدل است، زیرا در باره میانگین شرطی Y که همان معادله اصلی است، چیزی بیان نمی‌کند. در مدل ARCH، معادله میانگین شرطی را به هر شکلی می‌توان تعریف نمود. به‌عنوان مثال، مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \quad ; \quad u_t \sim N(0, \sigma_t^2) \qquad (۱۶-۷)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 \qquad (۱۶-۸)$$

معادله (۷-۱۶) همان رگرسیون مرسوم است که میانگین شرطی را به‌صورت $E(Y_t | X_{2t}, X_{3t}, X_{4t}) = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t}$ تعریف می‌کند و معادله (۸-۱۶) نیز معادله‌ای برای توصیف واریانس شرطی Y (یا u) است که تا کنون آن را ثابت فرض می‌کردیم.

مدل (۸-۱۶) را می‌توان گسترش داد و در حالت کلی آن را به‌صورت ARCH(q) نشان داد:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \quad , \quad u_t \sim N(0, h_t) \qquad (۱۶-۹)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \alpha_2 u_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_q u_{t-q}^2 \qquad (۱۶-۱۰)$$

توجه شود که چون σ_t^2 واریانس شرطی است، مقدار آن در هر زمان نمی‌تواند منفی باشد و لذا لازم است تمام ضرایب معادله (۱۰-۱۶) غیرمنفی باشند.

۱٦-۵ آزمون ARCH

آزمون ARCH راجع به ثابت یا متغیر بودن واریانس جمله خطا است. در واقع قبل از هر چیزی بایستی راجع به وضعیت واریانس جمله خطا، چنین آزمونی صورت گیرد. برای بررسی ثابت بودن واریانس و یا به‌عبارت دیگر برای آزمون ARCH مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- معادله میانگین شرطی Y را که به‌صورت زیر داده شده است با روش OLS برآورد کرده و باقیمانده‌های آن را (یعنی $\hat{u}_t$) حساب می‌کنیم:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + \beta_3 X_{3t} + \beta_4 X_{4t} + u_t \qquad (۱۶-۱۱)$$

۲- خطاها را مجذور کرده و رگرسیون زیر را برآورد کرده و R^2 را حساب می‌کنیم:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t \qquad (۱۶-۱۲)$$

۳- به‌عنوان ملاک آزمون از ضریب لاگرانژ (LM) استفاده می‌کنیم که برابر با nR^2 است.[1] nR^2 توزیع χ_q^2 دارد. توجه شود که در اینجا دو مدل مقید و غیرمقید داریم که مدل مقید به‌صورت $\hat{u}_t^2 = \alpha + v_t$ و مدل غیرمقید به‌صورت (۱۲-۱۶) می‌باشد. قیدها نیز شامل $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$ هستند. برای آزمون این محدودیت‌ها می‌توان از F یا LM استفاده نمود.

۴- فرضیه زیر را آزمون می‌کنیم که معادل با عدم وجود ARCH (یعنی ثابت بودن واریانس) می‌باشد:

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, q \qquad (۱۶-۱۳)$$
$$H_1 : \alpha_i \neq 0$$

اگر $LM = nR^2$ و یا F بزرگتر از مقدار بحرانی باشد، آنگاه فرضیه H_0 رد می‌شود که بیانگر وجود ARCH می‌باشد.

آزمون ARCH در Eviews — فایل data4

برای انجام آزمون ARCH با استفاده از Eviews ابتدا معادله مورد نظر را برآورد می‌کنیم. در اینجا نرخ رشد هفتگی قیمت سهام (GSP) در بورس تهران را روی مقدار قبلی آن برازش می‌کنیم:

```
LS    GSP C GSP(-1)
```

در پنجره‌ای که نتایج تخمین را نشان می‌دهد، برای آزمون ARCH به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

View → Residual Diagnostics → Heteroskedasticity LM Test

در اینجا پنجره‌ای باز می‌شود که بایستی نوع آزمون و تعداد وقفه‌ها را وارد کنیم:

۱- فصل نهم بخش ۱۵-۹ را ببینید.

Heteroskedasticity Tests

Specification

Test type:

- Breusch-Pagan-Godfrey
- Harvey
- Glejser
- ARCH
- White
- Custom Test Wizard...

Dependent variable: RESID^2

The ARCH Test regresses the squared residuals on lagged squared residuals and a constant.

Number of lags: 3

OK Cancel

اگر تعداد وقفه‌ها را برابر با ۳ انتخاب کنیم، نتایج عبات است از:

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	18.06428	Prob. F(3,193)	0.0000
Obs*R-squared	43.18891	Prob. Chi-Square(3)	0.0000

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 02/02/11 Time: 06:46
Sample (adjusted): 6 202
Included observations: 197 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.303307	0.700462	1.860638	0.0643
RESID^2(-1)	0.205123	0.072022	2.848072	0.0049
RESID^2(-2)	0.358677	0.068809	5.212614	0.0000
RESID^2(-3)	0.002615	0.072034	0.036297	0.9711

R-squared	0.219233	Mean dependent var	2.991354
Adjusted R-squared	0.207097	S.D. dependent var	10.31276
S.E. of regression	9.183007	Akaike info criterion	7.292682
Sum squared resid	16275.23	Schwarz criterion	7.359346
Log likelihood	-714.3292	Hannan-Quinn criter.	7.319668
F-statistic	18.06428	Durbin-Watson stat	1.996791
Prob(F-statistic)	0.000000		

نتایج فوق نشان می‌دهد که مقدار F=۱۸/۰٦ و همچنین مقدار ۴۳/۱۹= $\chi^2 = nR^2$ بزرگ بوده و در ناحیه بحرانی قرار دارند. همچنین مقدار احتمال‌ها که در مقابل F و χ^2 ارائه شده است، کوچکتر از ۰/۰۵ هستند، لذا فرضیه وجود ARCH رد نمی‌شود. به عبارت دیگر واریانس متغیر مورد نظر نمی‌تواند ثابت باشد. نمودار ۱-۱٦ نیز نشان می‌دهد که تغییرات این متغیر در طول زمان افزایش یافته است.

۱٦-٦ محدودیت‌های مدل ARCH

مدل ARCH چارچوب مناسبی برای تحلیل تغییرپذیری در سری‌های زمانی ارائه می‌کند. اما این مدل دارای محدودیت‌ها و مشکلاتی است. یکی از مشکلات آن مربوط به تعیین q (یعنی تعداد وقفه‌های جملهٔ خطا) است. البته می‌توان از روش‌هایی مانند نسبت درستنمایی و معیارهای اطلاعات برای تعیین مرتبهٔ q استفاده نمود. از طرف دیگر ممکن است فرض غیرمنفی بودن نقض شود که در این صورت تخمین مدل ARCH را با مشکل مواجه می‌کند. برای حل این مشکلات از مدل دیگری استفاده می‌شود که موسوم به ARCH تعمیم‌یافته یا GARCH[1] می‌باشد.

۱٦-۷- مدل ARCH تعمیم‌یافته (GARCH)

مدل GARCH در سال ۱۹۸٦ ارائه گردید.[2] حالت سادهٔ این مدل عبارت است از:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \qquad (۱٦-۱۴)$$

در مدل فوق چون خطاها با یک وقفه و واریانس نیز با یک وقفه وارد شده‌اند، آن را با GARCH(۱,۱) نشان می‌دهند. بدیهی است که اگر (۱٦-۱۴) را با یک وقفه نوشته و به جای σ_{t-1}^2 جایگذاری کنیم، خواهیم داشت:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-2}^2) \qquad (۱٦-۱۵)$$
$$= \alpha_0(1+\beta) + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \alpha_1 u_{t-2}^2 + \beta^2 \sigma_{t-2}^2$$

اگر این جایگذاری‌ها را تکرار کنیم، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

1- generalized autoregressive conditional heteroskedastistiy
2- Taylor(1986) and Bollerslev(1986)

$$\sigma_t^2 = \alpha_0(1+\beta+\beta^2+\cdots)+\alpha_1(u_{t-1}^2+\beta u_{t-2}^2+\beta^2 u_{t-3}^2+\cdots)$$
$$=\alpha_0'+\alpha_1' u_{t-1}^2+\alpha_2' u_{t-2}^2+\alpha_3' u_{t-3}^2+\cdots \qquad (۱۶-۱۶)$$
$$\alpha_0'=\alpha_0\sum_{i=0}^{\infty}\beta^i \quad , \quad \alpha_i'=\alpha_i\beta^i$$

بنابراین، مدل فوق معادل با $ARCH(\infty)$ می‌باشد. در حالت کلی، $GARCH(q,p)$ عبارت است از:

$$\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1 u_{t-1}^2+\cdots+\alpha_q u_{t-q}^2+\beta_1\sigma_{t-1}^2+\cdots+\beta_p\sigma_{t-p}^2 \qquad (۱۶-۱۷)$$

بدین ترتیب در حالت کلی، واریانس شرطی u_t توسط معادله (۱۷-۱۶) توصیف می‌شود، ولی معمولاً GARCH(1,1) کفایت می‌کند. بدیهی است که واریانس شرطی u_t در طول زمان در حال تغییر است، ولی واریانس غیرشرطی ثابت می‌باشد. برای محاسبه واریانس غیرشرطی، بایستی امید ریاضی معادله (۱۴-۱۶) را حساب کنیم. در این صورت $E(\sigma_t^2)=E(\sigma_{t-1}^2)=E(u_{t-1}^2)=\sigma^2$ است و لذا بر اساس معادله (۱۴-۱۶) واریانس غیرشرطی برابر است با:

$$\mathrm{var}(u_t)=\sigma^2=\frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta)} \qquad (۱۶-۱۸)$$

عبارت فوق در صورتی قابل تعریف است که $\alpha_1+\beta<1$ باشد. اگر $\alpha_1+\beta>1$ باشد در این صورت واریانس غیرشرطی u قابل تعریف نمی‌باشد. اما اگر $\alpha_1+\beta=1$ باشد اصطلاحاً گفته می‌شود که ریشه واحد وجود دارد و آن را با IGARCH[1] نشان می‌دهند.

۸-۱۶ تخمین مدل‌های ARCH و GARCH

از آنجا که مدل‌های ARCH و GARCH خطی نیستند لذا نمی‌توان آنها را با روش‌های معمول مانند OLS برآورد نمود. توجه داریم که روش OLS به‌دنبال حداقل نمودن مجموع مربعات خطاها است. همچنین در روش OLS مجموع مربعات باقیمانده (RSS) فقط بستگی به پارامترهای معادله میانگین شرطی دارد و هیچ وابستگی به واریانس شرطی ندارد. لذا روش OLS را نمی‌توان برای تخمین مدل‌ها ARCH و GARCH به‌کار برد.

1- integrated GARCH

برای تخمین مدل‌های GARCH از روش حداکثر درستنمایی[1] استفاده می‌شود. برای توصیف این روش، مدل سادهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t=a+bY_{t-1}+u_t \ , \ u_t\sim N(0,\sigma_t^2) \qquad (۱۶-۱۹)$$
$$\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1 u_{t-1}^2+\beta\sigma_{t-1}^2$$

u_t توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس σ_t^2 دارد که تابع احتمال آن عبارت است از:

$$f(u_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t}e^{-\frac{u_t^2}{2\sigma_t^2}} \qquad (۱۶-۲۰)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_t}e^{-\frac{(Y_t-a-bY_{t-1})^2}{2\sigma_t^2}}$$

حال تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L=f(u_1)\times\cdots\times f(u_n)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n)}e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{(Y_t-a-bY_{t-1})^2}{\sigma_t^2}} \qquad (۱۶-۲۱)$$

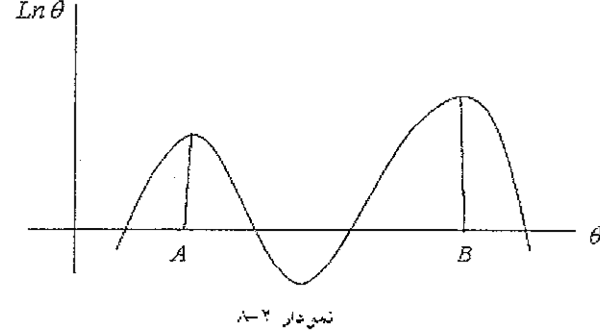
لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$LnL=-\frac{n}{2}Ln2\pi-\frac{n}{2}\sum_{t=1}^{n}Ln\,\sigma_t^2-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{(Y_t-a-bY_{t-1})^2}{\sigma_t^2} \qquad (۱۶-۲۲)$$

ضرایب مدل (۱۹-۱۶) یعنی a ، b، α_0، α_1 و β باید به‌گونه‌ای تعیین شوند که مقدار تابع (۲۱-۱۶) یا (۲۲-۱۶) حداکثر شود.

معمولاً نرم افزارهایی مانند Eviews چنین تخمین‌هایی را ارائه می‌کنند. اما باید توجه داشت که روش تخمین معادلات غیرخطی به‌صورت تکراری است و لذا مقدار اولیه‌ای که برای شروع تخمین پارامترها در نظر گرفته می‌شود، اهمیت خاصی دارد. به‌عنوان مثال اگر تابع درست نمایی فقط تابعی از پارامتر θ باشد، ممکن است نمودار آن به‌صورت (۲-۱۶) باشد.

۱- به فصل نهم مراجعه کنید.



نمودار ۲-۸

اگر مقدار اولیه را برابر صفر بگیریم، حداکثر تابع درستنمایی در $\theta = A$ می‌باشد، در حالی که حداکثر مطلق در $\theta = B$ به‌دست می‌آید. لذا برای اجتناب از این خطاها بهتر است مقدار اولیه را اندکی تغییر دهیم تا اگر جواب دیگری نیز وجود دارد به‌دست آید.

نکته دیگر آنکه، فرض بر این است که جمله خطا(u_t) توزیع نرمال دارد و بر اساس آن تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم. اما ممکن است این فرض برقرار نباشد. برای آزمون نرمال بودن، ابتدا باقیمانده‌ها را که از تخمین معادله (۱۹-۱۶) به‌دست می‌آید، استاندارد کرده و آن را با v_t نشان می‌دهیم:

$$v_t = \frac{u_t}{\sigma_t} \qquad (۱۶-۲۳)$$

σ_t نیز از مدل (۱۹-۱۶) به‌دست می‌آید:

$$\sigma_t = \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2} \qquad (۱۶-۲۴)$$

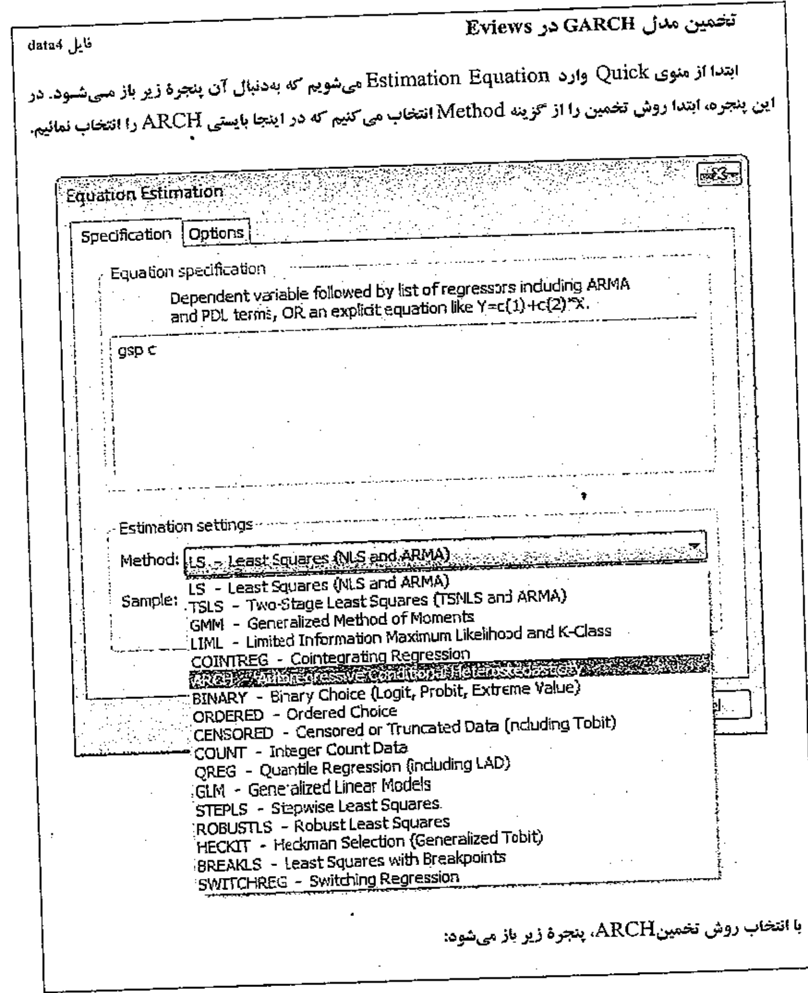
در واقع جملهٔ خطای مدل (۱۹-۱۶) بر انحراف معیار شرطی تقسیم شده است. بر اساس داده‌های نمونه می‌توان (۲۳-۱۶) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{v}_t = \frac{\hat{u}_t}{\hat{\sigma}_t} \qquad (۱۶-۲۵)$$

$\hat{v}_t$ باقیمانده‌های استانداردشده می‌باشد. بنابراین، فرض نرمال بودن را برای $\hat{v}_t$ بررسی می‌کنیم که آیا توزیع نرمال استاندارد دارد یا نه[1].

۱- فصل ششم را ببینید.

اگر v_t توزیع نرمال نداشته باشد، تخمین پارامترها سازگار است، ولی تخمین باقیمانده‌ها با خطا همراه است و لذا واریانس پارامترها نیز متفاوت خواهد بود. در این حالت از روش شبه حداکثر درستنمایی (QML)[1] استفاده می‌شود.



1- quasi maximum likelihood

Equation Estimation

Specification | Options

Mean equation
Dependent followed by regressors & ARMA terms OR explicit equation: gsp c
ARCH-M: None

Variance and distribution specification
Model: GARCH/TARCH
Order:
ARCH: 1   Threshold order: 0
GARCH: 1
Restrictions: None
Variance regressors:
Error distribution: Normal (Gaussian)

Estimation settings
Method: ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
Sample: 1 220

OK   Cancel

در این پنجره، معادله میانگین شرطی (معادله اصلی) را در قسمت Mean Equation وارد می‌کنیم. به‌عنوان مثال چون می‌خواهیم تغییرپذیری قیمت سهام را بررسی کنیم، لذا آن را به‌صورت GSP C وارد می‌کنیم. توجه شود که معادله میانگین شرطی را به هر طریقی می‌توان در نظر گرفت. در اینجا نرخ رشد قیمت سهام (GSP) را ثابت فرض کرده‌ایم. اما از طرف دیگر می‌خواهیم برای واریانس آن نیز یک معادله تعریف کنیم.

معادله واریانس شرطی را در قسمت Variance and distribution specification تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال اگر مدل ما به‌صورت GARCH(1,1) باشد، بدین منظور در گزینه Model نوع آن و در قسمت Order، تعداد وقفه‌های مربوط به باقیمانده‌ها را در مقابل گزینه ARCH و تعداد وقفه‌های واریانس شرطی را در مقابل گزینه GARCH وارد می‌کنیم. بدیهی است که برای GARCH (1,1) هر دو برابر با ۱ می‌باشند. توجه شود که چون ما یک مدل متقارن را برآورد می‌کنیم بایستی در مقابل گزینه Threshold order عدد صفر را وارد کنیم. در قسمت بعدی راجع به مدل‌های نامتقارن بحث خواهیم کرد. علاوه بر این اگر بخواهیم متغیرهای دیگری را نیز به معادله واریانس اضافه کنیم می‌توان آنها را در قسمت Variance regressors وارد نمود. همچنین گزینه‌های دیگری در این قسمت وجود دارد که در بخش‌های بعدی به آنها اشاره خواهیم کرد. در پایین این پنجره می‌توان دورهٔ مورد نظر را در قسمت Sample وارد نمود.

همچنین در سمت راست و بالای این پنجره، گزینه ARCH-M term وجود دارد که بیانگر این است که آیا می‌خواهیم انحراف معیار یا واریانس نیز وارد معادله میانگین شرطی بشود یا نه. به‌عنوان مثال وقتی معادله میانگین شرطی بیانگر بازدهی سهام باشد، معادله واریانس نیز ریسک آن را نشان می‌دهد. حال اگر بخواهیم تأثیر ریسک را روی بازدهی بررسی کنیم کافی است که در این گزینه، Std. Dev. را انتخاب کنیم تا انحراف معیار را به‌عنوان معیاری برای ریسک و به‌عنوان یک متغیر توضیحی وارد معادله بازدهی سهام نماید (جزئیات بیشتر این بحث در بخش ۱۰-۱۶ ارائه شده است.

بعد از تخمین مدل، نتایج آن در پنجره‌ای به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 02/02/11 Time: 07:10
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 8 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.710751	0.085234	8.338865	0.0000
		Variance Equation		
C	0.136876	0.073199	1.869911	0.0615
RESID(-1)^2	0.309992	0.094155	3.292367	0.0010
GARCH(-1)	0.654662	0.091741	7.135989	0.0000

R-squared	-0.003288	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	-0.003288	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.787746	Akaike info criterion	3.439546
Sum squared resid	639.2072	Schwarz criterion	3.505283
Log likelihood	-341.6744	Hannan-Quinn criter.	3.466146
Durbin-Watson stat	1.471374		

در قسمت بالای این جدول معادله میانگین شرطی داده شده است که فقط یک مقدار ثابت دارد که از نظر آماری، معنادار است. اما در قسمت پایین، معادله واریانس شرطی داده شده است که مقدار ثابت آن (α_0) برابر با ۰/۱۳۷ است. ضریب u_{t-1}^2 که در معادله (۲۰-۱۶) با α_1 نشان داده شده است برابر با ضریب RESIDE(-1)^2 یعنی ۰/۳۱ می‌باشد. همچنین ضریب واریانس تأخیری (β) معادل با ضریب GARCH(-1) یعنی ۰/۶۵۵ می‌باشد. همه ضرایب معادله واریانس معنی‌دار هستند. توجه شود که در اینجا R^2 نزدیک به صفر است زیرا معادله میانگین شرطی فاقد متغیر توضیحی است.

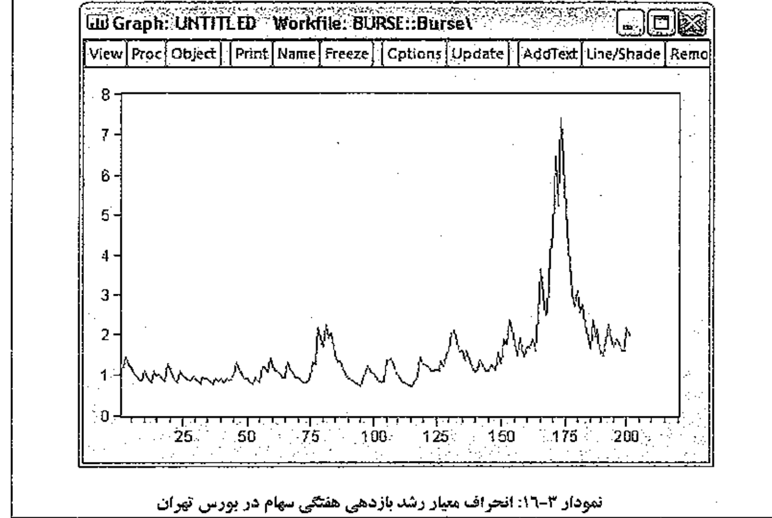
در پنجره‌ای که نتایج برآورد مدل نشان داده شده است، می‌توان واریانس شرطی را از طریق گزینه Proc با انتخاب Make GARCH Variance Series محاسبه نمود. با انتخاب این گزینه، پنجره زیر باز می‌شود که باید نام garch01 و یا نام دیگری را برای σ_t^2 وارد کنیم.

Make GARCH Variance

Conditional Variance: garch01
Permanent Component:
Enter name(s) for the series you want created

OK   Cancel

نتایج حاصله بیانگر برآورد σ_t^2 می‌باشد که می‌توان انحراف معیار (σ_t) را نیز محاسبه نمود. در مثال فوق انحراف معیار در نمودار ۳-۱۶ ترسیم شده است.



نمودار ۳-۱۶: انحراف معیار رشد بازدهی هفتگی سهام در بورس تهران

۹-۱۶ مدل GARCH نامتقارن

در مدل GARCH متقارن، تغییرپذیری‌ها (واریانس) برای شوک‌های مثبت و منفی یکسان است. به‌عنوان مثال اثر شوک‌های مثبت و منفی که به بازدهی سهام وارد می‌شود، به‌صورت متقارن در نظر گرفته می‌شود. یا اثر کاهش و افزایش قیمت نفت برای یک اقتصاد، متقارن است. یا اثر کاهش و افزایش نرخ رشد پول بر تورم یا بر رشد اقتصادی به‌صورت متقارن در نظر گرفته می‌شود. اما هیچ دلیلی ندارد که اثرات این شوک‌ها، متقارن باشند. بدین منظور مدل‌های GARCH به گونه‌ای توسعه داده شده‌اند تا بتوانند اثرات شوک‌های مثبت و منفی را به‌صورت نامتقارن نیز در نظر بگیرند. در اینجا دو نوع از این مدل‌ها را بررسی می‌کنیم که یکی مدل GJR[1] و دیگری مدل GARCH نمایی یا EGARCH[2] می‌باشد که توسط نلسون[3] (۱۹۹۱) ارائه شده است.

۱- این مدل به نام Glosten, Jagonnathan and Runkle (1993) می‌باشد.

2- exponential GARCH

3- Nelson

۱-۹-۱۶ مدل GJR

مدل GJR ساده‌ترین نوع از مدل‌های GARCH نامتقارن است. در این مدل، واریانس شرطی به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 I_{t-1}$$

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u_t < 0 \text{ باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱۶-۲۷)$$

در این مدل اگر γ معنی‌دار نباشد بدین معنی است که اثر شوک‌ها بر تغییرپذیری، کاملاً متقارن است. به‌عنوان مثال تغییرپذیری تورم برای حالتی که به آن شوک منفی یا شوک مثبت وارد شده است یکسان می‌باشد. اما اگر γ معنی‌دار باشد مدل نامتقارن است و اثر شوک‌های مثبت و منفی نمی‌تواند یکسان باشد. اگر γ معنی‌دار و مثبت باشد در این صورت اثر شوک‌های منفی (یعنی زمانی که باقیمانده‌ها منفی هستند) بیشتر از شوک‌های مثبت است. به‌طور کلی، اثر شوک‌های منفی برابر با $\alpha_1 + \gamma$ و اثر شوک‌های مثبت برابر α_1 می‌باشد. اگر γ منفی (مثبت) باشد، در این صورت اثر شوک‌های منفی کمتر (بیشتر) از اثر شوک‌های مثبت خواهد بود.

برآورد مدل GJR در Eviews

فایل data4

مدل GJR یک مدل نامتقارن است که برای برآورد آن با استفاده از Eviews می‌توان از گزینه TARCH استفاده نمود. توجه شود که اگر در مقابل گزینه TARCH عدد ۱ را وارد کنیم معادله (۲۷-۱۶) را برآورد می‌کند. نتایج برآورد TARCH برای نرخ رشد هفتگی قیمت سهام در بورس تهران در پنجرهٔ زیر نشان داده شده است.

معادله اول معادله میانگین شرطی است که در زیر آن معادله واریانس شرطی را داریم. در پایین جدول نیز معیارهایی مانند R^2 و غیره برای معادله میانگین شرطی داده شده است. در معادله واریانس شرطی C بیانگر مقدار ثابت یا عرض از مبدأ (α_0) است. ضریب RESID(-1)^2 بیانگر مقدار برآوردی α_1 و ضریب GARCH(-1) مقدار برآوردی β می‌باشد. ضریب RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) نیز مقدار γ را نشان می‌دهد که بیانگر نامتقارن بودن می‌باشد. از آنجا که این ضریب معنی‌دار نمی‌باشد، لذا مدل مذکور متقارن می‌باشد.

```
Equation: UNTITLED   Workfile: BURSE::Burse\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids
Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 02/02/11   Time: 13:44
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 15 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) +
    C(5)*GARCH(-1)
```

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.712228	0.086964	8.189869	0.0000
Variance Equation				
C	0.138073	0.074243	1.859744	0.0629
RESID(-1)^2	0.314078	0.101152	3.104992	0.0019
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.016542	0.108872	-0.151938	0.8792
GARCH(-1)	0.656441	0.090695	7.237908	0.0000

R-squared	-0.003193	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	-0.003193	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.787682	Akaike info criterion	3.449385
Sum squared resid	639.1470	Schwarz criterion	3.531557
Log likelihood	-341.6632	Hannan-Quinn criter.	3.482636
Durbin-Watson stat	1.471513		

۲-۹-۱٦ مدل TARCH[1]

مدل TARCH یا مدل TARCHآستانه به‌دنبال تبیین اثرات وقایعی است که در گذشته اتفاق افتاده است ولی اثر آنها در زمان فعلی ظاهر می‌شود و ممکن است نامتقارن باشند.[2] می‌توان این وقایع را همچنان که در بازارهای مالی مرسوم است تحت عنوان اخبار خوب یا بد به‌کار برد. در واقع این مدل حالت عمومی مدل GJR است. در حالت کلی، این مدل به‌صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k u_{t-k}^2 + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k u_{t-k}^2 I_{t-k}$$

$$I_{t-k} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } u_{t-k} < 0 \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر } u_{t-k} \geq 0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (۱۳-۲۸)$$

1- threshold ARCH

۲- این مدل توسط Zakoin(1995) و Glosten, Jaganathan and Runkle (1993) ارائه شده است.

در این مدل، $u_{t-k} < 0$ بیانگر وجود اخبار بد در زمان $t-k$ می‌باشد که در این صورت $I_{t-k} = 1$ است. بنابراین اخبار خوب و بد به‌ترتیب دارای ضرایب α_k و $\alpha_k + \gamma_k$ می‌باشند. اگر $\gamma_k > 0$ باشد، اخبار بد تغییرپذیری را افزایش می‌دهد. همچنین اگر γ_k معنی‌دار نباشد، مدل متقارن خواهد بود، یعنی اثر اخبار خوب و بد یا شوک‌های مثبت و منفی، یکسان است.

برآورد مدل TARCH در Eviews فایل data4

مدل TARCH یک مدل نامتقارن است که برای برآورد آن با استفاده از Eviews می‌توان از گزینه GARCH/TARCH استفاده نمود. مقدار r که بیانگر تعداد وقفه‌های مربوط به وقایع یا اخبار گذشته است که بر تغییرپذیری در زمان فعلی اثر می‌گذارند. مقدار r را در مقابل گزینه Threshold order وارد می‌کنیم، که اگر آن را برابر با ۱ قرار دهیم مانند مدل GJR می‌شود و اگر آن را برابر با صفر قرار دهیم بدین معنی است که مدل، متقارن است. در اینجا مقدار r را برابر با ۲ قرار داده و آن را برای نرخ رشد هفتگی قیمت سهام در بورس تهران برآورد می‌کنیم. نتایج حاصله در جدول زیر نشان داده شده است.

```
Equation: UNTITLED   Workfile: BURSE::Burse\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids
Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 02/02/11   Time: 13:57
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 27 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2 + C(4)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) +
    C(5)*RESID(-2)^2*(RESID(-2)<0) + C(6)*GARCH(-1)
```

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.675463	0.087133	7.752115	0.0000
Variance Equation				
C	0.162261	0.078851	2.057809	0.0396
RESID(-1)^2	0.343557	0.110082	3.120907	0.0018
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	-0.318405	0.191418	-1.663401	0.0962
RESID(-2)^2*(RESID(-2)<0)	0.295832	0.177685	1.664919	0.0959
GARCH(-1)	0.620660	0.087827	7.066860	0.0000

R-squared	-0.005954	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	-0.005954	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.790120	Akaike info criterion	3.450044
Sum squared resid	640.9057	Schwarz criterion	3.548651
Log likelihood	-340.7295	Hannan-Quinn criter.	3.489945
Durbin-Watson stat	1.467475		

معادله اول بیانگر معادله میانگین شرطی است که در زیر آن، معادله واریانس شرطی داده شده است. در پایین جدول نیز معیارهایی مانند R^2 و غیره برای معادله میانگین شرطی داده شده است. در معادله واریانس شرطی C بیانگر مقدار ثابت یا عرض از مبدأ (α_0) است. ضریب RESID(-1)^2 بیانگر α_1 و ضریب GARCH(-1) نیز β را نشان می‌دهد. همچنین ضریب RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) مقدار γ_1 و RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) مقدار γ_2 را نشان می‌دهد که بیانگر عدم‌قرینگی می‌باشند. از آنجا که این ضرایب در سطح ۱۰ درصد معنی‌دار هستند، لذا مدل مذکور، نامتقارن می‌باشد.

۳-۹-۱۶ مدل EGARCH[1]

مدل EGARCH یا GARCHنمایی توسط نلسون (۱۹۹۱) پیشنهاد گردید. این مدل روش دیگری برای فرمول‌بندی واریانس شرطی است که عبارت است از:

$$\ln\sigma_t^2 = \omega + \beta\ln\sigma_{t-1}^2 + \gamma\frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \alpha\left[\frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right] \quad (۱۶-۲۹)$$

و یا می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\ln\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\frac{|u_{t-1}|}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} + \beta\ln\sigma_{t-1}^2 + \gamma\frac{u_{t-1}}{\sqrt{\sigma_{t-1}^2}} \quad , \quad \alpha_0 = \omega - \alpha\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,,\ \alpha_1 = \alpha$$

این مدل دارای چند مزیت است. اولاً در این مدل، متغیر وابسته یعنی σ_t^2 به‌صورت لگاریتمی است و لذا ضرایب متغیرهای سمت راست می‌توانند مثبت یا منفی باشد که در هر حالت σ_t^2 مثبت خواهد بود. بدین‌ترتیب نیازی به اعمال محدودیت غیرمنفی بر روی ضرایب نیست. ثانیاً در این مدل اثر شوک‌های نامتقارن نیز در نظر گرفته می‌شود. زیرا γ ضریب u_{t-1} است که u_{t-1} می‌تواند مثبت یا منفی باشد. به‌عنوان مثال اگر σ_t^2 بیانگر تغییرپذیری بازدهی سهام باشد، γ اثر شوک‌های منفی و مثبت را بیان می‌کند، در حالی که α ضریبی است که فقط قدرمطلق $|u_{t-1}|$ را در نظر می‌گیرد. در اینجا نیز اگر $\gamma = 0$ باشد، متقارن و در غیر این صورت، نامتقارن می‌باشد. اثر شوک‌های مثبت برابر با $\alpha+\gamma$ و اثر شوک‌های منفی برابر با $\alpha-\gamma$ است. اگر γ منفی باشد نشان

1- exponential GARCH

می‌دهد که اثر شوک‌های منفی بیشتر از اثر شوک‌های مثبت است. بنابراین، اثر شوک‌های مثبت و منفی فقط در صورتی یکسان است که $\gamma = 0$ باشد.

برآورد مدل EGARCH در Eviews

فایل data4

در نرم افزار Eviews برای تخمین مدل EGARCH، از پنجره Equation Estimation روش تخمین ARCH را انتخاب می‌کنیم که پنجرهٔ زیر باز می‌شود:

Equation Estimation
Specification | Options
Mean equation
Dependent followed by regressors & ARMA terms OR explicit equation:
gsp c
ARCH-M: None
Variance and distribution specification
Model: EGARCH
Variance regressors:
Order:
ARCH: 1 Asymmetric order: 1
GARCH: 1
Error distribution: Normal (Gaussian)
Restrictions: None
Estimation settings
Method: ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
Sample: 1 220
OK Cancel

در قسمت Model، گزینه EGARCH را انتخاب می‌کنیم. در اینجا نیز باید در مقابل گزینه Asymmetric order تعداد وقفه‌ها را بنویسیم. این وقفه‌ها بیانگر این است که واریانس فعلی با چند وقفه به شوک‌های مثبت و منفی، واکنش متفاوتی را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال اخبار بدی که به بازار می‌رسد اثرات نامتقارن آن با چند وقفه ظاهر می‌شود. اگر تعداد وقفه‌ها را برابر با ۲ قرار دهیم، نتایج مدل EGARCH برای نرخ رشد هفتگی قیمت سهام در بورس تهران (GSP) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید که بر اساس آن می‌توان نامتقارن بودن را نیز بررسی کرد:

Equation: UNTITLED   Workfile: BURSE::Burse\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 02/02/11   Time: 14:02
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 24 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
LOG(GARCH) = C(2) + C(3)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(4)
    *RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(5)*RESID(-2)/@SQRT(GARCH(
    -2)) + C(6)*LOG(GARCH(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.746298	0.080615	9.257592	0.0000
Variance Equation				
C(2)	-0.328754	0.092731	-3.545241	0.0004
C(3)	0.467134	0.120068	3.890580	0.0001
C(4)	-0.004178	0.125406	-0.033318	0.9734
C(5)	0.025744	0.125286	0.205479	0.8372
C(6)	0.949203	0.035287	26.89927	0.0000

R-squared	-0.001397	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	-0.001397	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.786060	Akaike info criterion	3.460644
Sum squared resid	638.0024	Schwarz criterion	3.559250
Log likelihood	-341.7947	Hannan-Quinn criter.	3.500544
Durbin-Watson stat	1.474153		

$C(2)$ بیانگر مقدار ثابت (یعنی α_0 در معادله ۲۹-۱۶) است. $C(3)$، $C(4)$ و $C(5)$ به ترتیب α_1، γ و β را در معادله (۲۹-۱۶) نشان می‌دهند. از آنجا که آماره t برای γ برابر با ۰/۳۸۷ است لذا این ضریب، معنادار نمی‌باشد و بیانگر آن است که شوک‌های وارده به نرخ رشد قیمت سهام در بورس تهران، متقارن می‌باشند.

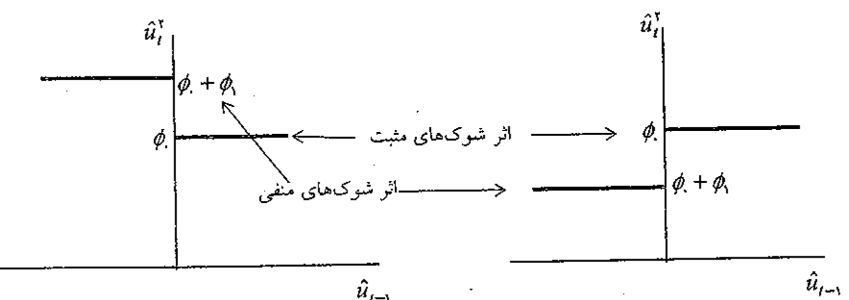
۴-۹-۱۶ آزمون عدم‌تقارن

انگل و ان‌جی[1] (۱۹۹۳) آزمون‌هایی را برای بررسی نامتقارن بودن تغییرپذیری‌ها ارائه نمودند. این آزمون‌ها مبتنی بر اریب علامت و اریب اندازه هستند. برای بررسی اریب علامت، مدل زیر را در نظر بگیرید:

1- Engel and Ng (1993)

$$\hat{u}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 D_{t-1}^- + v_t \qquad (۱۶-۳۰)$$

D_{t-1}^- متغیر مجازی است که مقدار آن برای حالتی که $\hat{u}_{t-1}$ منفی باشد برابر با ۱ و در غیر این صورت برابر با صفر است. اگر ϕ_1 معنی‌دار نباشد (یعنی برابر با صفر باشد) در این صورت اثر شوک‌های مثبت و منفی به‌طور متوسط برابر با ϕ_0 خواهد بود و در واقع قرینه هستند. اگر ϕ_1 معنی‌دار باشد نشان می‌دهد که شوک‌های منفی دارای اثر متفاوتی با شوک‌های مثبت هستند. در معادله (۳۰-۱۶) اثر شوک‌های مثبت به‌طور متوسط برابر با ϕ_0 و اثر شوک‌های منفی به‌طور متوسط برابر با $\phi_0 + \phi_1$ است. با فرض مثبت بودن ϕ_1، نمودار (۴-۱۶ الف) و با فرض منفی بودن ϕ_1، نمودار (۴-۱۶ ب) به‌دست می‌آید.

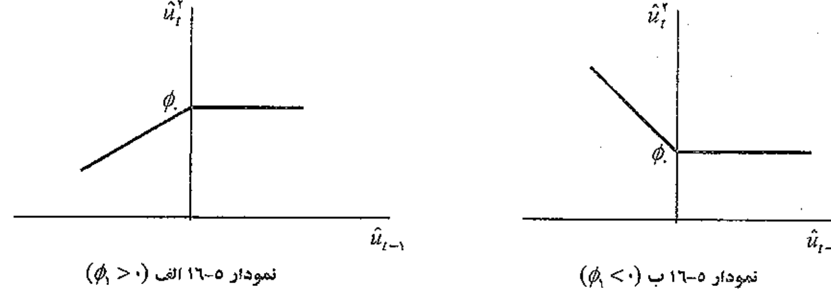


نمودار ۴-۱۶ الف $(\phi_1 > 0)$ — نمودار ۴-۱۶ ب $(\phi_1 < 0)$

برای بررسی اثر اندازه یا مقدار شوک‌ها بر تغییرپذیری می‌توان مدل زیر را درنظر گرفت

$$\hat{u}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 D_{t-1}^- \hat{u}_{t-1} + v_t \qquad (۱۶-۳۰')$$

در اینجا علاوه بر علامت، مقدار $\hat{u}_{t-1}$ نیز در نظر گرفته شده است. برای شوک‌های مثبت، $D^- = 0$ است و اثر آن برابر با ϕ_0 است. برای شوک‌های منفی، $D^- = 1$ بوده و $\hat{u}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 \hat{u}_{t-1}$ را داریم که اثر شوک منفی برابر با $\phi_0 + \phi_1 \hat{u}_{t-1}$ می‌باشد. نمودار (۵-۱۶ الف) برای حالتی است که ϕ_1 مثبت و نمودار (۵-۱۶ ب) برای حالتی است که ϕ_1 منفی باشد.



نمودار ۵-۱۶ الف $(\phi_1 > 0)$ نمودار ۵-۱۶ ب $(\phi_1 < 0)$

در حالت کلی می‌توان مدل زیر را در نظر گرفت[1]:

$$\hat{u}_t^2 = \phi_0 + \phi_1 D_{t-1}^- + \phi_2 D_{t-1}^- \hat{u}_{t-1} + \phi_3 (1 - D_{t-1}^-)\hat{u}_{t-1} + v_t \qquad (16\text{-}31)$$

معنی‌دار بودن ϕ_1 نشان دهنده وجود اریب علامت است و بیان می‌کند که شوک‌های مثبت و منفی دارای اثرات متفاوتی بر تغییرپذیری هستند. از طرف دیگر معنی‌دار بودن ϕ_2 و ϕ_3 بیانگر وجود اریب اندازه هستند و نشان می‌دهند که نه فقط علامت، بلکه مقدار شوک‌ها نیز مهم هستند.
اگر $D^- = 0$ اثر شوک‌های مثبت توسط معادله زیر داده می‌شود:

$$\hat{u}_t^2 = \phi_0 + \phi_3 \hat{u}_{t-1} + v_t \qquad (16\text{-}32)$$

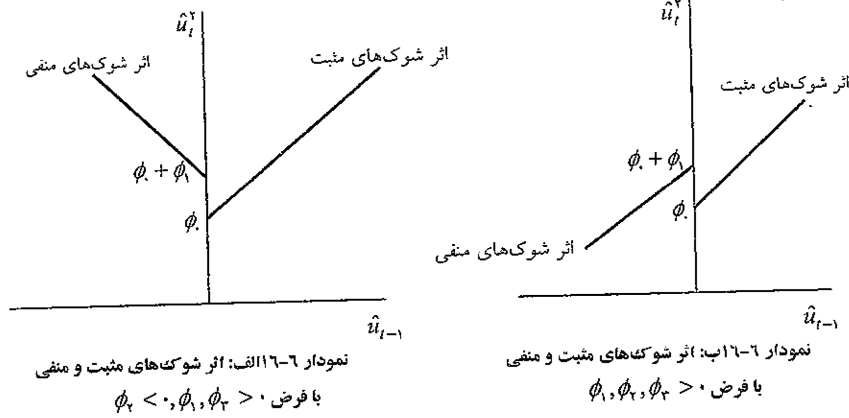
اگر $D^- = 1$ باشد، اثر شوک‌های منفی به‌صورت زیر است:

$$\hat{u}_t^2 = (\phi_0 + \phi_1) + \phi_2 \hat{u}_{t-1} + v_t \qquad (16\text{-}33)$$

حال با این فرض که اثر شوک‌های مثبت و منفی، متفاوت باشد (یعنی ϕ_1، ϕ_2 و ϕ_3 معنی‌دار باشند) حالت‌های مختلفی به‌وجود می‌آید که یکی از آنها در نمودار (۶-۱۶) ترسیم شده است.
اما می‌توان این فرضیه را نیز مطرح نمود که آیا به‌طورکلی نامتقارن بودن وجود دارد یا نه. برای آزمون این فرضیه بر اساس معادله (۳۱-۱۶) مقدار nR^2 را محاسبه نمود که دارای توزیع χ^2 با درجه آزادی ۳ می‌باشد. بنابراین در اینجا فرضیه H_0 بیانگر این است که نامتقارن بودن وجود ندارد و H_1 بیانگر این است که نامتقارن بودن وجود دارد. اگر مقدار nR^2 یا χ_3^2 بزرگ‌تر از مقدار

۱- توجه شود که در اینجا مشکل دام متغیرهای مجازی وجود ندارد، زیرا $\hat{u}_{t-1}$ به‌صورت جداگانه وارد نشده است (فصل هفتم را ببینید).

بحرانی (که برابر با ۷/۸۱ است) باشد، در این صورت فرضیه H_0 رد می‌شود و بدین معنی است که مدل مورد نظر نامتقارن می‌باشد.



نمودار ۶-۱۶ب: اثر شوک‌های مثبت و منفی با فرض $\phi_1, \phi_2, \phi_3 > 0$

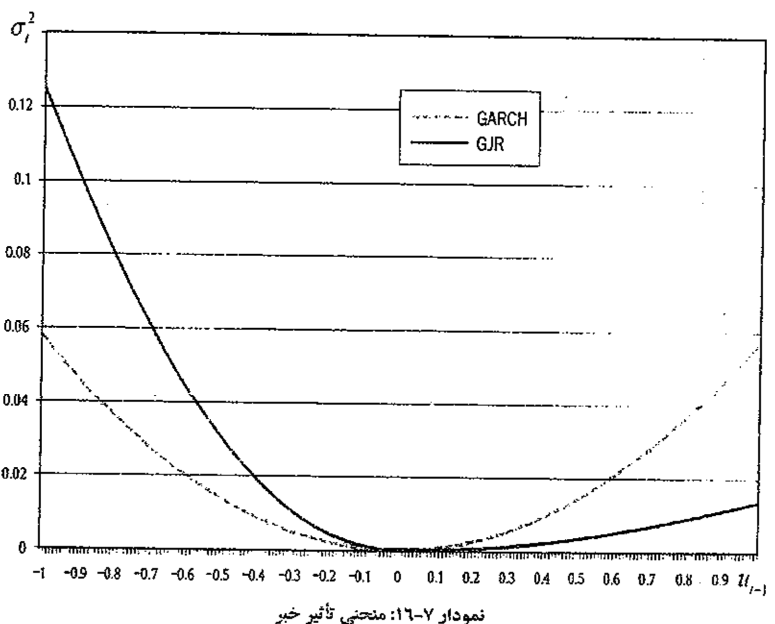
نمودار ۶-۱۶الف: اثر شوک‌های مثبت و منفی با فرض $\phi_2 < 0, \phi_1, \phi_3 > 0$

توجه شود که در این حالت، فرضیه $H_0 : \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$ را آزمون می‌کنیم. یعنی مدل (۳۱-۱۶) را در مقابل مدل $\hat{u}_t^2 = \phi_0 + v_t$ آزمون می‌کنیم. اگر R^2 و به تبع آن nR^2 بزرگ باشد، فرضیه H_0 رد می‌شود و نشان می‌دهد که لااقل یکی از ضرایب ϕ_1، ϕ_2 و ϕ_3 معنادار است. این وضعیت نشان‌دهنده عدم تقارن است. به‌عبارت دیگر بزرگ بودن nR^2 بدان معنا است که «مدل غیرمقید (۳۱-۱۶)» در مقابل «مدل مقید $\hat{u}_t^2 = \phi_0 + v_t$» معنادار است. در فصل پنجم دیدیم، هر مدل مقیدی را می‌توان در مقابل یک مدل غیرمقید با استفاده از آماره F نیز آزمون نمود.

۵-۹-۱۶ منحنی تأثیر خبر

منحنی تأثیر خبر توسط پاگان و شورت[1] (۱۹۹۰) ارائه شد که بیانگر میزان عدم‌قرینگی شوک‌های مثبت و منفی است. برای رسم این منحنی، σ_t^2 (که از یک مدل GARCH نامتقارن به‌دست می‌آید) را در مقابل u_{t-1} رسم می‌کنیم. بدین منظور مقدار u_{t-1} را در دامنه مثبت و منفی در نظر می‌گیریم. به‌عنوان مثال این دامنه می‌تواند [۱،۱-] و یا [۲،۲-] و غیره باشد. دامنه انتخابی صرفاً بستگی به مقادیر u_{t-1} دارد. بعد از اینکه معادله واریانس را برآورد نمودیم، در این معادله مقدار u_{t-1} را قرار داده و سپس σ_t^2 را حساب کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم. نموداری که بدین ترتیب به‌دست می‌آید معروف به منحنی تأثیر خبر می‌باشد. به‌عنوان مثال ممکن است نموداری به‌صورت زیر به‌دست آید.

1- Pagan and Schwert (1990)



نمودار ۱۶-۷: منحنی تأثیر خبر

که در آن، نمودار GARCH برای حالت متقارن و نمودار GJR برای حالت نامتقارن است. نمودار نامتقارن نشان می‌دهد که شوک‌های منفی اثر بیشتری بر تغییرپذیری داشته‌اند، در حالی که شوک‌های مثبت اثر بسیار کمی داشته‌اند. چنین حالتی در نمودار ۱۶-۷ نشان داده شده است.[1]

۱۶-۱۰ وارد نمودن GARCH در معادله میانگین شرطی (ARCH-M)

در مواردی ممکن است نیاز باشد که انحراف معیار یا واریانس شرطی را به‌عنوان یکی از متغیرهای توضیحی وارد معادله میانگین شرطی (معادله اصلی) کنیم. به‌عنوان مثال اگر معادله میانگین شرطی بیانگر بازدهی سهام باشد، در این صورت انحراف معیار شرطی بیانگر تغییرپذیری بازدهی سهام یا ریسک سهام است. در چنین حالتی وارد نمودن انحراف معیار در معادله میانگین شرطی بدین معنی است که می‌خواهیم رابطه بازدهی سهام را با ریسک (انحراف معیار شرطی) بررسی کنیم. در چنین شرایطی مدل زیر را خواهیم داشت:

1- Brooks(2008)

$$Y_t = \mu + \delta \sigma_{t-1} + u_t \quad (16\text{-}34)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

اگر δ معنی‌دار باشد نشان می‌دهد که بین بازدهی (Y) و ریسک (σ) رابطه وجود دارد.

برآورد GARCH-M در Eviews — فایل data4

ابتدا در منوی Quick پنجره Estimate Equation را باز می‌کنیم. در این پنجره وقتی روش تخمین ARCH را انتخاب می‌کنیم در ذیل ARCH-M term چهار گزینهٔ None، Std. Dev.، Variance و Log(Var) وجود دارد که اولی هیچ‌کدام، دومی انحراف معیار، سومی واریانس و چهارمی لگاریتم واریانس را نشان می‌دهد. هر یک از اینها را که انتخاب کنیم، به‌عنوان متغیر توضیحی وارد معادله میانگین شرطی خواهد شد. برای مثال اثر انحراف معیار (ریسک) را بر نرخ رشد هفتگی قیمت سهام در بورس تهران بررسی می‌کنیم. بدین منظور گزینه Std. Dev. را انتخاب می‌کنیم. نتایج حاصله عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 02/02/11 Time: 14:17
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 20 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
@SQRT(GARCH)	0.134901	0.285286	0.508509	0.6111
C	0.547797	0.284853	1.923086	0.0545
Variance Equation				
C	0.139664	0.082244	1.698168	0.0895
RESID(-1)^2	0.296618	0.090905	3.262944	0.0011
GARCH(-1)	0.662050	0.099633	6.644911	0.0000

R-squared	0.019063	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	0.014133	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.772157	Akaike info criterion	3.447402
Sum squared resid	624.9673	Schwarz criterion	3.529574
Log likelihood	-341.4639	Hannan-Quinn criter.	3.480653
Durbin-Watson stat	1.532451		

در قسمت بالایی این جدول، معادله میانگین شرطی برای نرخ رشد قیمت سهام (GSP) ارائه شده است که C عرض از مبدأ آن است و SQRT(GARCH) بیانگر انحراف معیار (ریسک) می‌باشد. از آنجا که ضریب انحراف معیار، معنادار نیست لذا بین نرخ تغییرات قیمت سهام و ریسک هیچ رابطه‌ای وجود نداشته است.

۱۶-۱۱ GARCH با اجزاء موقتی و دائمی

مدل GARCH(۱,۱) را در نظر بگیرید که به‌صورت زیر بازنویسی شده است:

$$\sigma_t^2 = \overline{w} + \alpha(u_{t-1}^2 - \overline{w}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - \overline{w}) \qquad (۱۶-۳۵)$$

عرض از مبدأ مدل فوق برابر با $(1-\alpha-\beta)\overline{w}$ است. مدل فوق بیانگر سری زمانی است که از خاصیت «برگشت به میانگین» برخوردار است. $\overline{w}$ میانگین ثابت را برای همه زمان‌ها نشان می‌دهد. این مدل نشان می‌دهد که هر تغییری که ایجاد شود یا هر شوکی که وارد شود، بعد از مدتی اثر آن از بین می‌رود و σ_t^2 به سطح $\overline{w}$ برمی‌گردد. حال اگر میانگین را متغیر بگیریم و با m_t نشان دهیم، مدل فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sigma_t^2 - m_t = \alpha(u_{t-1}^2 - m_{t-1}) + \beta(\sigma_{t-1}^2 - m_{t-1}) \qquad (۱۶-۳۶)$$

$$m_t = w + \rho(m_{t-1} - w) + \phi(u_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2) \qquad (۱۶-۳۷)$$

معادله اول جزء موقتی (یعنی $\sigma_t^2 - m_t$) را نشان می‌دهد که با ضریب $\alpha+\beta$ به سمت صفر همگرا است. معادله دوم (یعنی m_t) جزء بلندمدت را توصیف می‌کند که با ضریب ρ به سمت w همگرا است. معمولاً ρ نزدیک به ۱ است و لذا سرعت همگرایی m_t بسیار پایین است.

برای بررسی نامتقارن بودن، می‌توان به معادله $\sigma_t^2 - m_t$ عبارت $\gamma(u_{t-1}^2 - m_{t-1})$ را اضافه نمود که d متغیر مجازی برای شوکهای منفی است. اگر $\gamma > 0$ باشد بیانگر آن است که اثر شوک‌های منفی متفاوت از شوک‌های مثبت است.

برآورد GARCH با اجزاء موقتی و دائمی در Eviews — فایل data4

برای برآورد مدل GARCH با اجزاء موقتی و دائمی، ابتدا در پنجره Equation Estimation روش تخمین ARCH را انتخاب کرده و سپس در پنجره‌ای که برای مدل‌های GARCH باز می‌شود در قسمت Model گزینه Component ARCH(1,1) را انتخاب می‌کنیم. نتایج تخمین در پنجره زیر نشان داده می‌شود.

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 01/20/11 Time: 07:48
Sample (adjusted): 2 202
Included observations: 201 after adjustments
Convergence achieved after 59 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
Q = C(2) + C(3)*(Q(-1) - C(2)) + C(4)*(RESID(-1)^2 - GARCH(-1))
GARCH = Q + C(5) * (RESID(-1)^2 - Q(-1)) + C(6)*(GARCH(-1) - Q(-1))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.699416	0.090734	7.708430	0.0000
Variance Equation				
C(2)	21.99165	315.6764	0.069665	0.9445
C(3)	0.999301	0.011243	88.88342	0.0000
C(4)	0.009713	0.092577	0.104913	0.9164
C(5)	0.269834	0.096190	2.805221	0.0050
C(6)	0.652446	0.112919	5.778008	0.0000

R-squared	-0.004058	Mean dependent var	0.812837
Adjusted R-squared	-0.004058	S.D. dependent var	1.784814
S.E. of regression	1.788433	Akaike info criterion	3.450210
Sum squared resid	639.6982	Schwarz criterion	3.548816
Log likelihood	-340.7461	Hannan-Quinn criter.	3.490110
Durbin-Watson stat	1.470245		

در اینجا Q معادل با m_t، GARCH معادل با σ_t^2 و RESID(-1)^2 نیز معادل با u_{t-1}^2 است.

۱۶-۱۲ پیش‌بینی با مدل‌های GARCH

مدل GARCH(۱,۱) را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + u_t \,,\ u_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

فرض کنید با مشاهدات دوره ۱ تا T، معادلات فوق را برآورد کرده‌ایم. واریانس شرطی سال آخر یعنی T برابر با $\sigma_T^2 \mid I_T$ است که I_T مجموعه اطلاعات سال T را نشان می‌دهد و بیانگر اطلاعات موجود تا سال T می‌باشد. بدیهی است که I_T شامل Tمشاهدهٔ قبلی است. حال برای سال‌های بعد

از نمونه، یعنی $T+1$، $T+2$ و ... واریانس‌های شرطی را با $\sigma^2_{T+1}\,|\,I_T$، $\sigma^2_{T+2}\,|\,I_T$ و ... نشان می‌دهیم.

واریانس‌های شرطی عبارتند از:

$$\sigma^2_{T+1} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_T + \beta\sigma^2_T$$
$$\sigma^2_{T+2} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{T+1} + \beta\sigma^2_{T+1}$$
$$\sigma^2_{T+3} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{T+2} + \beta\sigma^2_{T+2}$$

حال تصور کنید که $\sigma^{2f}_{1,T}$ بیانگر پیش‌بینی σ^2 برای یک زمان بعد از T باشد. یعنی در زمان T برای یک زمان بعد، واریانس را پیش‌بینی کنیم که عبارت است از:

$$\sigma^{2f}_{1,T} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_T + \beta\sigma^2_T \qquad (۱۶-۳۸)$$

با داشتن $\sigma^{2f}_{1,T}$، واریانس برای دو دوره بعد نیز قابل پیش‌بینی است که عبارت است از:

$$\sigma^{2f}_{2,T} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{T+1} + \beta\sigma^{2f}_{1,T}$$

اما چون مقدار u^2_{T+1} نامعلوم است، لذا از امید ریاضی آن، یعنی $E(u^2_{T+1}|I_T)$ استفاده می‌کنیم. این امید ریاضی برابر است با:

$$E(u^2_{T+1}|I_T) = \sigma^2_{T+1}$$

از طرف دیگر چون σ^2_{T+1} نامعلوم است از مقدار پیش‌بینی آن، یعنی $\sigma^{2f}_{1,T}$ استفاده می‌کنیم. لذا پیش‌بینی واریانس برای دو زمان بعدی برابر است با:

$$\sigma^{2f}_{2,T} = \alpha_0 + \alpha_1\sigma^{2f}_{1,T} + \beta\sigma^{2f}_{1,T} = \alpha_0 + (\alpha_1+\beta)\sigma^{2f}_{1,T} \qquad (۱۶-۳۹)$$

با تکرار این جایگذاری‌ها، برای ۳ زمان بعدی، خواهیم داشت:

$$\sigma^{2f}_{3,T} = \alpha_0 + \alpha_1 E(u^2_{T+2}|I_T) + \beta\sigma^{2f}_{2,T}$$
$$= \alpha_0 + \alpha_1\sigma^{2f}_{2,T} + \beta\sigma^{2f}_{2,T} = \alpha_0 + (\alpha_1+\beta)\sigma^{2f}_{2,T}$$

در معادله فوق به جای $\sigma^{2f}_{2,T}$ از معادله (۱۶-۳۹) قرار می‌دهیم:

$$\sigma^{2f}_{3,T} = \alpha_0 + (\alpha_1+\beta)[\alpha_0 + (\alpha_1+\beta)\sigma^{2f}_{1,T}$$
$$= \alpha_0 + (\alpha_1+\beta)\alpha_0 + (\alpha_1+\beta)^2\sigma^{2f}_{1,T}$$

با تکرار این فرایند، برای s سال بعد خواهیم داشت:

$$\sigma^{2f}_{s,T} = \alpha_0\sum_{i=1}^{s-1}(\alpha_1+\beta)^{i-1} + (\alpha_1+\beta)^{s-1}\sigma^{2f}_{1,T} \qquad (۱۶-۴۰)$$

اگر $(\alpha_1+\beta) < 1$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$\sigma^{2f}_{s,T} = \alpha_0\frac{1-(\alpha_1+\beta)^s}{1-(\alpha_1+\beta)} + (\alpha_1+\beta)^{s-1}\sigma^{2f}_{1,T}$$
$$= \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta)} + \left(\frac{\sigma^{2f}_{1,T}}{\alpha_1+\beta} - \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta)}\right)(\alpha_1+\beta)^s$$

در بلندمدت (یعنی $s\to\infty$)، پیش‌بینی واریانس برابر با $\frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+\beta)}$ خواهد بود. بنابراین اگر $(\alpha_1+\beta) < 1$ باشد، در بلندمدت مقدار واریانس به‌سمت یک مقدار معین میل می‌کند که بیانگر مانایی آن است.

پیش‌بینی واریانس شرطی با Eviews فایل data4

بعد از تخمین مدل GARCH مربوطه، نتایج حاصله در پنجره زیر نشان داده می‌شود. این نتایج برای نرخ رشد شاخص قیمت بورس تهران در ۲۰۲ هفته می‌باشد.

Equation: UNTITLED Workfile: BURSE::Burse\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

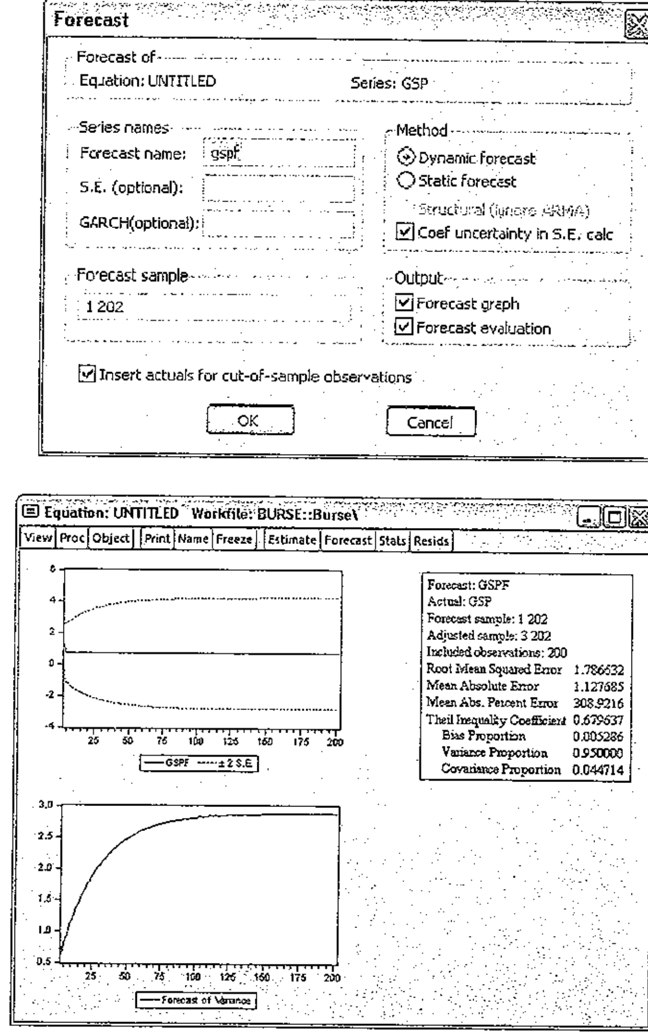
Dependent Variable: GSP
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution
Date: 01/20/11 Time: 14:29
Sample (adjusted): 3 202
Included observations: 200 after adjustments
Convergence achieved after 12 iterations
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)
GARCH = C(3) + C(4)*RESID(-1)^2 + C(5)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.483164	0.099825	4.840122	0.0000
GSP(-1)	0.279318	0.086735	3.220361	0.0013
Variance Equation				
C	0.102523	0.061841	1.657854	0.0973
RESID(-1)^2	0.227008	0.075772	2.995946	0.0027
GARCH(-1)	0.737370	0.087310	8.445395	0.0000

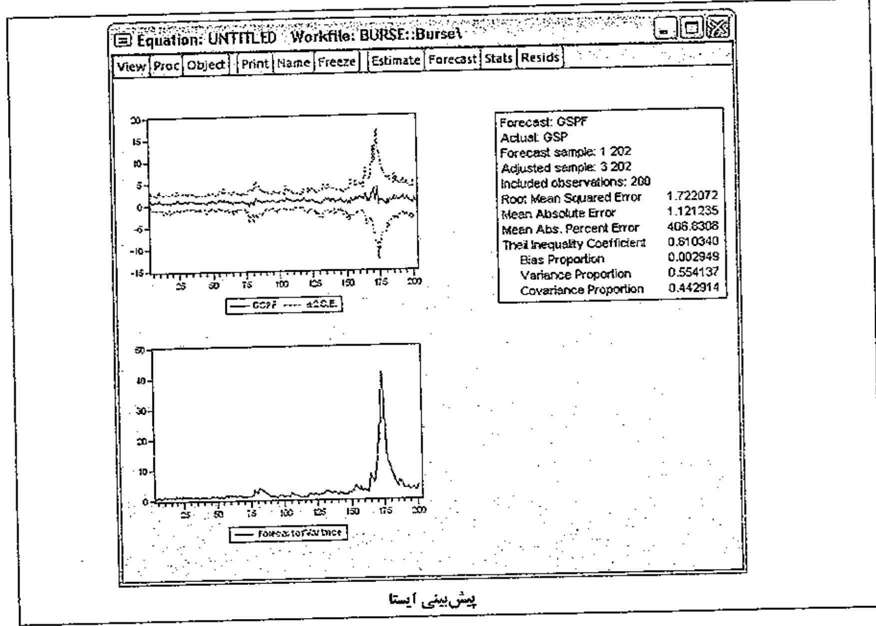
R-squared	0.064480	Mean dependent var	0.804018
Adjusted R-squared	0.059755	S.D. dependent var	1.784897
S.E. of regression	1.730748	Akaike info criterion	3.369585
Sum squared resid	593.1067	Schwarz criterion	3.452043
Log likelihood	-331.9585	Hannan-Quinn criter.	3.402955
Durbin-Watson stat	2.225078		

در پنجره فوق اگر گزینه Forecast را انتخاب کنیم پنجره زیر نمایان می‌شود. در این پنجره، گزینه‌های مختلفی وجود دارد. اولاً نام مقادیر پیش‌بینی شده را متغیر مورد نظر وارد می‌کنیم. به‌عنوان مثال آن را با GSPF نشان می‌دهیم. ثانیاً روش

پیش‌بینی را انتخاب می‌کنیم (ایستا یا پویا). اگر روش پویا را انتخاب کنیم در این صورت برای پیش‌بینی GSP، مقادیر به‌دست آمده از خود معادله را استفاده می‌کند. اما اگر روش ایستا را انتخاب کنیم در این صورت برای پیش‌بینی GSP از مقادیر واقعی استفاده می‌کند. معیارهای پیش‌بینی که در سمت راست این نمودارها ارائه شده است، در فصل سیزدهم توصیف شده‌اند. در این نمودارها، نمودار بالایی بیانگر پیش‌بینی میانگین شرطی و نمودار پایینی بیانگر پیش‌بینی واریانس شرطی (تغییرپذیری) می‌باشد.



پیش‌بینی پویا



پیش‌بینی ایستا

۱۶-۱۳ مدل‌های GARCH چندمتغیره[1] (MGARCH)

مدل‌های MGARCH تغییرپذیری همزمان دو یا چند متغیر را مدل‌سازی می‌کنند. در این حالت، ممکن است تغییرپذیری متغیرها بر همدیگر اثر بگذارند. به‌عنوان مثال فرض کنید که یک سبد دارایی، مرکب از N دارایی باشد. ارزش دارایی iام برابر با $W_i = w_i W$ می‌باشد که W ارزش کل سبد دارایی و w_i سهم دارایی iام را نشان می‌دهد. تصور کنید که $\mathbf{w}$ بردار سهم دارایی‌ها، $\mathbf{r}$ بردار بازدهی‌ها، $\boldsymbol{\mu}$ بردار بازدهی‌های انتظاری و $\mathbf{H}$ ماتریس واریانس بازدهی‌ها را نشان می‌دهد. در این صورت روابط زیر را خواهیم داشت:

$$R_P = \mathbf{w}'\mathbf{r} = [w_1 \quad \dots \quad w_N]\begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i$$

1- multivariate-GARCH

$$E(R_P) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = [w_1 \quad \dots \quad w_N] \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i$$

$$\text{var}(R_P) = \sigma_P^2 = \mathbf{w}'\mathbf{H}\mathbf{w}$$

R_P بازده سبد دارایی است. σ_P^2 نیز برابر با $\sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij}$ است که σ_{ii} واریانس دارایی i و σ_{ij} کوواریانس بین بازدهی دارایی i و j را نشان می‌دهد. در مدل فوق، میانگین بازده (انتظاری) و واریانس، یعنی $\boldsymbol{\mu}$ و $\mathbf{H}$، ثابت هستند. اگر میانگین و واریانس، ثابت نباشند آن را با $\boldsymbol{\mu}_t$ و $\mathbf{H}_t$ نشان می‌دهیم.

حال تصور کنید که میانگین و واریانس برای N متغیر به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \mathbf{z}_t \quad , \quad E(\mathbf{z}_t) = \mathbf{o} \quad , \quad \text{var}(\mathbf{z}_t) = \mathbf{I}_N$$

$$\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{I}_{t-1})$$

$$\mathbf{H}_t = \left(\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}\right)' = \text{var}(\mathbf{y}_t \mid \mathbf{I}_{t-1})$$

$\mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}}$ ماتریس $N \times N$ است. $\mathbf{I}_{t-1}$ مجموعه اطلاعات قابل دسترس در زمان $t-1$ است که لااقل شامل $\mathbf{y}_{t-1}$، $\mathbf{y}_{t-2}$ و ... می‌باشد. $\mathbf{H}_t$ نیز ماتریس واریانس شرطی $\mathbf{y}_t$ است.

حال بردار $\mathbf{h}_t$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{h}_t = \text{vech}(\mathbf{H}_t) \qquad (۱۶-۴۱)$$

عبارت $\text{vech}(\mathbf{H}_t)$ بیانگر برداری است که در ماتریس $\mathbf{H}_t$ عناصر قطر اصلی و بالای آن را به‌صورت ستونی مرتب می‌کند. به‌عنوان مثال فرض کنید دو متغیر داشته باشیم که در این صورت $\mathbf{H}_t$ عبارت است از:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} \qquad (۱۶-۴۲)$$

$\mathbf{h}_t$ عبارت است از:

$$\mathbf{h}_t = \text{vech}(\mathbf{H}_t) = \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} \qquad (۱۶-۴۳)$$

همچنین $\text{vec}(\mathbf{H}_t)$ برداری است که عناصر ماتریس $\mathbf{H}_t$ را به‌صورت ستونی مرتب می‌کند:

$$\text{vec}(\mathbf{H}_t) = \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{21t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} \qquad (۱۶-۴۴)$$

حال می‌توان مدل زیر را که مشابه با GARCH(1,1) است، تعریف نمود:

$$\mathbf{h}_t = \mathbf{C} + \mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{h}_{t-1} \qquad (۱۶-۴۵)$$

که $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \text{vech}(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t')$ است. به‌عنوان مثال در حالت دو متغیره، خواهیم داشت:

$$\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t' = \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} [u_{1t} \quad u_{2t}] = \begin{bmatrix} u_{1t}^2 & u_{1t}u_{2t} \\ u_{2t}u_{1t} & u_{2t}^2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \text{vech}(\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t') = \begin{bmatrix} u_{1t}^2 \\ u_{1t}u_{2t} \\ u_{2t}^2 \end{bmatrix}$$

برای مدل دو متغیره می‌توان معادله (۱۶-۴۵) را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1}^2 \\ u_{1t-1}u_{2t-1} \\ u_{2t-1}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11t-1} \\ h_{12t-1} \\ h_{22t-1} \end{bmatrix} \qquad (۱۶-۴۶)$$

با ساده کردن معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} h_{11t} &= c_1 + a_{11}u_{1t-1}^2 + a_{12}u_{1t-1}u_{2t-1} + a_{13}u_{2t-1}^2 + b_{11}h_{11t-1} + b_{12}h_{12t-1} + b_{13}h_{22t-1} \\ h_{12t} &= c_2 + a_{21}u_{1t-1}^2 + a_{22}u_{1t-1}u_{2t-1} + a_{23}u_{2t-1}^2 + b_{21}h_{11t-1} + b_{22}h_{12t-1} + b_{23}h_{22t-1} \\ h_{22t} &= c_3 + a_{31}u_{1t-1}^2 + a_{32}u_{1t-1}u_{2t-1} + a_{33}u_{2t-1}^2 + b_{31}h_{11t-1} + b_{32}h_{12t-1} + b_{33}h_{22t-1} \end{aligned} \qquad (۱۶-۴۷)$$

این مدل دو متغیره، دارای ۲۱ پارامتر می‌باشد. در حالت سه متغیره، تعداد پارامترها به ۷۸ و در حالت ۴ متغیره به ۲۱۰ پارامتر افزایش می‌یابد. بنابراین، مدل‌های GARCH چندمتغیره دارای پارامترهای بسیار زیادی هستند که تخمین آنها را دشوار می‌سازد.

در مدل (۴۷-۱۶)، معادله اول و سوم به‌ترتیب واریانس متغیر اول و دوم را توصیف می‌کنند. هر یک از واریانس‌ها، تابعی از خطاهای گذشته و واریانس‌های گذشته و همچنین کوواریانس‌های گذشته می‌باشند. معادله دوم نیز کوواریانس بین متغیرها را نشان می‌دهد.

همان‌طور که اشاره شد، مدل GARCH چند متغیره دارای پارامترهای زیادی است که تخمین آنها را دشوار می‌سازد. به‌همین منظور از نوع خاصی از مدل‌های GARCH چندمتغیره استفاده می‌شود که معروف به مدل‌های GARCH چندمتغیرهٔ قطری هستند. در این حالت، مدل (۴۷-۱۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$h_{11t} = \alpha_0 + \alpha_1 u^2_{1t-1} + \alpha_2 h_{11t-1}$$

$$h_{12t} = \gamma_0 + \gamma_1 u_{1t-1}u_{2t-1} + \gamma_2 h_{12t-1} \qquad (16-48)$$

$$h_{22t} = \beta_0 + \beta_1 u^2_{2t-1} + \beta_2 h_{22t-1}$$

مدل (۴۸-۱۶) فقط ۹ پارامتر دارد. در مدل سه متغیرهٔ قطری، تعداد پارامترها از ۷۸ به ۱۸ کاهش می‌یابد. در مدل فوق هر یک از واریانس‌ها فقط با خطاهای گذشته و واریانس گذشتهٔ متغیر مورد نظر رابطه دارند. همچنین کوواریانس‌ها نیز فقط وابسته به خطاهای گذشته و کوواریانس گذشتهٔ متغیرهای مورد بررسی هستند.

همان‌طور که در مدل‌های GARCH یک متغیره دیدیم، برای مثبت بودن واریانس بایستی ضرایب معادله‌ی واریانس شرطی مثبت باشند. در اینجا نیز رعایت این شرط لازم است. بدین منظور مدل GARCH چندمتغیره را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$h_{11t} = c_1 + \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} \\ u_{2t-1} \end{bmatrix} + E_{t-2}\left\{ \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \frac{g_{12}}{2} \\ \frac{g_{12}}{2} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} \\ u_{2t-1} \end{bmatrix} \right\}$$

که $h_{iit-1} = E_{t-2}(u^2_{it-1})$ و $h_{12t-1} = E_{t-2}(u_{1t-1}u_{2t-1})$ می‌باشد.

$$h_{12t} = c_2 + \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} & \frac{a_{22}}{2} \\ \frac{a_{22}}{2} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} \\ u_{2t-1} \end{bmatrix} + E_{t-2}\left\{ \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{21} & \frac{g_{22}}{2} \\ \frac{g_{22}}{2} & g_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} \\ u_{2t-1} \end{bmatrix} \right\}$$

$$h_{22t} = c_3 + \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{31} & \frac{a_{32}}{2} \\ \frac{a_{32}}{2} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} \\ u_{2t-1} \end{bmatrix} + E_{t-2}\left\{ \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{31} & \frac{g_{32}}{2} \\ \frac{g_{32}}{2} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} \\ u_{2t-1} \end{bmatrix} \right\}$$

معادلات فوق را به شکل ماتریسی می‌نویسیم:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & a_{21} & \frac{a_{22}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{13} & \frac{a_{22}}{2} & a_{23} \\ a_{21} & \frac{a_{22}}{2} & a_{31} & \frac{a_{32}}{2} \\ \frac{a_{22}}{2} & a_{23} & \frac{a_{32}}{2} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} & 0 \\ u_{2t-1} & 0 \\ 0 & u_{1t-1} \\ 0 & u_{2t-1} \end{bmatrix}$$

$$+ E_{t-2}\begin{bmatrix} u_{1t-1} & u_{2t-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_{1t-1} & u_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & \frac{g_{12}}{2} & g_{21} & \frac{g_{22}}{2} \\ \frac{g_{12}}{2} & g_{13} & \frac{g_{22}}{2} & g_{23} \\ g_{21} & \frac{g_{22}}{2} & g_{31} & \frac{g_{32}}{2} \\ \frac{g_{22}}{2} & g_{23} & \frac{g_{32}}{2} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t-1} & 0 \\ u_{2t-1} & 0 \\ 0 & u_{1t-1} \\ 0 & u_{2t-1} \end{bmatrix}$$

معادله فوق را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

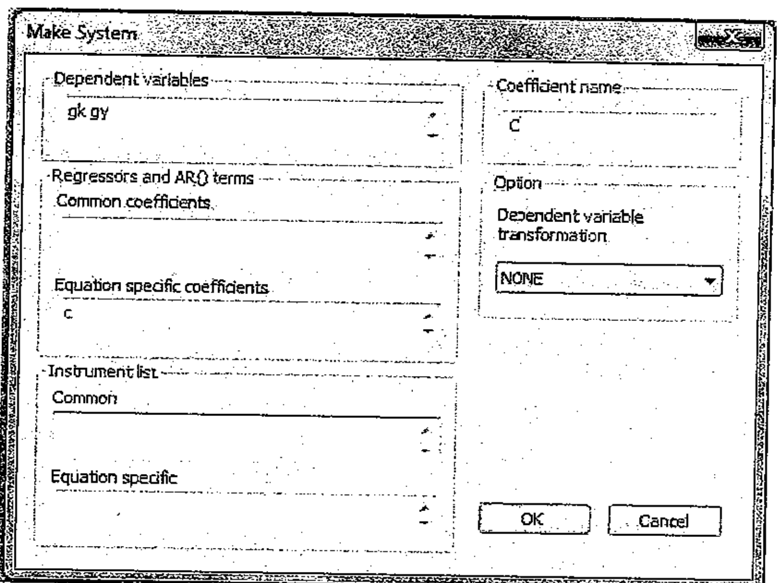
$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C} + (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{u}'_{t-1})\widetilde{\mathbf{A}}(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{u}_{t-1}) + E_{t-2}\left[(\mathbf{I}_2 \otimes u'_{t-1})\widetilde{\mathbf{G}}(\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{u}_{t-1})\right]$$

بدین ترتیب ماتریس $\mathbf{H}_t$ مشابه یک فرم درجه دو است. شرط مثبت بودن $\mathbf{H}_t$ آن است که $\mathbf{C} \geq 0$، $\widetilde{\mathbf{A}} \geq 0$ و $\widetilde{\mathbf{G}} \geq 0$ باشد. بدیهی است که وارد نمودن چنین محدودیت‌هایی بر روی ضرایب، مشکل است.

تخمین GARCH چند متغیره با Eviews — فایل data2

برای تخمین GARCH چند متغیره با استفاده از Eviews ابتدا در فایل کاری(workfile)، متغیرهای مورد نظر را انتخاب می‌کنیم (با گرفتن کلید ctrl و کلیک روی متغیرهای مورد نظر). بعد از انتخاب متغیرها، به‌صورت زیر عمل کرده تا پنجره‌ای به نام Make system باز شود.

right click → open → as system



در این پنجره همان‌طور که مشاهده می‌شود، نام متغیرهای وابسته وارد شده است(gk و gy). gk و gy به‌ترتیب نرخ رشد موجودی سرمایه و تولید ناخالص داخلی هستند. سایر موارد به شرح زیر است:

۱- dependent variables : نام متغیرهای وابسته که قبلاً انتخاب کرده‌ایم، وارد شده است.

۲- common coefficients : اگر در این قسمت نام متغیری را وارد کنیم (مثلاً X) آنگاه متغیر X در هر دو معادله با ضریب یکسان وارد می‌شود.

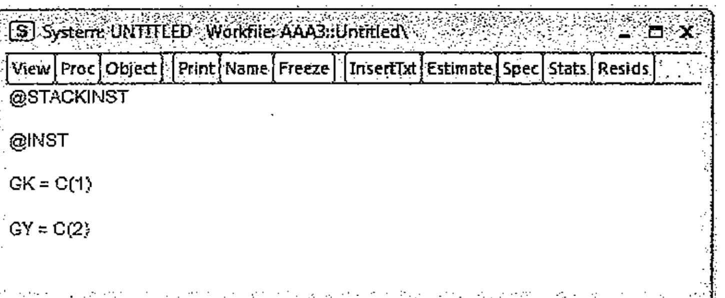
۳- Equation specific coefficients : در این قسمت، ابتدا فقط حرف C را داریم که نشان می‌دهد هر یک از متغیرهای مورد نظر، فقط روی عرض از مبدأ، برازش شده‌اند. اگر متغیرهای دیگری را به‌عنوان متغیر توضیحی بخواهیم وارد کنیم، می‌توان نام آنها را بعد از حرف C وارد کرد. در واقع در این قسمت معادله میانگین شرطی، تعریف می‌شود.

٤-Instrument list: امکان معرفی متغیرهای ابزاری وجود دارد.

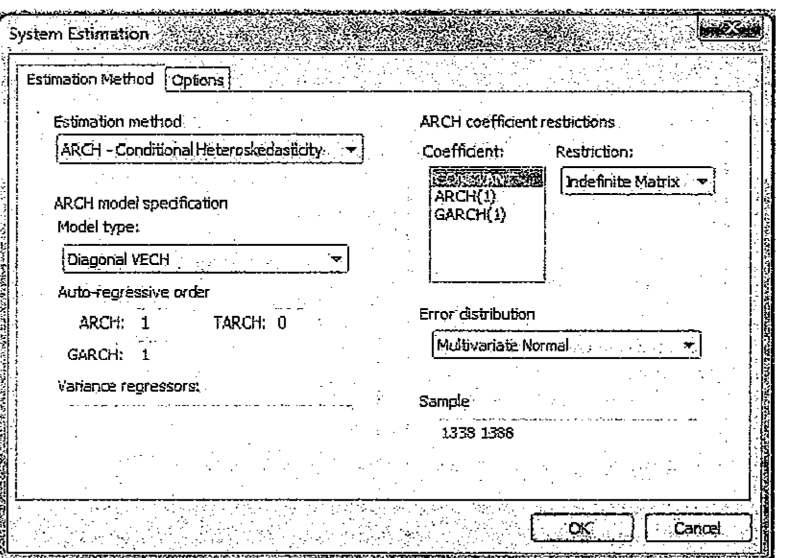
٥- coeffient name : نام‌گذاری ضرایب است که Eviews آنها را با حرف C نشان می‌دهد.

٦- Dependent variable transformation : امکان لگاریتم تفاضل و نرخ رشد متغیرها را می‌دهد.

با انتخاب OK در پنجره Make system ، پنجره دیگری به نام system باز می‌شود که معادلات میانگین شرطی را نشان می‌دهد. چون هیچ متغیر توضیحی معرفی نکرده‌ایم، لذا متغیرهای وابسته فقط روی ضرایب ثابت (عرض از مبدأ) برازش شده‌اند.



برای تخمین مدل، گزینه Estimate را در پنجره system انتخاب می‌کنیم که پنجره System Estimation باز می‌شود. در این پنجره، ابتدا در قسمت Estimation method گزینه ARCH را انتخاب می‌کنیم.



در پنجره فوق، می‌توان مرتبه ARCH و GARCH را انتخاب نمود. همچنین می‌توان نامتقارن بودن را در مقابل گزینه TARCH در نظر گرفت. سه روش تخمین شامل diagonal VECH ، constant conditional correlation و diagonal BEKK وجود دارد. با انتخاب OK نتایج به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

System: UNTITLED Workfile: AAA3::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | InsertTxt | Estimate | Spec | Stats | Resids

System: UNTITLED
Estimation Method: ARCH Maximum Likelihood (Marquardt)
Covariance specification: Diagonal VECH
Date: 09/15/12 Time: 14:09
Sample: 1346 1386
Included observations: 41
Total system (balanced) observations 82
Presample covariance: backcast (parameter =0.7)
Failure to improve Likelihood after 8 iterations

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	5.251701	1.065155	4.930458	0.0000
C(2)	5.991422	0.256292	23.37736	0.0000
Variance Equation Coefficients				
C(3)	-0.150348	4.580132	-0.032826	0.9738
C(4)	0.321120	1.602529	0.200383	0.8412
C(5)	0.052110	0.574783	0.090661	0.9278
C(6)	0.375408	0.273653	1.371838	0.1701
C(7)	0.559062	0.283882	1.969350	0.0489
C(8)	0.957208	0.651988	1.468138	0.1421
C(9)	0.630861	0.236485	2.667658	0.0076
C(10)	0.178620	0.241844	0.738578	0.4602
C(11)	0.165077	0.207847	0.794224	0.4271

Log likelihood	-236.1521	Schwarz criterion	12.51594
Avg. log likelihood	-2.879903	Hannan-Quinn criter.	12.22361
Akaike info criterion	12.05620		

Equation: GY = C(1)

R-squared	-0.004157	Mean dependent var	4.789384
Adjusted R-squared	-0.004157	S.D. dependent var	7.259791
S.E. of regression	7.274864	Sum squared resid	2116.946
Durbin-Watson stat	0.977170		

Equation: GK = C(2)

R-squared	-0.021729	Mean dependent var	6.958451
Adjusted R-squared	-0.021729	S.D. dependent var	6.641665
S.E. of regression	6.713437	Sum squared resid	1802.810
Durbin-Watson stat	0.141713		

Covariance specification: Diagonal VECH
GARCH = M + A1.*RESID(-1)*RESID(-1)' + B1.*GARCH(-1)
M is an indefinite matrix*
A1 is an indefinite matrix
B1 is an indefinite matrix

Transformed Variance Coefficients

	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
M(1,1)	-0.150348	4.580132	-0.032826	0.9738
M(1,2)	0.321120	1.602529	0.200383	0.8412
M(2,2)	0.052110	0.574783	0.090661	0.9278
A1(1,1)	0.375408	0.273653	1.371838	0.1701
A1(1,2)	0.559062	0.283882	1.969350	0.0489
A1(2,2)	0.957208	0.651988	1.468138	0.1421
B1(1,1)	0.630861	0.236485	2.667658	0.0076
B1(1,2)	0.178620	0.241844	0.738578	0.4602
B1(2,2)	0.165077	0.207847	0.794224	0.4271

در قسمت بالای جدول، ابتدا ضرایب معادلات میانگین شرطی ارائه شده است که با $C(1)$ و $C(2)$ نشان داده شده است. در قسمت بعدی ضرایب معادلات واریانس شرطی را داریم که با $C(3)$ ، $C(4)$ و ... نشان داده شده است. سپس برای هر یک از معادلات میانگین شرطی، معیارهایی مانند R^2 و ... ارائه شده است. در قسمت آخر (Transformed Variance Coefficients) مجدداً ضرایب معادلات واریانس شرطی را داریم که تکرار نتایج قبلی است و با $M(i,j)$ ، $A1(i,j)$ و $B1(i,j)$ نشان داده شده‌اند. M ضرایب ثابت هر معادله، $A1$ ضرایب u_i^2 ها و $B1$ ضرایب واریانس تأخیری می‌باشد که برای مدل دو متغیره، می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$h_{11} = M(1,1) + A1(1,1)u_{1,t-1}^2 + B1(1,1)h_{11,t-1}$$

$$h_{12} = M(1,2) + A1(1,2)u_{1,t-1}u_{2,t-1} + B1(1,2)h_{12,t-1}$$

$$h_{22} = M(2,2) + A1(2,2)u_{2,t-1}^2 + B1(2,2)h_{22,t-1}$$

مسائل

۱۶-۱ مدل EGARCH یا GARCH نمایی چه تفاوتی با GARCH(۱, ۱) دارد؟

۱۶-۲ مدل EGARCH یا GARCH نمایی چه تفاوت و مزیتی بر مدل‌های TARCH یا GJR دارد؟

۱۶-۳ در مسئله ۱-۱ فصل اول، آزمون ARCH را برای معادله $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Z_t + u_t$ انجام دهید.

۱۶-۴ در مسئله ۱۶-۳ معادله GARCH(1 , 1) را برآورد و تحلیل کنید.

۱۶-۵ در مسئله ۱۶-۳، مدل EGARCH را برآورد و تحلیل کنید. نتیجه را با مسئله ۱۶-۴ مقایسه کنید.

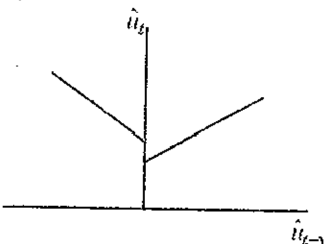
۱۶-۶ آزمون نامتقارن بودن را برای مسئله ۱۶-۳ انجام دهید.

۱۶-۷ در مسئله ۱-۱ فصل اول، مدل GARCH دومتغیره قطری را بین X و Y برآورد کنید.

۱۶-۸ در مسئله ۱-۱ فصل اول، مدل GARCH سه‌متغیره قطری را بین X، Y و Z برآورد کنید.

۱۶-۹ مسائل ۱۶-۳ تا ۱۶-۷ را بر اساس نرخ رشد متغیرها انجام دهید.

۱۶-۱۰ نمودار زیر نامتقارن بودن اثر شوک‌های مثبت و منفی را نشان می دهد. معادله‌ای که بتواند وضعیت این نمودار را توصیف کند، تعریف کنید.



۱۶-۱۱ نحوه پیش‌بینی با مدل GARCH(1,1) را توضیح دهید.

۱۶-۱۲ منحنی تأثیر خبر چیست و چه کاربردی دارد؟

۱۶-۱۳ در مدل GARCH با اجزاء موقتی و دائمی، تفاوت جزء دائمی و موقتی چیست؟

۱۶-۱۴ فرض کنید معادله واریانس شرطی به صورت زیر برآورد شده است.

$$\sigma_t^2 = 0.001 + 0.014u_{t-1}^2 + 0.11u_{t-1}^2 I_{t-1} + 0.81\sigma_{t-1}^2$$

فرض کنید $u_1 = 1$ باشد.

الف) واریانس Y_t را تا سه دوره پیش‌بینی کنید.

ب) منحنی تأثیر خبر را رسم کنید.

۱۶-۱۵ نتایج زیر را برای یک مدل GARCH به‌دست آمده است:

$$\sigma_t^2 = 0.14 + 0.31u_{t-1}^2 + 0.11u_{t-1}^2 D_{t-1} + 0.65\sigma_{t-1}^2$$
$$(2.1)\quad (2.5)\quad (-4.1)\quad (2.8)$$

D_{t-1} متغیر مجازی است که برای $u_{t-1} < 0$ برابر ۱ است و در غیر این‌صورت برابر صفر می‌باشد. نتایج حاصل از معادله فوق چه چیزی رانشان می‌دهد وآن را تفسیر کنید.

۱۶-۱۶ وقتی برای Y_t فرایند GARCH(1,1) را معرفی می‌کنیم، کدامیک از ویژگی‌های Y_t را مدلسازی کرده‌ایم.

۱۶-۱۷ مدل GARCH(1,1) چه ترجیحی بر مدل ARCH(p) دارد؟

۱۶-۱۸ اگر در مدل GARCH(1,1) که به‌صورت $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$ است، $\alpha + \beta = 1$ باشد، چه مشکلی را ایجاد می کند.

۱۶-۱۹ مدل زیر را برای توصیف بازده روزانه سهام در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + u_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

فرض کنید $u_1 = 1$ باشد.

الف) اگر $\hat{\mu} = 0.0025$، $\hat{\alpha}_0 = 0.015$، $\hat{\alpha}_1 = 0.22$ و $\hat{\beta} = 0.65$ باشد، واریانس Y_t را تا ۵ دوره پیش‌بینی کنید.

ب) در بند الف برای پیش‌بینی واریانس Y_t یک معادله کلی به‌دست آورید.

ج) اگر $\hat{\mu} = 0.0025$، $\hat{\alpha}_0 = 0.015$، $\hat{\alpha}_1 = 0.22$ و $\hat{\beta} = 0.78$ باشد، واریانس Y_t را تا ۵ دوره پیش‌بینی کنید.

د) معادله کلی برای پیش‌بینی واریانس Y_t در بند ج بنویسید.

ج) اگر در بند ج $\hat{\beta} = 0.98$ باشد، برای مقادیر پیش‌بینی چه اتفاقی می‌افتد؟

ضمیمه فصل شانزدهم: مدل‌های GARCH در Stata

آزمون ARCH در Stata

فایل data4

روش اول: برای آزمون ARCH مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- رگرسیون مورد نظر را برآورد می‌کنیم:

```
reg y x
```

۲- باقیمانده‌ها (e) را حساب می‌کنیم:

```
predict e, residuals
```

۳- e^2 را حساب می‌کنیم:

```
gen e2=e^2
```

۳- رگرسیون e^2 را روی وقفه‌هایش (e_{t-1}^2، e_{t-2}^2 و ...) برازش می‌کنیم:

```
reg e2 l.e2  l2.e2  …
```

۳- مقدار آمارهٔ $LM = nR^2$ را حساب می‌کنیم:

```
scalar nr2=e(n)*e(r2)
```

برای مشاهده مقدار این آماره از فرمان scalar list nr2 استفاده می‌کنیم.

۴- مقدار nR^2 را با عدد بحرانی $\chi^2_{0/95,q}$ مقایسه می‌کنیم. اگر $nR^2 > \chi^2_{0/95,q}$ وود ARCH رد نمی‌شود.

روش دوم: روش کوتاه‌تر آن است که مدل ARCH(q) را با فرمان زیر برآورد کرده و آزمون کنیم:

۱- رگرسیون مورد نظر را برآورد می‌کنیم:

```
reg y x
```

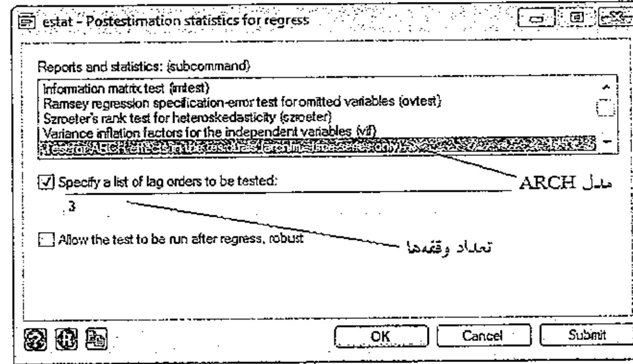
۳- مدل ARCH(q) را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

```
estat archlm, lags(q)
```

روش سوم: می‌توان روش دوم را به طریق دیگری نیز انجام داد، بدین صورت که بعد از تخمین معادله مورد نظر، مسیر زیر را دنبال نمود:

statistics → time series → tests → time series specification test after regress

پنجره زیر باز می‌شود:



با انتخاب OK نتایج به دست می‌آید.

حال آزمون ARCH را برای بازده هفتگی سهام در بورس تهران انجام می دهیم.

ابتدا معادله مورد نظر را که در اینجا به صورت $GSP_t = \alpha + \beta GSP_{t-1}$ است با فرمان زیر تخمین می زنیم:

```
reg gsp  l.gsp
```

سپس مدل ARCH(3) را با فرمان زیر تخمین می زنیم:

```
estat archlm, lags(3)
```

نتایج عبارت است از:

```
. estat archlm, lags(3)
LM test for autoregressive conditional heteroskedasticity (ARCH)
```

lags(p)	chi2	df	Prob > chi2
3	43.189	3	0.0000

```
H0: no ARCH effects    vs.   H1: ARCH(p) disturbance
```

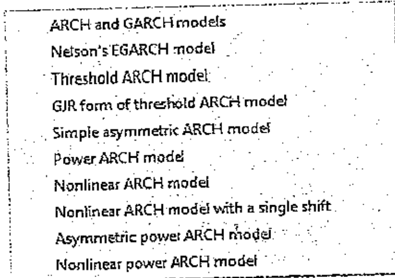
چون مقدار $LM = ۴۳/۱۸۹$ در ناحیه بحرانی قرار دارد (احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است)، لذا وجود ARCH رد نمی‌شود.

تخمین مدل‌های GARCH

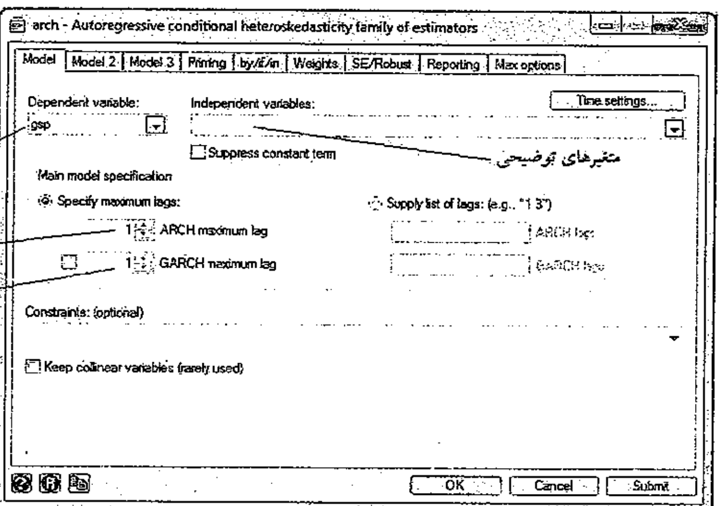
برای برآورد مدل‌های GARCH می‌توان مسیر زیر را دنبال نمود:

statistics → time series → tests → ARCH/GARCH

گزینه های مربوط به مدل‌های GARCH به صورت زیر نشان داده می شود. با انتخاب هر یک از آنها می‌توان مدل مورد نظر را انتخاب کرده و آن را برآورد نمود:



به عنوان مثال با انتخاب گزینه اول می‌توان مدل GARCH(p,q) را برآورد نمود:



اما برای برآورد هر یک از مدل های GARCH می توان از فرمان‌های کوتاه نیز استفاده نمود که در ادامه، آنها را بررسی خواهیم کرد.

برآورد مدل GARCH(p,q)

برای برآورد مدل GARCH(p,q) از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

arch y x, arch(1/q) garch(1/p)

به عنوان مثال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_۰ + \beta_۱ X_t + u_t$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \alpha_۱ u_{t-۱}^۲ + \beta \sigma_{t-۱}^۲$$

مدل فوق را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

arch y x, arch(1/1) garch(1/1)

به عنوان مثال برای داده‌های بورس تهران (فایل data4) مدل زیر را برآورد مدل می‌کنیم:

$$GGS = \beta_۰ + u_t$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \alpha_۱ u_{t-۱}^۲ + \beta \sigma_{t-۱}^۲$$

برای برآورد این مدل، خواهیم داشت:

arch gsp, arch(1/1) garch(1/1)

نتایج عبارت است از:


```
. arch gsp, arch(1/1) garch(1/1)

(setting optimization to BHHH)
Iteration 0:   log likelihood = -395.36702
Iteration 1:   log likelihood =  -377.0302
Iteration 2:   log likelihood = -370.14109
Iteration 3:   log likelihood = -364.88228
Iteration 4:   log likelihood = -360.50376
(switching optimization to BFGS)
Iteration 5:   log likelihood = -357.02017
Iteration 6:   log likelihood = -348.75623
Iteration 7:   log likelihood = -346.43449
Iteration 8:   log likelihood = -345.95962
Iteration 9:   log likelihood = -342.68134
Iteration 10:  log likelihood = -342.55223
Iteration 11:  log likelihood = -342.13207
Iteration 12:  log likelihood = -342.03258
Iteration 13:  log likelihood = -342.02494
Iteration 14:  log likelihood = -342.02431
(switching optimization to BHHH)
Iteration 15:  log likelihood = -342.02405
Iteration 16:  log likelihood = -342.02405

ARCH family regression

Sample:  2 - 202                          Number of obs   =        201
                                          Wald chi2(.)    =          .
Log likelihood =  -342.024                Prob > chi2     =          .
```

gsp		Coef.	OPG Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf. Interval]	
gsp	_cons	.7107504	.0856021	8.30	0.000	.5429733	.8785274
ARCH	arch L1.	.3259351	.0981739	3.32	0.001	.1335178	.5183523
	garch L1.	.6367844	.0916266	6.95	0.000	.4571996	.8163693
	_cons	.1455489	.0750366	1.94	0.052	-.0015201	.2926179

($\beta_۰$ ، β ، $\alpha_۱$ ، $\alpha_۰$)

مدل GARCH(1,1) را می توان به صورت زیر نیز برآورد نمود:

arch y x, arch(1) garch(1)

علاوه بر این، مدل زیر را نیز در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_۰ + \beta_۱ X_t + u_t$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \alpha_۱ u_{t-۱}^۲ + \alpha_۲ u_{t-۲}^۲ + \beta \sigma_{t-۲}^۲$$

این مدل با فرمان زیر برآورد می‌شود:

arch y x, arch(1/2) garch(2)

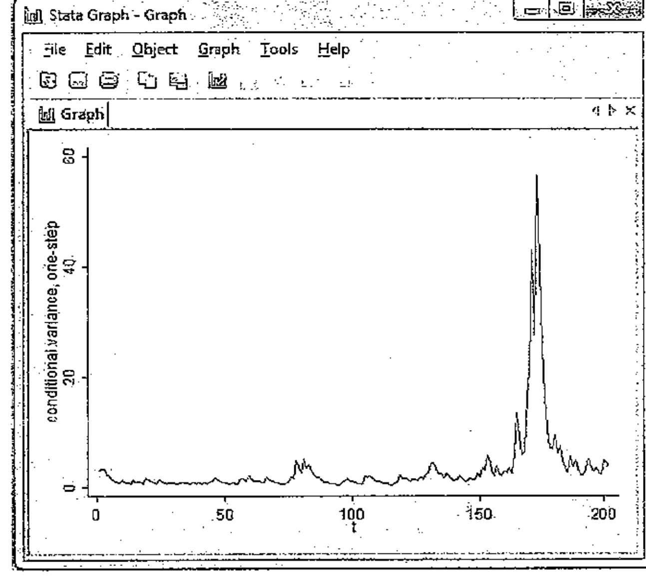
بعد از برآورد مدل GARCH می‌توان واریانس شرطی را با فرمان زیر حساب نمود.

predict htgarch, variance

همچنین با فرمان زیر نمودار آن را ترسیم می کنیم.

tsline gtgarch

که برای مثال فوق به صورت زیر می‌باشد:



مدل TARCH

مدل GARCH نامتقارن را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma u_{t-1}^2 I_{t-1}$$

برآورد این مدل با فرمان زیر انجام می شود:

```
arch y x, arch(1) garch(1) tarch(1)
```

	gsp	Coef.	OPG Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
gsp	_cons	.7115905	.0871737	8.16	0.000	.5407332	.8824478
ARCH	arch L1.	.3190509	.1253261	2.55	0.011	.0734162	.5646855
	tarch L1.	.0089739	.1148155	0.08	0.938	-.2160605	.2340082
	garch L1.	.6377997	.0912156	6.99	0.000	.4590205	.8165789
	_cons	.1461759	.07618	1.92	0.055	-.0031341	.2954859

β_0, γ, β, α_0, α_1

مدل EGARCH

مدل EGARCH(1,1) با فرمان زیر برآورد می شود:

```
arch gsp, earch(1/1) egarch(1/1)
```

و یا می توان مسیر زیر را دنبال نمود:

Nelson's EGARCH Model → ARCH/GARCH → tests → time series → statistics

که پنجره‌ای برای برآورد مدل EGARCH باز می‌شود که می‌توان مشخصات مدل را وارد نمود.

مدل GARCH-M

در پنجره‌ای که برای هر یک از مدل‌های GARCH باز می‌شود، اگر منوی Model2 را انتخاب کنیم، می‌توان مشخصات مدل GARCH-M را وارد نمود. به‌عنوان مثال برای GARCH(1,1) خواهیم داشت:

arch - Autoregressive conditional heteroskedasticity family of estimators
Model | Model 2 | Model 3 | Priming | by/if/in | Weights | SE/Robust | Reporting | Max options
ARCH-in-mean options
Include ARCH-in-mean term in the mean-equation specification
Lags of conditional variance to include in mean equation: (e.g., "1 3")
Transformation of conditional variance for ARCH-in-mean terms:
(use "X" to symbolize the value of the conditional variance)
ARIMA model specification
ARIMA(p,d,q) specification:
0 Autoregressive order (p)
0 Integrated (difference) order (d)
0 Moving-average order (q)
Supply list of ARMA lags: (e.g., "1 3")
OK Cancel Submit

واریانس را با وقفه‌های مختلف وارد معادله میانگین می‌کند (مثلاً عبارت ۲ ۱، واریانس زمان t و t-1 را وارد می‌کند)

از طرف دیگر، این مدل با فرمان زیر نیز برآورد می‌شود:

```
arch y x, archm arch(1) garch(1)
```

به عنوان مثال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$GSP_t = \beta_0 + \theta\sigma_t^2 + u_t$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

این مدل با فرمان زیر برآورد می‌شود:

```
arch gsp, archm arch(1) garch(1)
```

نتایج این مدل عبارت است از:

gsp	Coef.	OPG Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
gsp						
_cons	.6506798	.1251436	5.20	0.000	.4054029	.8959567
ARCHM						
sigma2	.0359138	.0760807	0.47	0.637	-.1132017	.1850293
ARCH						
arch L1.	.3163807	.0953466	3.32	0.001	.1295047	.5032566
garch L1.	.6398362	.0996013	6.42	0.000	.4446211	.8350512
_cons	.1492766	.0862237	1.73	0.083	-.0197187	.3182719

فصل هفدهم

مدل‌های تغییر جهت

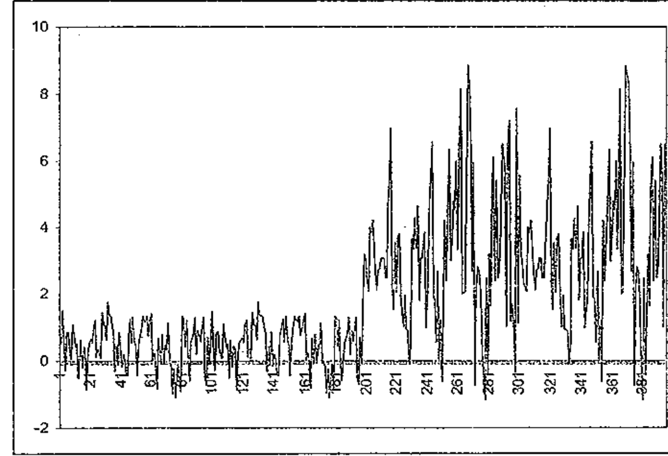
۱۷-۱ مقدمه

بسیاری از متغیرهای اقتصادی، در طول زمان دچار تغییر جهت شده و رفتار آنها تغییر قابل‌توجهی می‌کند. این تغییر ممکن است به‌صورت تغییر در میانگین و یا تغییر در واریانس باشد. از طرف دیگر ممکن است این تغییرات به‌صورت «یک بار برای همیشه» باشد که معروف به «شکست ساختاری» است و یا ممکن است متغیر مورد نظر در یک دوره دچار تغییر شود و مجدداً به مسیر قبلی خود برگردد یا رفتار دیگری را برگزیند. معمولاً بسیاری از تغییرات اساسی که در یک سری زمانی رخ می‌دهد، به وقایع مهمی مانند جنگ‌ها، بحران‌های مالی، ورشکستگی بانک‌ها، تغییرات مهم در سیاست‌های دولت و ... نسبت داده می‌شود.

در فصل‌های قبلی، سری‌های زمانی را در قالب مدل‌های ARMA بررسی نمودیم که همهٔ آنها از نوع مدل‌های خطی هستند. اما بسیاری از سری‌های زمانی وجود دارند که از مدل‌های خطی تبعیت نمی‌کنند. به‌عنوان مثال مدل AR(۱) را در نظر بگیرید که ممکن است از یک زمان به بعد و یا به‌ازای یک مقدار معین Y_t، دچار تغییر ساختاری شود:

$$Y_t = \alpha_1 + \beta_1 Y_{t-1} + u_{1t} \qquad t \le t_0$$
$$Y_t = \alpha_2 + \beta_2 Y_{t-1} + u_{2t} \qquad t > t_0$$

این مدل می‌تواند برای توصیف فرایندی به‌کار رود که در نمودار (۱-۱۷)ترسیم شده است. این نمودار نشان می‌دهد که در زمان $t = ۲۰۰$ یک تغییر اساسی رخ داده است که نه تنها میانگین Y، بلکه تغییرپذیری آن نیز دگرگون شده است.



نمودار ۱-۱۷: تغییر وضعیت در سری زمانی

به‌هرحال، اینها بیانگر الگوهای غیرخطی هستند که در این فصل به توصیف آنها خواهیم پرداخت. در این فصل برخی از مدل‌های غیرخطی یا تغییر جهت را بررسی می‌کنیم که شامل تغییرات فصلی، رگرسیون خطی قطعه‌ای، مدل خودرگرسیون آستانه، مدل خودرگرسیون تغییر جهت ملایم و مدل تغییر جهت مارکف می‌باشند.

۲-۱۷ تغییرات فصلی

یکی از تغییراتی که در متغیرها رخ می‌دهد مربوط به زمان‌بندی آنها است، مانند تغییرات هفتگی، ماهانه یا فصلی. تغییرات فصلی نوعی از تغییرات است که متناسب با شرایط فصل، مقدار یک متغیر مورد نظر ممکن است دچار تغییر قابل‌توجه شود. استفاده از متغیرهای مجازی[1] روش

1- dummy variable

ساده‌ای است که می‌تواند اثر تغییرات فصلی را در نظر بگیرد. از آنجا که چهار فصل وجود دارد، لذا چهار متغیر مجازی معرفی می‌شود که عبارتند از:

$$\begin{cases} D_{1t} = 1 & \text{برای فصل ۱} \\ \quad = 0 & \text{برای سایر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{2t} = 1 & \text{برای فصل ۲} \\ \quad = 0 & \text{برای سایر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{3t} = 1 & \text{برای فصل ۳} \\ \quad = 0 & \text{برای سایر} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{4t} = 1 & \text{برای فصل ۴} \\ \quad = 0 & \text{برای سایر} \end{cases}$$

اما اگر معادله رگرسیون دارای عرض از مبدأ باشد و اگر برای هر فصل نیز یک متغیر مجازی تعریف کنیم، در این صورت جمع چهار متغیر مجازی در هر زمان، برابر با ۱ شده و با عرض از مبدأ، همخطی کامل پیدا می‌کند. بنابراین برای اجتناب از دام متغیرهای مجازی، یکی از فصل‌ها را به‌عنوان مبنا در نظر گرفته و معادله مورد نظر را برای آن فصل تعریف کرده و سپس برای سه فصل باقیمانده، سه متغیر مجازی تعریف می‌کنیم[1]. فرض کنید که مدل زیر را داشته باشیم که رابطه Y و X را بررسی می‌کند.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t \qquad (۱-۱۷)$$

حال فصل ۴ را به‌عنوان مبنا در نظر گرفته و برای فصل‌های ۱، ۲ و ۳ متغیرهای مجازی D_1، D_2 و D_3 را تعریف کرده و وارد مدل می‌کنیم:

$$Y_t = \alpha + \gamma_1 D_{1t} + \gamma_2 D_{2t} + \gamma_3 D_{3t} + \beta X_t + u_t \qquad (۲-۱۷)$$

در مدل (۲-۱۷) اثر تغییرات فصلی را به‌صورت زیر بررسی می‌کنیم:

برای فصل اول، معادله رگرسیون به‌ازای $D_2 = D_3 = 0$ و $D_1 = 1$ عبارت است از:

$$Y_t = (\alpha + \gamma_1) + \beta X_t + u_t$$

۱- فصل هفتم را ببینید.

برای فصل دوم، معادله رگرسیون به‌ازای $D_1 = D_3 = 0$ و $D_2 = 1$ عبارت است از:

$$Y_t = (\alpha + \gamma_2) + \beta X_t + u_t$$

برای فصل سوم، معادله رگرسیون به‌ازای $D_1 = D_2 = 0$ و $D_3 = 1$ عبارت است از:

$$Y_t = (\alpha + \gamma_3) + \beta X_t + u_t$$

برای فصل چهارم، معادله رگرسیون به‌ازای $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ عبارت است از:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

در مدلی که معرفی شد اثر تغییرات فصلی صرفاً به‌صورت تغییر مقدار ثابت است و شیب تابع (β) تحت تأثیر قرار نمی‌دهد و برای همه فصول یکسان است. در چنین حالتی اثر تغییرات X بر Y ثابت است و اثر سایر عوامل که توسط α اندازه‌گیری می‌شود، دچار تغییر می‌گردد. اما ممکن است که در هر فصل اثر X بر Y نیز دچار تغییر شود و به‌عبارت دیگر شیب تابع تغییر کند. در این صورت اثر تغییرات فصلی را با معادله زیر نشان می‌دهیم.

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \theta_1 D_{1t} X_t + \theta_2 D_{2t} X_t + \theta_3 D_{3t} X_t + u_t \qquad (17\text{-}3)$$

با استفاده از این معادله می‌توان معادله رگرسیون هر فصل را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

برای فصل اول $D_2 = D_3 = 0$ و $D_1 = 1$ است:

$$Y_t = \alpha + (\beta + \theta_1) X_t + u_t$$

برای فصل دوم $D_1 = D_3 = 0$ و $D_2 = 1$ است:

$$Y_t = \alpha + (\beta + \theta_2) X_t + u_t$$

برای فصل سوم $D_1 = D_2 = 0$ و $D_3 = 1$ است:

$$Y_t = \alpha + (\beta + \theta_3) X_t + u_t$$

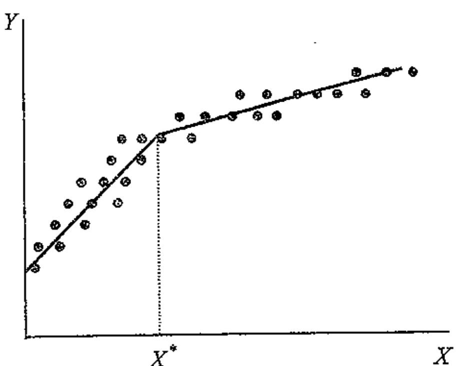
برای فصل چهارم $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ است:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$$

علاوه بر این، می‌توان ترکیبی از معادله (۲-۱۷) و (۳-۱۷) را در نظر گرفت که در این صورت تغییرات فصلی هم باعث انتقال معادله و هم باعث تغییر شیب می‌شود.

۳-۱۷ توابع خطی قطعه‌ای

مدل خطی قطعه‌ای معمولاً در مواردی به‌کار می‌رود که روابط بین متغیرها به‌صورت غیرخطی است. در چنین مواردی می‌توان از معادلات غیرخطی استفاده نمود، ولی بنا به‌دلایل مختلف، از معادلات خطی قطعه‌ای استفاده می‌شود. به‌طور کلی مدل خطی قطعه‌ای یکی از مثال‌های عمومی است که داده‌ها را به دو یا چند قسمت تقسیم می‌کند. هدف از این تقسیم‌بندی، بررسی اثر عوامل و شرایطی است که موجب چنین تغییری شده‌اند. فرض کنید رابطه X و Y به‌صورت نمودار زیر باشد.



نمودار ۲-۱۷: تغییر ساختاری

بدیهی است که برای برآورد رابطه X و Y می‌توان از معادلاتی مانند $Y = \alpha + \frac{\beta}{X}$ یا $\log(Y) = \alpha + \beta \log(X)$ استفاده نمود و احتمالاً برآورد نسبتاً خوبی هم به‌دست می‌آید. اما نکتهٔ مهم این است که برای X یک «مقدار آستانه»[1] مانند X^* وجود دارد که مرز تغییرات را نشان می‌دهد. بر این اساس، قبل و بعد از X^* رابطه X و Y دچار تغییر می‌شود. به‌عنوان مثال رابطه بین مصرف بنزین و قیمت آن ممکن است تا محدوده‌ای از قیمت‌ها کاملاً بی‌معنی باشد (کشش قیمتی تقاضای بنزین صفر باشد)، اما وقتی قیمت از مقدار آستانه خود می‌گذرد آنگاه یک رابطه منفی بین آنها به‌وجود آید.

1- threshold value

به‌منظور فرمول‌بندی این رابطه، می‌توان برای $X \le X^*$ یک معادله و برای $X > X^*$ نیز معادله دیگری را تعریف و برآورد نمود. اما برای جلوگیری از کاهش درجهٔ آزادی، معادله زیر را تعریف می‌کنیم:

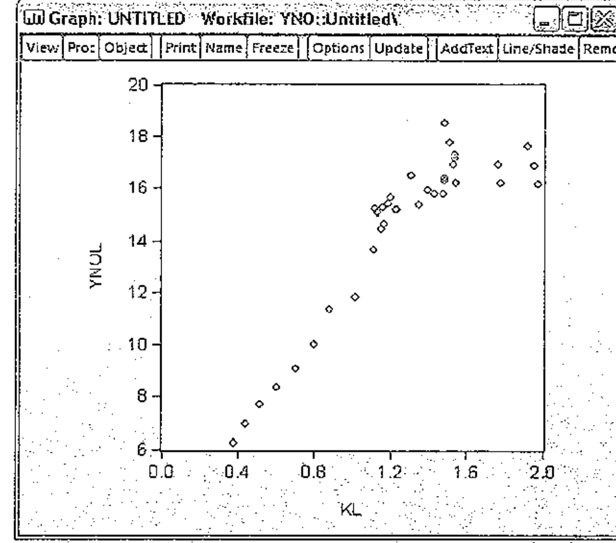
$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \gamma D_t + \theta D_t X_t + u_t$$

$$D_t = \begin{cases} 0 & X \le X^* \\ 1 & X > X^* \end{cases} \qquad (۱۷-۴)$$

بنابراین، به‌ازای $X \le X^*$ یا $D_t = 0$، معادلهٔ $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ و به‌ازای $X > X^*$ یا $D_t = 1$، معادلهٔ $Y_t = (\alpha + \gamma) + (\beta + \theta) X_t + u_t$ به‌دست می‌آید.

برآورد رگرسیون خطی قطعه‌ای در Eviews فایل data2

فرض کنید می‌خواهیم تابع تولید را به‌صورت سرانه برآورد کنیم. تولید سرانه را به‌صورت نسبت تولید ناخالص داخلی بدون نفت به نیروی کار (YNOL) و سرمایه سرانه را به‌صورت نسبت سرمایه به کار (KL) تعریف می‌کنیم. برای مشخص شدن نوع رابطهٔ این دو متغیر، ابتدا نمودار آن را با فرمان Scat KL YNOL ترسیم می‌کنیم:



از این نمودار مشخص است که تقریباً از $KL > 1/2$، رگرسیون دارای شکستگی است و شیب آن کاهش می‌یابد. بنابراین متغیر مجازی D1 را تعریف می‌کنیم که مقدار آن برای $KL > 1/2$ برابر با ۱ و برای $KL \le 1/2$ برابر با صفر می‌باشد. حال

معادله رگرسیون را با دستور زیر برآورد می‌کنیم:

LS log(YNOL) C log (KL) D1 D1*log (KL)

نتایج حاصله عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: YNO::Untitled\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Forecast Stats Resids

Dependent Variable: LOG(YNOL)
Method: Least Squares
Date: 02/02/11 Time: 17:45
Sample (adjusted): 1345 1380
Included observations: 36 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.515731	0.019854	126.7114	0.0000
LOG(KL)	0.745153	0.039732	18.75429	NA
D1	0.174349	0.029473	5.915547	0.0000
D1*LOG(KL)	-0.494763	0.067388	-7.342021	0.0000

S.E. of regression	0.046816	Akaike info criterion	-3.180762
Sum squared resid	0.070134	Schwarz criterion	-3.004815
Log likelihood	61.25371	Hannan-Quinn criter.	-3.119352
Durbin-Watson stat	0.955008		

از آنجا که ضرایب متغیر مجازی معنی‌دار هستند، لذا شکستگی در این رگرسیون تأیید می‌شود. برای سال‌هایی که نسبت سرمایه به کار کوچکتر از ۱/۲ است تابع تولید عبارت است از:

$$D1 = 0 \Rightarrow \log(YNOL) = ۲/۵۵۴ + ۰/۸۰۶ \log(KL)$$

اما برای سال‌هایی که نسبت سرمایه به کار بزرگتر از ۱/۲ باشد، تابع تولید عبارت است از:

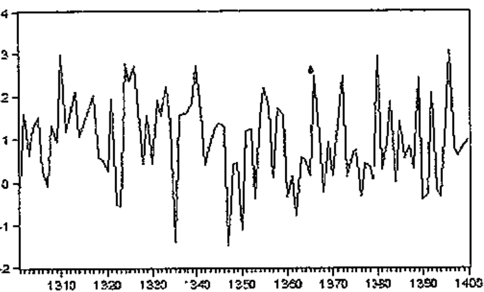
$$D1 = 1 \Rightarrow \log(YNOL) = (۲/۵۵۴ + ۰/۱۶۹) + (۰/۸۰۶ - ۰/۶۲۴) \log(KL)$$

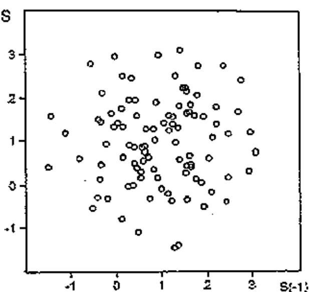
$$= ۲/۷۲۳ + ۰/۱۸۰ \log(KL)$$

بنابراین هم شیب و هم عرض از مبدأ این دو معادله، متفاوت می‌باشد.

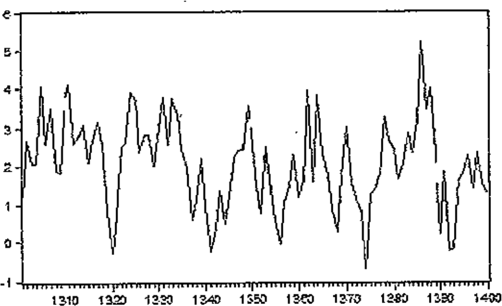
۱۷-۴ سری‌های زمانی خطی و غیرخطی

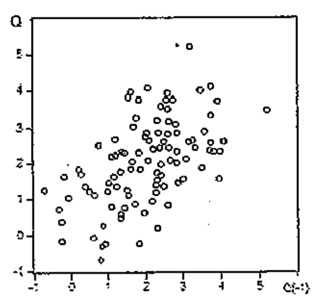
مدل‌های خطی کاربردهای زیادی دارند و در بسیاری از موارد، عملکرد نسبتاً مناسبی دارند. ولی مواردی نیز وجود دارد که سری‌های زمانی دچار تغییرات اساسی می‌شود به‌گونه‌ای که هیچ مدل خطی نمی‌تواند به نتایج درخور توجهی برسد. به‌عنوان مثال نمودارهای (۱۷-۳)، (۱۷-۴) و (۱۷-۵) را در نظر بگیرید:



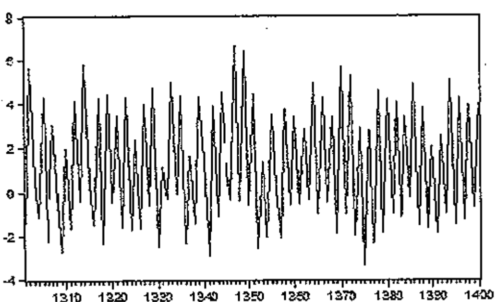


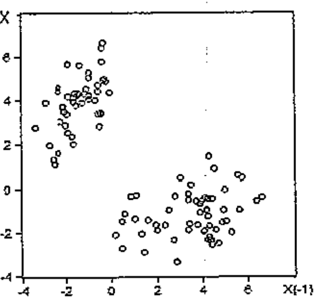
نمودار ۳-۱۷: فرایند تصادفی محض ($S_t=\mu+u_t$)





نمودار ٤-۱۷: فرایند خودرگرسیون مرتبه اول خطی($Q_t=\mu+\phi Q_{t-1}+u_t$)





نمودار ۵-۱۷: فرایند خود رگرسیون مرتبه اول غیرخطی ($X_t=\mu_i+\phi_i X_{t-1}+u_t\ ;\ i=1,2$)

نمودار (۵-۱۷) نشان می‌دهد که X_t از یک فرایند AR(۱) تبعیت می‌کند اما دچار تغییر ساختاری شده است، به‌گونه‌ای که به‌ازای $X_{t-1}\leq 0$ و $X_{t-1}>0$ می‌توان دو مدل AR(۱) را ارائه نمود:

$$X_t=\mu_1+\phi_1 X_{t-1}+u_t\ ,\quad X_{t-1}\leq 0 \qquad (17-5)$$
$$X_t=\mu_2+\phi_2 X_{t-1}+u_t\ ,\quad X_{t-1}>0$$

بحث غیرخطی بودن را در مورد مدل‌های ARMA نیز می‌توان مطرح نمود. به‌عنوان مثال، مدل AR(۱) را به‌صورت یک فرایند خطی، درنظر بگیرید:

$$Y_t=\mu+\phi Y_{t-1}+u_t \qquad (17-6)$$

شکل غیرخطی این مدل عبارت است از:

$$Y_t=f(Y_{t-1})+u_t \qquad (17-7)$$

این مدل معروف به خودرگرسیون غیرخطی است که با NLAR(۱)[1] نشان داده می‌شود. این مدل را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$Y_t=a(Y_{t-1})Y_{t-1}+u_t \qquad (17-8)$$

مقایسه (۸-۱۷) و (۶-۱۷) نشان می‌دهد که ضرایب معادلهٔ (۶-۱۷) ثابت هستند ولی ضرایب معادلهٔ (۸-۱۷) متغیر می‌باشند.

یکی از راه‌های ساده این است که مدل (۷-۱۷) را با استفاده از بسط تیلور بنویسیم. به‌عنوان مثال بسط مرتبه اول آن، خطی و بسط مرتبه دوم آن، غیر خطی (درجه دو) خواهد شد[2]:

$$Y_t=a_0+a_1 Y_{t-1}+a_2 Y_{t-1}^2+u_t \qquad (17-9)$$
$$=a_0+(a_1+a_2 Y_{t-1})Y_{t-1}+u_t$$

که $a_0=\mu$ و $\phi=a_1+a_2 Y_{t-1}$ است. بنابراین، ضریب ϕ غیرخطی است.

بحث فوق را برای مدل NLAR(۲) نیز به کار می‌بریم:

$$Y_t=f(Y_{t-1},Y_{t-2})+u_t \qquad (17-10)$$

1- Non-Linear AR

۲- بسط مرتبه دوم تیلور حول $Y_{t-1}=0$ عبارت است از:

$$f(Y_{t-1})=f(0)+f'(0)(Y_{t-1}-0)+\frac{f''(0)}{2}(Y_{t-1}-0)^2$$

بسط مرتبه دوم برای تابع (۱۰-۱۷) عبارت است از[1]:

$$Y_t = a_0 + a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + a_3 Y_{t-1}^2 + a_4 Y_{t-2}^2 + a_5 Y_{t-1} Y_{t-2} + u_t \qquad (۱۷-۱۱)$$

نتایج فوق را می‌توان برای NLAR(p) تعمیم داد. بدین منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = f(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \cdots, Y_{t-p}) + u_t \qquad (۱۷-۱۲)$$

بسط مرتبه دوم این مدل عبارت است از:

$$Y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{p} b_i Y_{t-i}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i<j}}^{p} \sum_{j=1}^{p} c_{ij} Y_{t-i} Y_{t-j} + u_t \qquad (۱۷-۱۳)$$

معادلهٔ (۱۳-۱۷) را مدل خودرگرسیون تعمیم‌یافته (GAR)[2] نیز می‌گویند که در واقع تعمیم مدل AR(p) است.

از طرف دیگر مدل AR با وقفه‌های طولانی را می‌توان با مدل ARMA با وقفه‌های محدود عوض نمود. در فصل چهاردهم دیدیم که AR(∞) معادل با MA با وقفه‌های محدود است. در اینجا نیز می‌توان مدلGAR با وقفه‌های طولانی را تبدیل به مدلARMA نمود. به‌عبارت دیگر با به‌کارگیریMA می‌توان مدل GAR با مرتبه‌های بالا را تبدیل به یک نوع از مدل‌های ARMA نمود که معروف به مدل‌های خطی دوگانه[3] هستند. این مدل‌ها شامل جملاتی از حاصل‌ضرب‌های Y_{t-i} و u_{t-i} می‌باشد. اگر مدل ARMA(p,q) را در نظر بگیرید، آنگاه مدل خطی دوگانهٔ آن که با BL(p, q, r, s) نشان داده می‌شود عبارت است از:

$$Y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i} + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} Y_{t-i} u_{t-j} + u_t \qquad (۱۷-۱۴)$$

اگر $\gamma_{ij} = 0$ باشد، آنگاه با مدل ARMA(p,q) یکسان خواهد بود.

۱- بسط مرتبه دوم تیلور، حول $Y_{t-1} = Y_{t-2} = 0$ عبارت است از:

$$f(Y_{t-1}, Y_{t-2}) = f(0,0) + \left.\frac{\partial f}{\partial Y_{t-1}}\right|_{Y_{t-1}=Y_{t-2}=0} (Y_{t-1} - 0) + \left.\frac{\partial f}{\partial Y_{t-2}}\right|_{Y_{t-1}=Y_{t-2}=0} (Y_{t-2} - 0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y_{t-1}^2}\right|_{Y_{t-1}=Y_{t-2}=0} (Y_{t-1} - 0)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y_{t-2}^2}\right|_{Y_{t-1}=Y_{t-2}=0} (Y_{t-2} - 0)^2 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial Y_{t-1} \partial Y_{t-2}}\right|_{Y_{t-1}=Y_{t-2}=0} (Y_{t-1} - 0)(Y_{t-2} - 0)$$

2- generalized AR
3- bilinear

به‌عنوان مثال مدل BL(۱,۱,۱,۱) را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + u_t + \theta_1 u_{t-1} + \gamma_{11} Y_{t-1} u_{t-1} + u_t \qquad (۱۷-۱۵)$$

این مدل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_t = \mu + \underbrace{(\phi_1 + \gamma_{11} u_{t-1})}_{\phi} Y_{t-1} + \theta_1 u_{t-1} + u_t \qquad (۱۷-۱۶)$$

معادلهٔ فوق مشابه ARMA(۱,۱) است با این تفاوت که ضریب Y_{t-1} به‌صورت تصادفی تغییر می‌کند که عبارت است از:

$$\phi = \phi_1 + \gamma_{11} u_{t-1} \qquad (۱۷-۱۷)$$

بنابراین، ضریب Y_{t-1} خود یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن برابر با ϕ_1 و واریانس آن برابر با $\gamma_{11}^2 \sigma^2$ می‌باشد. با فرض اینکه $\gamma_{11} > 0$ باشد، شوک‌های مثبت ($u_{t-1} > 0$) موجب افزایش ϕ و شوک‌های منفی ($u_{t-1} < 0$) موجب کاهش آن می‌گردد. از طرف دیگر اگر $\gamma_{11} > 0$ باشد، اثر شوک‌های مثبت، پایدارتر خواهد بود.

۵-۱۷ مدل‌های خودرگرسیون آستانه[1]

مدل‌های خودرگرسیون آستانه (TAR) دسته‌ای از مدل‌های خودرگرسیون غیرخطی هستند که از ترکیب مدل‌های خودرگرسیون خطی به‌دست می‌آیند. طبق بحث تانگ[2] (۱۹۹۰)، اصل آستانه کمک می‌کند تا یک سیستم تصادفی پیچیده به مجموعه‌ای از سیستم‌های جزئی و ساده‌تر تجزیه شود. ویژگی کلیدی مدل TAR این است که فرض می‌شود متغیر وضعیت، معلوم و قابل مشاهده است. مثال بسیار سادهٔ مدل خودرگرسیون آستانه، به‌صورت معادله (۱۸-۱۷) می‌باشد. این مدل شامل فرآیند خودرگرسیون مرتبه اول برای هر دو وضعیت است که در آن فقط یک آستانه وجود دارد. البته تعداد آستانه‌ها برابر با تعداد وضعیت‌ها منهای یک است. لذا متغیر وابسته (Y_t) از یک فرآیند خودرگرسیون تبعیت می‌کند که طبق آن اگر متغیر تعیین‌کنندهٔ وضعیت[3] (با k وقفه

1- threshold autoregressive models
2- Tong (1990)
3- state-determining variable

که با s_{t-k} نشان داده می‌شود) کمتر از مقدار آستانه (r) باشد، معادلهٔ $Y_t=\mu_1+\phi_1 Y_{t-1}+u_{1t}$ و در غیر این صورت به‌ازای $s_{t-k}>r$ معادلهٔ $Y_t=\mu_2+\phi_2 Y_{t-1}+u_{2t}$ را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_1+\phi_1 Y_{t-1}+u_{1t} \quad , \quad s_{t-k}\le r \\ Y_t &= \mu_2+\phi_2 Y_{t-1}+u_{2t} \quad , \quad s_{t-k}<r \end{aligned} \qquad (۱۷-۱۸)$$

حال سؤال این است که متغیر تعیین‌کنندهٔ وضعیت (s_{t-k}) چیست؟ این متغیر می‌تواند شامل هر متغیری باشد که موجب انتقال رفتار Y_t از وضعیتی به وضعیت دیگر می‌شود. بدیهی است که نظریه‌های اقتصادی می‌تواند در اینجا نقش مهمی داشته باشند.[۴] اگر $k=۰$ باشد بدین معنی است که مقدار جاری s (یعنی s_t) موجب تغییر رفتار Y می‌شود. همچنین اگر $k=۱$ باشد بدین معنی است که s با یک وقفه (یعنی s_{t-1}) در تغییر رفتار Y_t نقش دارد.

مثال ۱-۱۷: فرض کنید Y_t نرخ تورم است که برای آن مدل (۱۸-۱۷) را درنظر داریم. تصور کنید که متغیری که می‌تواند موجب تغییر رفتار تورم (Y_t) شود، رشد پول (m_t) است. برای سادگی $k=۲$ را در نظر بگیرید که بر این اساس، رشد پول با یک وقفهٔ دو دوره‌ای موجب تغییر تورم می‌شود. به‌عبارت دقیق‌تر اگر آستانهٔ نرخ رشد پول برابر با ۱۰درصد ($r=۱۰$) باشد، آنگاه در زمان t اگر $m_{t-2}\le r=۱۰$ باشد، معادله $Y_t=\mu_1+\phi_1 Y_{t-1}+u_{1t}$ و اگر $m_{t-2}>r=۱۰$ باشد، معادله $Y_t=\mu_2+\phi_2 Y_{t-1}+u_{2t}$ را برآورد می‌کنیم.

اگر در (۱۸-۱۷)، متغیر تعیین‌کنندهٔ وضعیت را برابر با Y_{t-k} در نظر بگیریم، آنگاه آن را مدل SETAR[۱] می‌گویند که حالت ساده‌تری از مدل TAR است:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_1+\phi_1 Y_{t-1}+u_{1t} \quad , \quad Y_{t-k}\le r \\ Y_t &= \mu_2+\phi_2 Y_{t-1}+u_{2t} \quad , \quad Y_{t-k}>r \end{aligned} \qquad (۱۷-۱۹)$$

در این مدل «وقفه kام Y» تعیین‌کنندهٔ تغییر رفتار Y در زمان t است.

اگر $k=۱$ باشد، حالت ساده‌تری را خواهیم داشت که عبارت است از:

$$\begin{aligned} Y_t &= \mu_1+\phi_1 Y_{t-1}+u_{1t} \quad , \quad Y_{t-1}\le r \quad ; \quad s_t=1 \quad \text{وضعیت ۱} \\ Y_t &= \mu_2+\phi_2 Y_{t-1}+u_{2t} \quad , \quad Y_{t-1}>r \quad ; \quad s_t=2 \quad \text{وضعیت ۲} \end{aligned} \qquad (۱۷-۲۰)$$

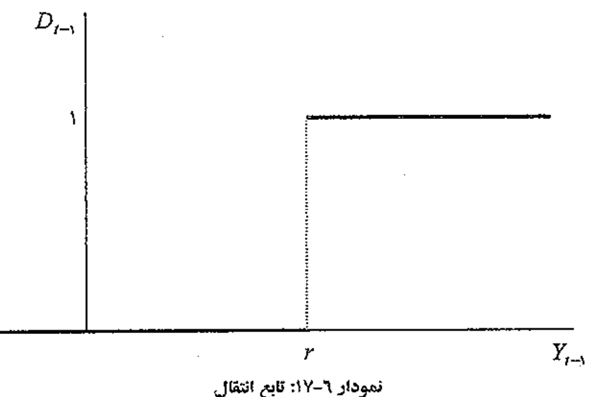
1- self-exciting TAR

اگر فرض کنیم که u_{1t} و u_{2t} دارای واریانس یکسان هستند، آنگاه $u_{1t}=u_{2t}=u_t$ خواهد بود. در این صورت، می‌توان معادلات فوق را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_t=(\mu_1+\phi_1 Y_{t-1})(1-D_{t-1})+(\mu_2+\phi_2 Y_{t-1})D_{t-1}+u_t$$

$$D_{t-1}=\begin{cases} 0 & Y_{t-1}\le r \\ 1 & Y_{t-1}>r \end{cases} \qquad (۱۷-۲۱)$$

بنابراین، D_{t-1} یک متغیر مجازی است که معروف به تابع انتقال است، زیرا انتقال از یک وضعیت به وضعیت دیگر را نشان می دهد. اگر $D_{t-1}=۰$ باشد بیانگر وضعیت ۱ (یعنی $Y_{t-1}\le r$) و اگر $D_{t-1}=۱$ باشد بیانگر وضعیت ۲ (یعنی $Y_{t-1}>r$) است. نمودار زیر مشخصات تابع انتقال را نشان می‌دهد:



نمودار ۶-۱۷: تابع انتقال

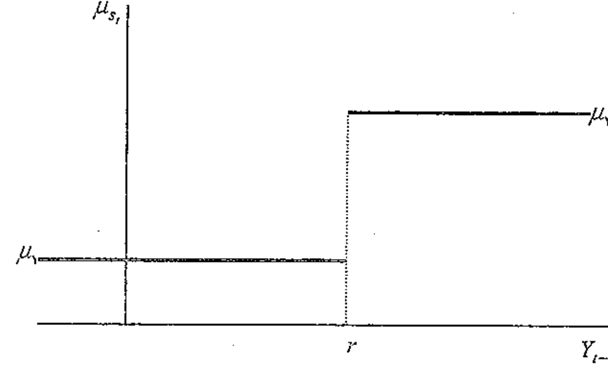
ویژگی این تابع انتقال آن است که برای ضرایب مدل، فقط دو مقدار را در نظر می‌گیرد و انتقال از یک وضعیت به وضعیت دیگر به‌صورت دفعی و ناگهانی است. برای نشان دادن این موضوع، مدل (۲۱-۱۷) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$Y_t=\mu_{s_t}+\phi_{s_t}Y_{t-1}+u_t \quad ; \quad s_t=1,2 \qquad (۱۷-۲۲)$$

ضرایب این معادله عبارتند از:

$$\begin{aligned} \mu_{s_t} &= \mu_1(1-D_{t-1})+\mu_2 D_{t-1}=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)D_{t-1} \\ \phi_{s_t} &= \phi_1(1-D_{t-1})+\phi_2 D_{t-1}=\phi_1+(\phi_2-\phi_1)D_{t-1} \end{aligned} \qquad (۱۷-۲۳)$$

روابط فوق مشابه میانگین وزنی هستند که وزن‌ها برابر با D_{t-1} است. اما چون D_{t-1} فقط برابر با صفر و یک است، لذا هر ضریب فقط دو مقدار دارد که یکی برای وضعیت ۱ و دیگری برای وضعیت ۲ می‌باشد. به‌عنوان مثال، نمودار زیر تغییر وضعیتِ عرض از مبدأ (μ) را نشان می‌دهد:



نمودار ۷-۱۷: تغییر وضعیت ضرایب

نتایج فوق نشان می‌دهد که هر گاه تغییر وضعیت رخ دهد (یعنی Y_{t-1} از مقدار آستانه عبور کند) تغییر ضرایب به‌صورت ناگهانی است. در واقع فرقی نمی‌کند که Y_{t-1} چقدر از مقدارآستانه (r) فاصله دارد. اگر $Y_{t-1}-r\leq 0$ باشد، کافی است تا در وضعیت ۱ باشیم و تفاوتی نمی‌کند که $Y_{t-1}-r=-0/01$ یا $Y_{t-1}-r=-2453$ باشد.

مثال ۲-۱۷: فرض کنید که معادلات زیر برای Y_t برآورد شده است:

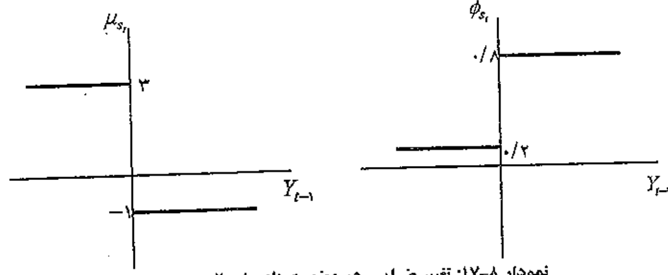
$$Y_t=3+0/2Y_{t-1}\ ,\ Y_{t-1}\leq 0\ ,\ D_{t-1}=0\ ,\ s_t=1$$
$$Y_t=-1+0/8Y_{t-1}\ ,\ Y_{t-1}>0\ ,\ D_{t-1}=1\ ,\ s_t=2$$

با ترکیب این دو معادله، خواهیم داشت:

$$Y_t=(3+0/2Y_{t-1})(1-D_{t-1})+(-1+0/8Y_{t-1})D_{t-1}$$
$$=\mu_{s_t}+\phi_{s_t}Y_{t-1}\quad ;\quad s_t=1,2$$

ضرایب عبارتند از:

$$\mu_{s_t}=3(1-D_{t-1})+(-1)D_{t-1}=3-4D_{t-1}$$
$$\phi_{s_t}=0/2(1-D_{t-1})+0/8D_{t-1}=0/2+0/6D_{t-1}$$



نمودار ۸-۱۷: تغییر ضرایب در وضعیت‌های ۱ و ۲

نمودارهای فوق نشان می‌دهند که با عبور Y از مقدار آستانه (صفر)، ضرایب دچار تغییر ناگهانی می‌شوند.

مثال ۳-۱۷: فرض کنید که Y_t نرخ تورم است که برای آن مدل (۲۰-۱۷) را به‌صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$Y_t=\begin{cases}\mu_1+\phi_1 Y_{t-1}+u_{1t}\ ;\ Y_{t-1}\leq r=15\\ \mu_2+\phi_2 Y_{t-1}+u_{2t}\ ;\ Y_{t-1}>r=15\end{cases}$$

مدل فوق نشان می‌دهد که مقدار آستانه نرخ تورم برابر با ۱۵ درصد است. هر گاه نرخ تورم سال قبل کمتر از ۱۵ درصد باشد، در این صورت برای سال t معادله اول و هر گاه نرخ تورم سال قبل برابر و یا بیشتر از ۱۵ درصد باشد، معادله دوم را به‌کار می‌بریم. در اینجا نرخ تورم با وقفهٔ یک ساله می‌تواند موجب تغییر رفتار تورم شود.

به‌طور کلی مدل TAR را می‌توان برای حالتی که بیش از دو وضعیت و بیش از یک وقفه داشته باشیم، تعریف نمود:

$$Y_t=\sum_{j=1}^{J}I_t^{(j)}\left(\phi_0^{(j)}+\sum_{i=1}^{p_j}\phi_i^{(j)}Y_{t-i}+u_t^{(j)}\right)\ ,\ r_{j-1}\leq s_{t-k}\leq r_j \qquad (17-24)$$

$I_t^{(j)}$ یک تابع شاخص برای وضعیت jام است که طبق آن وقتی متغیر Y در وضعیت j باشد، مقدار $I_t^{(j)}$ برابر با ۱ و در سایر موارد برابر با ۰ است. متغیر s_{t-k}، متغیر قابل‌مشاهده‌ای است که نقطهٔ تغییر جهت را نشان می‌دهد. $u_t^{(j)}$ نیز متغیر تصادفی با میانگین صفر و واریانس ثابت است. در

اینجا نیز متغیر s_{t-k} می‌تواند همان متغیر Y_{t-k} باشد. p_j نیز بیانگر تعداد وقفه‌ها یا مرتبهٔ خودرگرسیون در وضعیت jام است.

مثال ۴-۱۷: فرض کنید که Y_t نرخ تورم و m_t نرخ رشد پول در سال t است. برای نرخ تورم، سه معادله در نظر می‌گیریم که بیانگر این است که تورم دارای ۳ وضعیت یا رفتار می‌باشد:

$$Y_t=\begin{cases}\mu_1+\phi_{11}Y_{t-1}+u_{1t} & , \quad m_{t-2}<r_1=5\\ \mu_2+\phi_{21}Y_{t-1}+\phi_{22}Y_{t-2}+\phi_{23}Y_{t-3}+u_{2t} & , \quad r_1=5\le m_{t-2}<r_2=10\\ \mu_3+\phi_{31}Y_{t-1}+\phi_{32}Y_{t-2}+u_{3t} & , \quad m_{t-2}\ge r_2=10\end{cases}$$

در این مثال، نرخ رشد پول با یک تأخیر سه ساله در صورتی که از مقادیر آستانهٔ r_1 و r_2 بگذرد موجب تغییر وضعیت تورم می‌شود. در این مثال s_{t-k} معادل با m_{t-2} است. همچنین در معادله اول که وضعیت ۱ برقرار است (یعنی $j=1$ است)، طبق (۳۷-۱۷) مقدار عرض از مبدأ برابر با $\phi_0^{(1)}$ است که با μ_1 نشان داده شده است. در این معادله $p_j=p_1=1$ است. برای تطبیق معادلات فوق با (۲۴-۱۷)، توجه داریم که در اینجا ۳ وضعیت داریم $(J=3)$ و لذا خواهیم داشت:

$$Y_t=\sum_{j=1}^{3}I_t^{(j)}\left(\phi_0^{(j)}+\sum_{i=1}^{p_j}\phi_i^{(j)}Y_{t-i}+u_t^{(j)}\right)$$

چون برای وضعیت ۱، $I_t^{(1)}=1$ و $I_t^{(2)}=I_t^{(3)}=0$ است خواهیم داشت:

$$Y_t=\phi_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{p_1}\phi_i^{(1)}Y_{t-i}+u_t^{(1)}$$

از طرف دیگر چون تعداد تأخیرهای Y در معادله اول برابر با ۱ است، لذا $p_1=1$ می‌باشد:

$$\begin{aligned}Y_t&=\phi_0^{(1)}+\sum_{i=1}^{1}\phi_i^{(1)}Y_{t-i}+u_t^{(1)}\\&=\phi_0^{(1)}+\phi_1^{(1)}Y_{t-1}+u_t^{(1)}\\&=\mu_1+\phi_1Y_{t-1}+u_{1t}\ ;\ \phi_0^{(1)}=\mu_1,\ \phi_1^{(1)}=\phi_1,\ u_t^{(1)}=u_t\end{aligned}$$

به‌همین ترتیب، می‌توان بقیه معادلات را با معادلهٔ (۲۴-۱۷) تطبیق دارد. به‌عنوان مثال برای معادله دوم، مقادیر $I_t^{(1)}=I_t^{(3)}=0$، $I_t^{(2)}=1$ و $p_j=p_2=3$ را به‌کار می‌بریم.

برآورد مدل TAR در Eviews فایل data29

فرض کنید که مقدار آستانه (r) و پارامتر انتقال (k) را داریم (روش تعیین این ضرایب در ادامه، ارائه شده است). حال مراحل زیر را برای برآورد مدل TAR انجام می‌دهیم (فرض کنید که $r=0$ و $k=1$ باشد):

۱- ابتدا متغیر مجازی D_{t-1} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D_{t-1}=\begin{cases}0 & Y_{t-1}\ge 0\\ 1 & Y_{t-1}>0\end{cases}$$

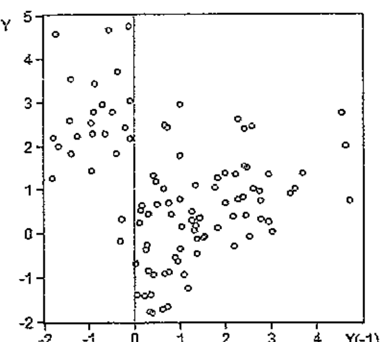
متغیر D_{t-1} را با D1 نشان داده و آن را با فرمان زیر محاسبه می‌کنیم:

```
genr D1=y(-1)>0
```

۲- مدل (۲۱-۱۷) را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

```
LS y=(c(1)+c(2)*y(-1))*(1-D1)+(c(3)+c(4)*y(-1))*D1
```

حال مراحل فوق را برای Y_t به‌کار می‌بریم. اما ابتدا نمودار مربوطه را رسم می‌کنیم که نشان می‌دهد به‌ازای $Y_{t-1}\le 0$ رابطه معناداری وجود ندارد اما به‌ازای $Y_{t-1}>0$ یک رابطهٔ کاملاً معنادار وجود دارد.



نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA29::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

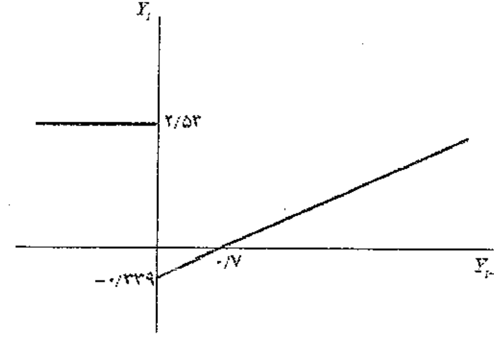
Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 10/12/14 Time: 19:11
Sample: 1301 1400
Included observations: 100
Y=(C(1)+C(2)*Y(-1))*(1-D1)+(C(3)+C(4)*Y(-1))*D1

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	2.534125	0.385626	6.571456	0.0000
C(2)	0.009237	0.378708	0.024391	0.9806
C(3)	-0.338684	0.206651	-1.638916	0.1045
C(4)	0.482887	0.107293	4.500637	0.0000

R-squared	0.496784	Mean dependent var	0.939151
Adjusted R-squared	0.481059	S.D. dependent var	1.473547
S.E. of regression	1.061508	Akaike info criterion	2.996436
Sum squared resid	108.1727	Schwarz criterion	3.100642
Log likelihood	-145.8218	Hannan-Quinn criter.	3.038810
Durbin-Watson stat	1.919305		

چون در وضعیت ۱، شیب معادله معنادار نیست لذا آن را حذف کرده و مجدداً معادله را تخمین می‌زنیم که تغییری در نتایج حاصل نمی‌شود. به هرحال برای وضعیت‌های ۱ و ۲ معادلات زیر راخواهیم داشت:

$$Y_t = ۲/۵۳۴ \qquad Y_{t-۱} \leq ۰$$
$$Y_t = -۰/۳۳۹ + ۰/۴۸۳ Y_{t-۱} \qquad Y_{t-۱} > ۰$$



تعیین مرتبه (طول وقفه) در مدل خودرگرسیون آستانه

همان‌طور که مدل (۲۴-۱۷) نشان می‌دهد، تعداد وقفه‌ها در وضعیت j برابر با p_j است. بنابراین در هر وضعیت، تعداد وقفه‌ها متفاوت است. برای تعیین طول وقفه‌ها در مدل TAR، یک روش ساده این است که فرض کنیم تعداد وقفه‌ها برای همه وضعیت‌ها یکسان است. سپس تعداد وقفه را به همان روشی که برای مدل AR(p) به‌کار می‌رود، انتخاب کنیم. هر چند که استفاده از این روش ساده است ولی نمی‌تواند مناسب باشد، زیرا طول وقفه برای همه وضعیت‌ها لزوماً یکسان نیست.

روش دیگر که مشروط به مقادیر آستانه است، تعداد وقفه‌ها را برای هر وضعیت به‌طور همزمان تعیین می‌کند. این روش که توسط فرانسیس و دیجک[1] (۲۰۰۰) به‌کار گرفته شده است در عمل بیانگر حالتی است که سیستم مورد نظر در یک وضعیت برای مدت طولانی‌تری در مقایسه با سایر وضعیت‌ها، مانده است. در چنین شرایطی، معیار اطلاعات نمی‌تواند عملکرد خوبی در انتخاب مدل برای وضعیت یا وضعیت‌هایی که تعداد مشاهدات مربوط به آنها اندک است داشته

1- Franses and Dijk

باشد. از آنجا که در چنین مواردی تعداد مشاهدات کم است، لذا همراه با افزودن ضرایب (وقفه‌ها)، کاهش اندکی در مجموع مربعات خطا به‌وجود می‌آید و مدل همواره به سمت وقفه‌های کمتر گرایش پیدا می‌کند. بنابراین یک راه این است که معیار اطلاعات را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که کل مدل را به خاطر وجود ضرایب اضافی در یک وضعیت، بدتر نکند. تانگ (۱۹۹۰) حالت تعدیل‌شده‌ای از معیار اطلاعات آکائیک (AIC) پیشنهاد می‌کند که در هر وضعیت، $\hat{\sigma}^۲$ را بر اساس تعداد مشاهدات آن وضعیت، وزن می‌دهد. به‌عنوان مثال اگر دو وضعیت ۱ و ۲ را داشته باشیم، معیار اطلاعات تعدیل شده عبارت است از:

$$AIC(p_۱, p_۲) = T_۱ Ln\ \hat{\sigma}_۱^۲ + T_۲ Ln\ \hat{\sigma}_۲^۲ + ۲(p_۱+۱) + ۲(p_۲+۱) \qquad (۱۷-۲۵)$$

$n_۱$ و $n_۲$ تعداد مشاهدات، $p_۱$ و $p_۲$ تعداد وقفه و $\hat{\sigma}_۱^۲$ و $\hat{\sigma}_۲^۲$ نیز واریانس باقیمانده‌ها در وضعیت‌های ۱ و ۲ هستند.

تعیین پارامتر تأخیر (k)

پارامتر تأخیر (k) به‌صورت‌های مختلفی تعیین می‌شود. می‌توان آن را صرفاً بر اساس معیار اطلاعات برای هر یک از وضعیت‌ها همراه با مرتبهٔ وقفه‌ها تعیین نمود، هر چندکه این روش موجب افزایش تعداد مدل‌های مورد تخمین می‌شود. به‌هرحال در بسیاری از کاربردها از مبنای تئوریک برای تعیین k استفاده می‌شود. به‌عنوان مثال معمولاً بحث می‌شود که در بازارهای مالی، بهتر است به‌جای استفاده از چند وقفه، از بیشترین وقفه‌های متغیر مورد نظر طی سال‌های اخیر استفاده شود.

در مدل‌های TAR، تغییر جهت وابسته به Y_{t-k} یا هر متغیر دیگری است. تا اینجا در اغلب موارد، برای سادگی فرض $k=۱$ را به‌کار بردیم و لذا انتقال مدل را بر اساس $Y_{t-۱}$ تعریف نمودیم. اما معلوم نیست که واقعاً انتقال بر اساس کدام وقفهٔ Y صورت می‌گیرد، لذا به‌همین دلیل لازم است که مقدار k را مشخص نماییم. یک روش نسبتاً ساده این است که مدل TAR را بر اساس مقادیر مختلف k برآورد نموده و RSSهای به‌دست آمده را مقایسه نماییم. هر مدلی که کمترین RSS را داشته باشد، بیانگر بهترین مقدار برای k خواهد بود.

تعیین ضریب تأخیر (k) در Eviews فایل data29

فرض کنید که مقدار آستانه برابر با صفر باشد. حال مدل مورد نظر را با استفاده از Eviews با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

```
LS    y=(c(1)+c(2)*y(-1))(1-(y(-k)>0))+(c(3)+c(4)*y(-1))*(y>0)   ;   k=1, 2, 3, ...
```

توجه شود که عبارت (Y(-k)>0) در Eviews معادل با متغیر مجازی است که به ازای $Y_{t-k}>0$ برابر با ۱ می‌باشد.

حال به k یک مقدار داده و معادله فوق را براورد کرده و RSS آن را حساب می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای $k=1$ عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA29::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 10/12/14 Time: 23:08
Sample: 1301 1400
Included observations: 100
Y=(C(1)+C(2)*Y(-1))*(1-(Y(-1)>0))+(C(3)+C(4)*Y(-1))*(Y(-1)>0)

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	2.534125	0.385626	6.571456	0.0000
C(2)	0.009237	0.378709	0.024391	0.9806
C(3)	-0.338684	0.206651	-1.638916	0.1045
C(4)	0.482887	0.107293	4.500637	0.0000

R-squared	0.496784	Mean dependent var	0.939151
Adjusted R-squared	0.481059	S.D. dependent var	1.473547
S.E. of regression	1.061508	Akaike info criterion	2.996436
Sum squared resid	108.1727	Schwarz criterion	3.100642
Log likelihood	-145.8218	Hannan-Quinn criter.	3.038610
Durbin-Watson stat	1.919305		

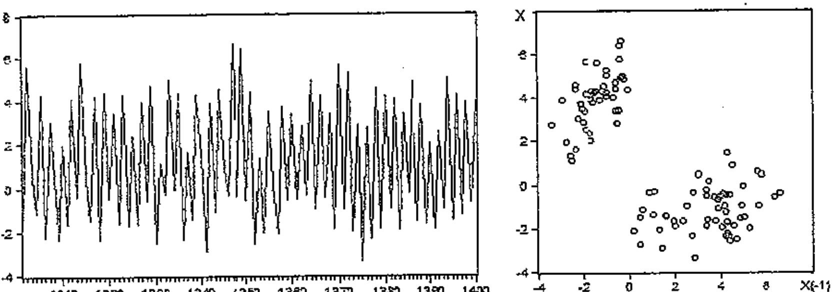
نتایج حاصله به‌ازای سایر مقادیر k عبارت است از:

k	۱	۲	۳	٤
RSS	۱۰۸/۱۷	۱۸۰/۹۵	۱۶۹/۰۲	۱۸٦/٤

بنابراین، مقدار ضریب تأخیر برابر با $k=1$ است، زیرا کمترین RSS را دارد.

تعیین مقدار آستانه (r)

اگر مقدار آستانه معلوم نباشد، بایستی مانند سایر ضرایب برآورد شود. به هر حال تعیین مقدار آستانه، کار ساده‌ای نیست. گاهی اوقات رسم نمودار می‌تواند به خوبی کمک نماید. به‌عنوان مثال نمودار (۹-۱۷) نشان می‌دهد که مقدار آستانه برابر با صفر است. زیرا در نمودار سمت راست، مدل AR(1) به‌ازای $Y_t>0$ و $Y_t\leq 0$ کاملاً متفاوت است. اما بدیهی است که در همه موارد، نمودارها نمی‌توانند کاملاً گویا باشند.



نمودار ۹-۱۷: تغییر جهت به‌ازای مقدار آستانهٔ صفر

یکی از روش‌های تعیین مقدار آستانه توسط چان (۱۹۹۳) ارائه شده است.[1] مراحل این روش به‌صورت زیر است:

۱- ابتدا سری زمانی مورد نظر را رسم کنید تا دامنهٔ تقریبی آن معلوم شود. زیرا مقدار آستانه بایستی برابر با عددی باشد که در دامنهٔ تغییرات متغیر موردنظر قرار داشته باشد.

۲- معمولاً ۱۵ درصد از بالاترین مقادیر و ۱۵ درصد از پایین‌ترین مقادیر را حذف می‌کنند. البته بسته به تعداد مشاهدات، می‌توان ۱۰ یا ۲۰ درصد را حذف نمود.

۳- با حذف ۳۰ درصد از مشاهدات، مقدار آستانه را بایستی در بین مشاهدات میانی (۷۰ درصد باقیمانده) پیدا کنیم. بدین منظور، مقدار آستانه را برابر با اولین مشاهدهٔ موجود در بین مشاهدات میانی در نظر گرفته و سپس معادله را تخمین می‌زنیم.

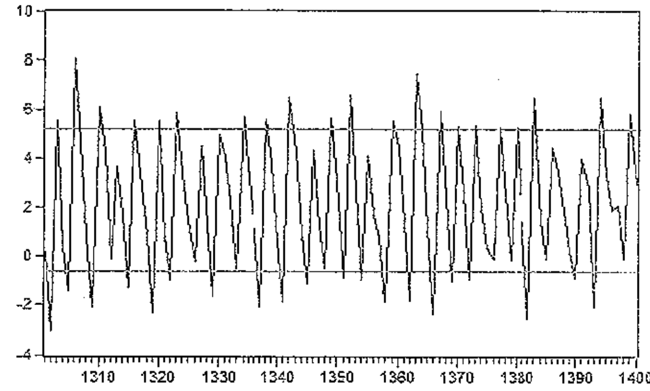
۴- مرحلهٔ ۳ را برای هر یک از مشاهدات میانی، انجام می‌دهیم و RSSهای هر یک از معادلات را حساب می‌کنیم. هر معادله‌ای که کمترین RSS را داشته باشد آن را انتخاب می‌کنیم و بدین ترتیب، بهترین مقدار آستانه به‌دست می‌آید.

بدیهی است که اگر تعداد مشاهدات برابر با ۱۰۰ باشد بایستی ۷۰ معادله (با توجه به ۷۰ مشاهده میانی که هر یک می‌تواند یک مقدار برای آستانه باشد) تخمین بزنیم. اما در عمل چنین نیست، زیرا بسیاری از مقادیر میانی نزدیک به هم هستند و با آزمون چند مقدار محدود، می‌توان مقدار آستانه را تعیین نمود.

۱- اندرس، ترجمه صادقی و شوال‌پور، ۱۳۸۶، ص ۳۴۳.

تعیین مقدار آستانه در Eviews فایل data29

متغیر Z_t را در نظر بگیرید که در نمودار زیر ترسیم شده است:



حدود ۲۰ درصد از مشاهدات مقدارشان بیش از ۵/۲۵ و حدود ۲۰ درصد نیز مقدارشان کمتر از ۰/۸- است و لذا ۶۰ درصد باقیمانده را که مشاهدات میانی می‌نامیم بین ۰/۸- و ۵/۲۵ قرار دارند. مقادیر Z_t را در دورهٔ ۱۴۰۰-۱۳۰۰ داریم که برخی از مقادیر آن عبارتند از:

1300	1.000000
1301	0.181421
1302	-3.028013
1303	5.512108
1304	0.385433
1305	-1.389086
1306	8.039164
1307	4.644033
1308	0.865511
1309	-2.069816
1310	6.121802
1311	4.243283
1312	-0.116327
1313	3.643003
1314	1.711023
1315	-1.317384
1316	5.525615
1317	3.387815
1318	0.864264
1319	-2.294604
1320	5.525314
1321	0.807936
1322	-0.981533

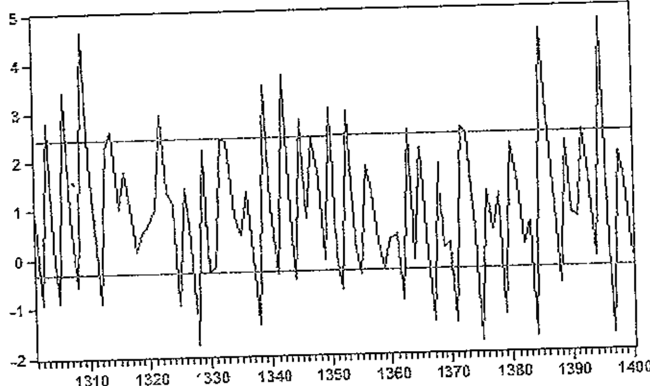
مشاهدات میانی

در بین مشاهدات میانی، اولین مقدار برابر با ۰/۱۸۱ است که آن را به‌عنوان مقدار آستانه درنظر گرفته و معادله را فرمان زیر تخمین می‌زنیم:

LS z=(z(1)+c(2)*z(-1))(1-(z(-1)>0.181))+(c(3)+c(4)*z(-1))*(z>0.181)

با تخمین معادله، مقدار RSS برابر با ۱٦۲/۵۲ به‌دست می‌آید. مقدار بعدی برابر با ۰/۳۸۵ است که منجر به RSS=۲٤۱ می‌شود. سایر مشاهدات میانی که با این مقادیر، تفاوت قابل توجهی دارند شامل ۰/۱ و ۰/۰۸- است که متناسب با آنها RSS برابر با ۱۰۳/٤ می‌باشد. همچنین به‌ازای $Z_{t-1}=\cdot$ نیز RSS برابر با ۱۰۳/٤ می‌باشد. بنابراین، مقدار آستانه را برابر با صفر در نظر می‌گیریم.

به‌عنوان مثال دیگر، متغیر Y_t را درنظر بگیرید:



حد بالا و پایین به ترتیب ۲/۳ و ۰/۲۹- است و لذا ٦۰ درصد از مشاهدات میانی بین این دو حد، قرار دارند. برای برخی از مقادیر آستانه، RSS عبارت است از:

مقدار آستانه	۰/۷۷	۰/۹-	۰/۳	۰/۵-	۰/۱۵	۰/۲-	۰/۰٦	۰/۰۷-	۰/۰۳	۰
RSS	۱٤۳/۷	۱۸۸/۳	۱۳٦/٦	۱۵٤/۹	۱۲۸/٦	۱٤۱/۸	۲/۱۱۷	۱۰۸/۲	۱۰۸/۲	۱۰۸/۲

بنابراین، مقدار آستانه برابر با صفر می‌باشد، زیرا کمترین RSS را دارد.

٦-۱۷ مدل خودرگرسیون تغییر ملایم (STAR)[1]

در بخش قبلی، مدل‌های خودرگرسیون آستانه معرفی شدند دیدیم که وقتی مقدار متغیر مورد نظر از مقدار آستانه عبور می‌کند، تغییر وضعیت رخ می‌دهد. این نوع از مدل‌ها را به شکل معادلات (۱۸-۱۷)، (۱۹-۱۷) و (۲٤-۱۷) معرفی نمودیم. همچنین معادله (۲۱-۱۷) ترکیب دو وضعیت را در قالب یک معادله نشان می‌دهد. تابع انتقال D_{t-k} مقدار صفر و یک را اختیار می‌کند که انتقال از یک وضعیت به وضعیت دیگر را نشان می‌دهد. دیدیم که در این مدل‌ها، تغییر وضعیت‌های به‌صورت ناگهانی است. بدیهی است که به‌جای تابع انتقال D_{t-k} می‌توان هر تابع

1- smooth transition AR

انتقال دیگری را که مقدار آن بین صفر و یک باشد استفاده نمود. می‌توان تابعی را تعریف نمود که به‌جای تغییر دفعی، بیانگر تغییر تدریجی و آرام باشد. بدین صورت که با افزایش Y_{t-k} و عبور از مقدار آستانهٔ r، تغییر وضعیت و به‌دنبال آن، تغییر ضرایب نیز به آرامی رخ می‌دهد. این تابع انتقال را با G_{t-k} نشان داده و بر اساس آن، مدل خودرگرسیون با تغییرات ملایم (STAR) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t=(\mu_1+\phi_1 Y_{t-1})(1-G_{t-k})+(\mu_2+\phi_2 Y_{t-1})G_{t-k}+u_t \qquad (17\text{-}26)$$

تابع انتقال G_{t-1} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که معروف به تابع لاجستیک[1] است:

$$G_{t-k}=G(\gamma,r,Y_{t-k})=\frac{1}{1+e^{-\gamma(Y_{t-k}-r)}} \qquad (17\text{-}27)$$

معادلات فوق به‌ازای $k=1$ عبارتند از:

$$Y_t=(\mu_1+\phi_1 Y_{t-1})(1-G_{t-1})+(\mu_2+\phi_2 Y_{t-1})G_{t-1}+u_t$$
$$G_{t-1}=G(\gamma,r,Y_{t-1})=\frac{1}{1+e^{-\gamma(Y_{t-1}-r)}} \qquad (17\text{-}28)$$

مقدار تابع انتقال بستگی به دو ضریب r و γ دارد. r مقدار آستانه است که روش تعیین آن را در ادامه، بررسی خواهیم کرد. اما مقدار ضریب γ نقش تعیین‌کننده‌ای در شکل تابع انتقال دارد. به‌عنوان مثال اگر $\gamma=0$ باشد، آنگاه $G_{t-1}=\frac{1}{2}$ خواهد بود و لذا مدل (۱۷-۲۸) تبدیل به یک مدل خطی می‌شود:

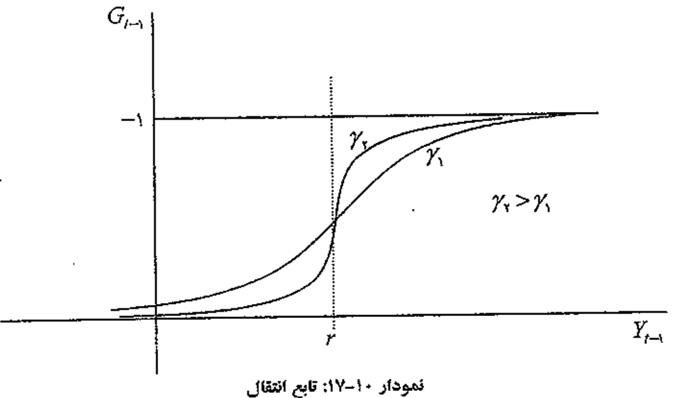
$$Y_t=(\mu_1+\phi_1 Y_{t-1})(1-\tfrac{1}{2})+(\mu_2+\phi_2 Y_{t-1})\tfrac{1}{2}+u_t$$
$$=\mu+\phi Y_{t-1}+u_t \;;\; \mu=\frac{\mu_1+\mu_2}{2} \;,\; \phi=\frac{\phi_1+\phi_2}{2} \qquad (17\text{-}29)$$

اگر $\gamma=\infty$ باشد، آنگاه تابع انتقال دقیقاً مشابه D_{t-1} خواهد شد:

$$\gamma=\infty \;\Rightarrow\; G_{t-1}=\begin{cases}0 &, Y_{t-1}\le r\\ 1 &, Y_{t-1}>r\end{cases}$$

اگر $0<\gamma<\infty$ باشد، آنگاه با افزایش Y_{t-1}، مقدار تابع انتقال افزایش خواهد یافت. در این صورت با کاهش Y_{t-1}، مقدار تابع انتقال به‌سمت صفر و با افزایش Y_{t-1}، به‌سمت ۱ میل خواهد کرد.

1- logistic



نمودار ۱۰-۱۷: تابع انتقال

نمودار فوق نشان می‌دهد که با افزایش Y_{t-1} تابع انتقال به آرامی از صفر به سمت یک میل می‌کند.

حال مدل (۱۷-۲۸) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t=\mu_{s_t}+\phi_{s_t}Y_{t-1}+u_t \quad ; \quad s_t=1,2$$
$$\mu_{s_t}=\mu_1(1-G_{t-1})+\mu_2 G_{t-1}=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)G_{t-1} \qquad (17\text{-}30)$$
$$\phi_{s_t}=\phi_1(1-G_{t-1})+\phi_2 G_{t-1}=\phi_1+(\phi_2-\phi_1)G_{t-1}$$

روابط فوق نشان می‌دهد که افزایش Y_{t-1} موجب افزایش G_{t-1} از صفر به سمت ۱ می‌شود. این امر موجب می‌شود تا ضرایب از مقدار اولیه خود در وضعیت ۱ (یعنی μ_1 و ϕ_1) به سمت مقدار خود در وضعیت ۲ (یعنی μ_2 و ϕ_2) به آرامی حرکت کنند.

مثال ۵-۱۷: فرض کنید که Y_t از دو فرایند AR(1) به‌صورت زیر، تبعیت می‌کند:

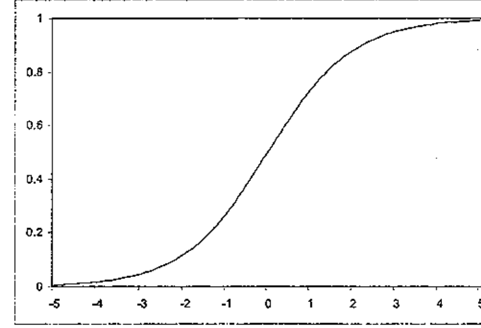
$$Y_t=3+0/2Y_{t-1} \;,\; Y_{t-1}\le 0$$
$$Y_t=-1+0/8Y_{t-1} \;,\; Y_{t-1}>0$$

بر اساس تابع انتقال G_{t-1}، معادلات فوق را ترکیب کرده و مدل زیر را می‌نویسیم:

$$Y_t=(3+0/2Y_{t-1})(1-G_{t-1})+(-1+0/8Y_{t-1})G_{t-1}$$

فرض کنید که تابع انتقال به‌صورت زیر باشد (با فرض $r=0$ و $\gamma=1$):

$$G_{t-1}=\frac{1}{1+e^{-Y_{t-1}}}$$



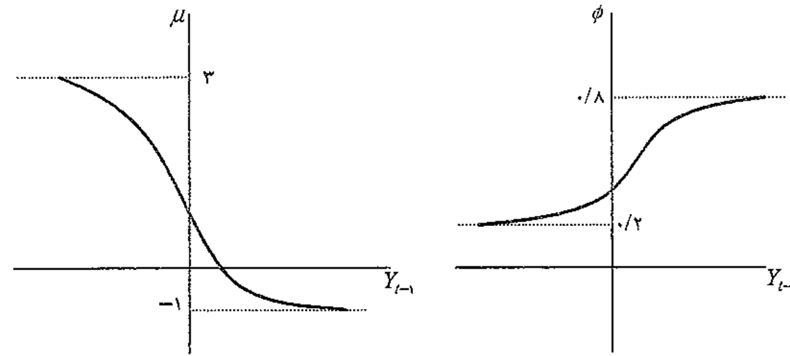
تابع انتقال (با فرض $r=۰$ و $\gamma=-۱$)

برخی از مقادیر تابع انتقال عبارتند از:

Y_{t-1}	$-\infty$ ...	-۳	-۲	-۱	$-۰/۵$	۰	۰/۵	۱	۲	۳ ...	$+\infty$
G_{t-1}	۰	۰/۰۵	۰/۱۲	۰/۲۷	۰/۳۸	۰/۵	۰/۶۲	۰/۷۳	۰/۸۸	۰/۹۵	۱

حال ضرایب را به‌ازای مقادیر مختلف تابع انتقال حساب می‌کنیم:

Y_{t-1}	$-\infty$ ...	-۳	-۲	-۱	$-۰/۵$	۰	۰/۵	۱	۲	۳ ...	$+\infty$
μ_{s_t}	۳	۲/۸۱	۲/۵۲	۱/۹۲	۱/۴۹	۱	۰/۵۱	۰/۰۷	$-۰/۵۲$	$-۰/۸۱$	-۱
ϕ_{s_t}	۰/۲	۰/۲۳	۰/۲۷	۰/۳۶	۰/۴۳	۰/۵	۰/۵۷	۰/۶۴	۰/۷۳	۰/۷۷	۰/۸



تغییر تدریجی ضرایب

برآورد مدل STAR در Eviews

فایل data29

برآورد مدل STAR مشابه برآورد مدل TAR است، با این تفاوت که در اینجا ابتدا بایستی تابع G_{t-1} را مشخص نماییم. مقدار این تابع وابسته به ضریب γ است که می‌توان آن را با آزمون و خطا تعیین نمود. از آنجا که $\gamma>۰$ است می‌توان آن را با چند آزمون و خطای محدود، به‌دست آورد. البته مانند مدل‌های TAR لازم است که مقدار r و k را از قبل داشته باشیم. در اینجا با فرض این که $r=۰$ و $k=۱$ باشد، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا برای ضریب γ یک مقدار را در نظر گرفته و سپس مقدار G_{t-1} را با فرمان زیر حساب می‌کنیم:

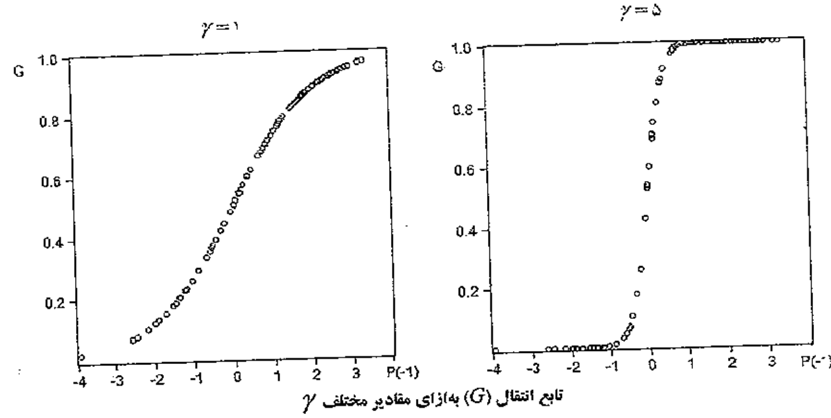
```
genr G=1/(1+exp(-γ*y(-1)))
```

۲- با داشتن مقدار G، معادله (۲۸-۱۷) را با فرمان زیر برآورد می‌کنیم:

```
LS y=(c(1)+c(2)*y(-1))*(1-G)+(c(3)+c(4)*y(-1))*G
```

۳- به‌ازای مقادیر مختلف γ، مدل فوق را برآورد کرده و مدلی که کمترین RSS را داشته باشد، انتخاب می‌کنیم.

مراحل فوق را برای متغیر P_t به‌کار می‌بریم. بدین منظور فرض کنید که مقدار آستانه را برابر با $r=۰$ و ضریب انتقال را برابر با $k=۱$ باشد. به‌ازای مقادیر مختلف γ تابع انتقال را حساب می‌کنیم. بدین منظور، به‌ازای مقادیر $\gamma=۱$ و $\gamma=۵$ مقدار تابع G ترسیم شده است. نمودارهای زیر نشان می‌دهد که به‌ازای مقادیر بزرگتر از ۵ مقدار تابع انتقال شبیه به مدل TAR می‌باشد و این نشان می‌دهد که تابع انتقال به‌ازای مقادی بزرگتر از ۵ تقریباً یکسان می‌باشند و نیازی به آزمون سایر اعدادی که بزرگتر از ۵ هستند نیست.



تابع انتقال (G) به‌ازای مقادیر مختلف γ

به‌عنوان مثال اگر $\gamma=۱$ باشد، نتایج تخمین مدل عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA29::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: P
Method: Least Squares
Date: 10/12/14 Time: 16:08
Sample: 1301 1400
Included observations: 100
P=(C(1)+C(2)*P(-1))*(1-G)+(C(3)+C(4)*P(-1))*G

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.957865	1.698573	-0.563917	0.5741
C(2)	-1.034409	0.664706	-1.556191	0.1230
C(3)	2.092779	1.580153	1.324416	0.1885
C(4)	-0.292880	0.574482	-0.509815	0.6114

R-squared	0.042719	Mean dependent var	0.883254
Adjusted R-squared	0.012804	S.D. dependent var	1.499511
S.E. of regression	1.489880	Akaike info criterion	3.674447
Sum squared resid	213.0954	Schwarz criterion	3.778654
Log likelihood	-179.7223	Hannan-Quinn criter.	3.716621
Durbin-Watson stat	2.002160		

مقدار RSS برابر با ۲۱۳/۰۹۵ می‌باشد. مشابه این را برای مقادیر مختلف γ انجام داده و RSSها را حساب می‌کنیم. جدول زیر این نتایج را نشان می‌دهد:

γ	۱	۲	۳	٤	٥
RSS	۲۱۳/۰۹	۲۱۲/۳٦	۲۱۱/۹٥	۲۱۱/۹٤	۲۱۲/۰۲

نتایج فوق نشان می‌دهد که به‌ازای $\gamma=۴$ کمترین RSS به‌دست آمده است. حال مقادیری که کمی بزرگتر و کوچکتر از ٤ هستند را بررسی می‌کنیم. نتایج نشان می‌دهد که با ازای $\gamma=۴/۱$ مقدار RSS بزرگتر می‌شود، اما به‌ازای مقادیر کوچکتر از ٤ اندکی کاهش می‌یابد که کمترین آن در $\gamma=۳/۵$ می‌باشد که مقدار RSS برابر با ۲۱۱/۹۲۳ خواهد بود. بدین ترتیب برآورد نهایی عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA29::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: P
Method: Least Squares
Date: 10/12/14 Time: 16:20
Sample: 1301 1400
Included observations: 100
P=(C(1)+C(2)*P(-1))*(1-G)+(C(3)+C(4)*P(-1))*G

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.038970	0.623155	-0.062537	0.9503
C(2)	-0.738486	0.371818	-1.986148	0.0499
C(3)	0.867782	0.477306	1.818083	0.0722
C(4)	0.040280	0.249591	0.161383	0.8721

R-squared	0.047986	Mean dependent var	0.883254
Adjusted R-squared	0.018235	S.D. dependent var	1.499511
S.E. of regression	1.485777	Akaike info criterion	3.668930
Sum squared resid	211.9231	Schwarz criterion	3.773137
Log likelihood	-179.4465	Hannan-Quinn criter.	3.711105
Durbin-Watson stat	1.995414		

چون عرض از مبدا در وضعیت ۱ و شیب در وضعیت ۲ معنادار نیستند، لذا این دو را حذف کرده و معادله را مجدداً تخمین می‌زنیم:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA29::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: P
Method: Least Squares
Date: 10/12/14 Time: 17:58
Sample: 1301 1400
Included observations: 100
P=(C(2)*P(-1))*(1-G)+(C(3))*G

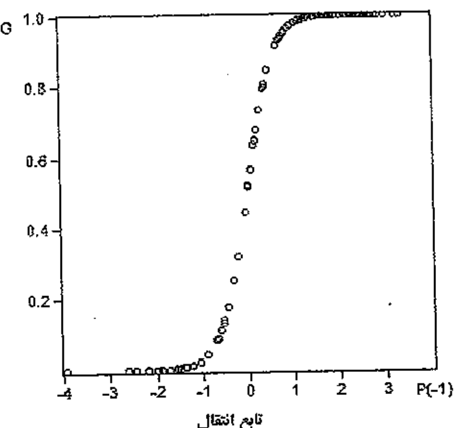
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(2)	-0.718515	0.193564	-3.712025	0.0003
C(3)	0.932915	0.177750	5.248463	0.0000

R-squared	0.047524	Mean dependent var	0.883254
Adjusted R-squared	0.037805	S.D. dependent var	1.499511
S.E. of regression	1.470894	Akaike info criterion	3.629415
Sum squared resid	212.0258	Schwarz criterion	3.681518
Log likelihood	-179.4707	Hannan-Quinn criter.	3.650502
Durbin-Watson stat	1.970430		

نتایج فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$P_t=\mu_{s_t}+\phi_{s_t}P_{t-1}$$

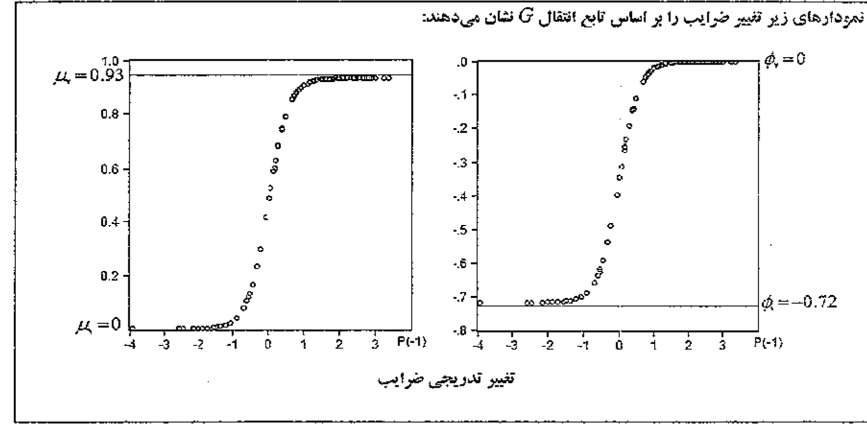
با توجه به $\gamma=۳/۵$ تابع انتقال به‌صورت زیر است:



مقدار پارامترها از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\mu_{s_t}=\mu_1(1-G)+\mu_2G=0(1-G)+0/9329G=0/9329G$$

$$\phi_{s_t}=\phi_1(1-G)+\phi_2G=-0/7185(1-G)+0G=-0/7185+0/7185G$$



۱۷-۷ مدل‌های تغییر جهت مارکف

مدل مارکف یکی از مدل‌های مربوط به تغییر جهت متغیرها است. در اینجا بر اساس مطالعه هامیلتون (۱۹۸۹ و ۱۹۹۰) و همچنین مدل خودرگرسیون تانگ (۱۹۸۳ و ۱۹۹۰) به بررسی مدل مارکف می‌پردازیم. ابتدا اصول مدل‌های مارکف را بررسی کرده و سپس به مدل خودرگرسیون با تغییر جهت مارکف می‌پردازیم. در پایان نیز به کاربردی از مدل مارکف اشاره خواهیم کرد.

۱۷-۷-۱ مبانی مدل‌های تغییر جهت مارکف

در روش مارکف، وقایع به m واقعه تقسیم می‌شوند که s_i واقعهٔ iام و $i=1,2,...,m$ می‌باشد. در اینجا هر واقعه می‌تواند بیانگر یک تغییر باشد. همچنین توجه شود که s_i می‌تواند واقعه‌ای باشد که در زمان i رخ داده است و منجر به تغییر متغیر مورد نظر (مثلاً Y_t) در زمان t می‌شود. به‌عبارت دیگر فرض می‌شود که Y_t همراه با متغیر غیرقابل مشاهدهٔ s_i تغییر جهت می‌دهد. s_i نیز متغیری است که اعداد ۱، ۲ و... را اختیار می‌کند. برای سادگی فرض کنید که $m=2$ واقعه داریم. لذا $s_t=1$ بدین معنی است که در زمان t واقعهٔ ۱ رخ داده است و $s_t=2$ بدین معنی است که در زمان t واقعهٔ ۲ رخ داده است. تغییرات Y که بین این دو واقعه رخ می‌دهد توسط فرآیند مارکف بیان می‌شود. خصوصیت فرآیند مارکف عبارت است از:

$$P(Y_t|Y_1,Y_2,...,Y_{t-1})=P(Y_t|Y_{t-1}) \qquad (17\text{-}31)$$

معادله فوق بیان می‌کند که توزیع احتمال Y در هر زمانی مانند t، فقط بستگی به وضعیت آن در زمان $t-1$ دارد. لذا در فرآیندهای مارکف، وابستگیِ مسیر برای متغیرها قابل تصور نمی‌باشد. مزیت این مدل در انعطاف‌پذیری آن است که امکان در نظر گرفتن تغییرات واریانس بین فرآیندها را همراه با تغییر در میانگین فراهم می‌سازد.

یکی از اَشکال مدل هامیلتون که موسوم به فیلتر هامیلتون می‌باشد، متغیر وضعیت مشاهده نشدهٔ ε_t را تعریف می‌کند که طبق فرآیند مرتبهٔ اول مارکف شکل می‌گیرد:

$$\begin{aligned}
&P(\varepsilon_t=1|\varepsilon_{t-1}=1)=p_{11} \\
&P(\varepsilon_t=2|\varepsilon_{t-1}=1)=1-p_{11}=p_{12} \\
&P(\varepsilon_t=2|\varepsilon_{t-1}=2)=p_{22} \\
&P(\varepsilon_t=1|\varepsilon_{t-1}=2)=1-p_{22}=p_{21}
\end{aligned} \qquad (17\text{-}32)$$

که p_{11} و p_{22} بیانگر احتمال عدم‌تغییر وضعیت می‌باشند. برای سادگی فرض بر این است که فقط دو وضعیت اقتصادی وجود دارد که شامل ۱ و ۲ (مثلاً دورهٔ رونق و رکود) می‌باشد. لذا p_{11} احتمال این است که در دوره t وضعیت ۱ برقرار باشد، به شرطی که در دوره قبلی $(t-1)$ نیز وضعیت ۱ برقرار بوده است. p_{22} نیز همین احتمال را برای حالتی نشان می‌دهد که در دوره t در وضعیت ۲ برقرار باشد، به شرطی که در دوره $t-1$ نیز در وضعیت ۲ برقرار بوده است. از طرف دیگر $1-p_{11}$ احتمال این است که Y_t از وضعیت ۱ در دوره قبلی $(t-1)$ به وضعیت ۲ در دوره فعلی (t) تغییر جهت دهد. همچنین $1-p_{22}$ عبارت است از احتمال اینکه Y_t از وضعیت ۲ در دوره قبلی $(t-1)$ به وضعیت ۱ در دوره فعلی (t) تغییر جهت دهد. بنابراین به‌طور خلاصه p_{11} و p_{22} احتمال ثبات وضعیت Y_t و $1-p_{11}$ و $1-p_{22}$ احتمال تغییر وضعیت Y در بین این دو دوره می‌باشد.

حال ماتریس احتمال $\mathbf{P}$ را تعریف می‌کنیم که اصطلاحاً به آن ماتریس انتقال[1] گفته می‌شود.

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \qquad (17\text{-}32)$$

عناصر روی قطر اصلی بیانگر عدم تغییر وضعیت هستند، ولی سایر عناصر تغییر وضعیت را نشان می‌دهند. به‌عنوان مثال p_{12} نشان‌دهنده احتمال تغییر وضعیت از ۱ به ۲ است و یا در حالت

1- transition matrix

کلی p_{ij} احتمال تغییر وضعیت از i به j را نشان می‌دهد. به طور کلی اگر $i = j$ باشد، ثبات وضعیت و اگر $i \neq j$ باشد، تغییر وضعیت را نشان می‌دهد.

حال ε_t را به‌صورت یک بردار ستونی تصادفی تعریف می‌کنیم که عنصر jام آن برابر با ۱ است، اگر $s_t = j$ باشد و در غیر این صورت برابر با صفر است. در مثال سادهٔ فوق که فقط دو وضعیت داریم، ε_t عبارت است از:

$$\varepsilon_t = \begin{cases} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} & s_t = ۱ \\ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} & s_t = ۲ \end{cases} \qquad (۱۷-۳۴)$$

اگر وضعیت فعلی معادل با i باشد (یعنی $s_t = i$)، سپس عنصر jام ε_{t+1} یک متغیر تصادفی است که با احتمال p_{ij} مقدار ۱ و در غیر این صورت مقدار صفر را اختیار می‌کند. بنابراین، امید ریاضی ε_{t+1} با معلوم بودن وضعیت فعلی، برابر است با:

$$E(\varepsilon_{t+1} \mid s_t = i) = \begin{bmatrix} p_{i۱} \\ p_{i۲} \end{bmatrix} \qquad i = ۱, ۲ \qquad (۱۷-۳۵)$$

که برابر با ستون iام ماتریس $\mathbf{P}'$ می‌باشد.

همچنین وقتی که $s_t = i$ باشد، بردار ε_t دقیقاً با ستون iام ماتریس واحد (در حالت کلی $\mathbf{I}_m$ و در این مثال $\mathbf{I}_۲$) یکسان است و لذا در این حالت بردار $\begin{bmatrix} p_{i۱} \\ p_{i۲} \end{bmatrix}$ برابر با $\mathbf{P}'\varepsilon_t$ می‌باشد. به‌عنوان مثال اگر $s_t = ۱$ باشد، در این صورت $\varepsilon_t = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ است که با ستون اول ماتریس $\mathbf{I}_۲$ یکسان است و حاصل ضرب $\mathbf{P}'\varepsilon_t$ برابر است با:

$$s_t = ۱ \Rightarrow \mathbf{P}'\varepsilon_t = \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۲۱} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{۱۱} \\ p_{۱۲} \end{bmatrix} = E(\varepsilon_{t+1} \mid s_t = ۱) \qquad (۱۷-۳۶)$$

و اگر $s_t = ۲$ باشد، در این صورت $\varepsilon_t = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ است که با ستون دوم ماتریس $\mathbf{I}_۲$ یکسان است. حاصل‌ضرب $\mathbf{P}'\varepsilon_t$ برابر است با:

$$s_t = ۲ \Rightarrow \mathbf{P}'\varepsilon_t = \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۲۱} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{۲۱} \\ p_{۲۲} \end{bmatrix} = E(\varepsilon_{t+1} \mid s_t = ۲) \qquad (۱۷-۳۷)$$

بدین ترتیب می‌توان امید ریاضی ε_{t+1} را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$E(\varepsilon_{t+1} \mid s_t = i) = E(\varepsilon_{t+1} \mid \varepsilon_t) = \mathbf{P}'\varepsilon_t \qquad (۱۷-۳۸)$$

با توجه به (۱۷-۳۸)، ε_{t+1} را می‌توان توسط معادله زیر توصیف نمود:

$$\varepsilon_{t+1} = E(\varepsilon_{t+1} \mid s_t = i) + \mathbf{v}_{t+1} = \mathbf{P}'\varepsilon_t + \mathbf{v}_{t+1} \qquad (۱۷-۳۹)$$

بدیهی است که اگر با فرض $s_t = i$ از (۱۷-۳۹) امید ریاضی را حساب کنیم، معادله (۱۷-۳۸) به‌دست می‌آید. همچنین معادله (۱۷-۳۹) را می‌توان برای ε_t به‌صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_t = E(\varepsilon_t \mid s_{t-1} = i) + \mathbf{v}_t = \mathbf{P}'\varepsilon_{t-1} + \mathbf{v}_t \qquad (۱۷-۴۰)$$

در حالت کلی که m وضعیت داریم، ماتریس $\mathbf{P}$ و بردار ε_t عبارتند از:

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} p_{۱۱} & p_{۲۱} & \cdots & p_{m۱} \\ p_{۱۲} & p_{۲۲} & \cdots & p_{m۲} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{۱m} & p_{۲m} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_t = \begin{cases} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix} & s_t = ۱ \\ \vdots & \\ \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix} & s_t = m \end{cases} \qquad (۱۷-۴۱)$$

بدین ترتیب امید ریاضی ε_{t+1} عبارت است از:

$$E(\varepsilon_{t+1} \mid s_t = i) = \begin{bmatrix} p_{i۱} \\ p_{i۲} \\ \vdots \\ p_{im} \end{bmatrix} = E(\varepsilon_{t+1} \mid \varepsilon_t) = \mathbf{P}'\varepsilon_t \qquad (۱۷-۴۲)$$

و معادله زیر را که موسوم به زنجیره مارکف است برای ε_{t+1} می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} = \mathbf{P}'\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{v}_{t+1} \qquad (۱۷-۴۳)$$

و برای $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{P}'\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \mathbf{v}_t \qquad (۱۷-۴۴)$$

در حالتی که دو وضعیت داریم، بردار $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ به‌صورت $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ یا $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ است، لذا اگر z_t عنصر اول آن را نشان دهد، عنصر دوم برابر با $1-z_t$ خواهد بود. بنابراین، معادلهٔ (۱۷-۴۶) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} z_t \\ 1-z_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{t-1} \\ 1-z_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_{1t} \\ \nu_{2t} \end{bmatrix} \qquad (۱۷-۴۵)$$

سطر اول (۱۷-۴۴) عبارت است از:

$$z_t = p_{11}z_{t-1} + p_{21}(1-z_{t-1}) + \nu_{1t} \qquad (۱۷-۴۶)$$

با توجه به اینکه $p_{21} + p_{22} = 1$ است، لذا با جایگذاری به‌جای p_{21}، (۱۷-۴۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$z_t = (1-p_{22}) + \rho z_{t-1} + \nu_{1t} \qquad (۱۷-۴۷)$$

که $\rho = p_{11} + p_{22} - 1$ است. بنابراین z_t توسط فرایند AR(1) توصیف شده است که طبق آن، مقدار متغیر مجازی z_t وابسته به مقدار آن در دوره قبل می‌باشد. در واقع z_t نقش یک متغیر مجازی را ایفا می‌کند که انتقال در داده‌ها را نشان می‌دهد. بدین ترتیب در مدل مارکف می‌توان انتقال‌های متعددی را در رفتار متغیر مورد نظر مشاهده نمود. به‌عنوان مثال می‌توان بازدهی یک دارایی را به‌صورت زیر نشان داد:

$$Y_t = \alpha + \beta z_t + \sqrt{\sigma_1^2 + \phi z_t}\; u_t \;\; ; \;\; u_t \sim N(0,1) \qquad (۱۷-۴۸)$$

توجه شود که وقتی از وضعیت ۱ در دوره $t-1$ (وضعیت قبلی که آن را با $s_{t-1}=1$ نشان می‌دهیم) به وضعیت ۱ در دوره t برسیم، بدین معنی است که تغییر وضعیت رخ نداده است و لذا $z_t = 0$ است. اما اگر از وضعیت ۱ در دوره $t-1$ به وضعیت ۲ در دوره t برسیم، بدین معنی است که تغییر وضعیت رخ داده است و لذا $z_t = 1$ است. بنابراین میانگین انتظاری و واریانس انتظاری Y در وضعیت ۱ به‌ترتیب برابر با α و σ_1^2، و در وضعیت ۲ برابر با $(\alpha+\beta)$ و $\sigma_1^2 + \phi$

می‌باشد. برای سادگی $\sigma_1^2 + \phi$ را با σ_2^2 نشان می‌دهیم. در اینجا پارامترهای مجهول عبارتند از α، β، σ_1^2، σ_2^2، p_{11} و p_{22} که بایستی با روش حداکثر درستنمایی برآورد شوند.

اگر یک متغیر از فرآیند مارکف تبعیت کند، تمام آنچه که برای پیش‌بینی آن نیاز داریم این است که احتمال آنکه طی دوره بعدی در وضعیت مورد نظر قرار بگیرد چقدر است. این احتمال برابر با احتمال دوره فعلی و مجموعه‌ای از احتمال انتقال‌ها است (در حالتی که فقط دو وضعیت داشته باشیم، توسط (۱۷-۳۲) داده می‌شود). در حالت عمومی که m وضعیت وجود دارد، احتمال انتقال توسط ماتریس $\mathbf{P}$ نشان داده می‌شود که در آن p_{ij} احتمال انتقال از وضعیت i به وضعیت j است. از آنجا که در هر زمان معین، این متغیر بایستی در یکی از m وضعیت قرار داشته باشد، لذا برای هر i شرط زیر برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1 \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m \qquad (۱۷-۴۹)$$

شرط فوق بدان معنا است که اگر قبلاً در وضعیت i باشیم در دورهٔ بعد قطعاً در یکی از وضعیت‌های ۱ تا m خواهیم بود. توجه شود که $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ برابر با جمع ستون iام ماتریس $\mathbf{P}$ است.

برای بررسی دقیق‌تر این بحث، (۱۷-۴۴) را با جایگذاری‌های تکراری به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n} = \mathbf{P}'^{n}\boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{P}'^{n-1}\mathbf{v}_{t+1} + \mathbf{P}'^{n-2}\mathbf{v}_{t+2} + \cdots + \mathbf{P}'\mathbf{v}_{t+n-1} + \mathbf{v}_{t+n} \qquad (۱۷-۵۰)$$

$\mathbf{P}^n$ بیانگر توان nام ماتریس $\mathbf{P}$ است. طبق (۱۷-۵۰) مقدار پیش‌بینی برای n دورهٔ بعد، عبارت است از:

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}, \ldots) = \mathbf{P}'^{n}\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۱۷-۵۱)$$

مجدداً توجه شود که اگر $s_{t+n} = j$ باشد، در این صورت عنصر jام بردار $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n}$ برابر واحد و در غیر این‌صورت برابر با صفر است. بنابراین، عنصر jام بردار $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n} \mid \boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}, \ldots)$ بیانگر احتمال این است که s_{t+n} برابر با j باشد به شرطی که وضعیت فعلی سیستم (یعنی s_t) برابر با i باشد:

$$\begin{bmatrix} P(s_{t+n} = 1 \mid s_t = i) \\ P(s_{t+n} = 2 \mid s_t = i) \\ \vdots \\ P(s_{t+n} = m \mid s_t = i) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'^{n}\mathbf{e}_i \qquad (۱۷-۵۲)$$

$\mathbf{P}'^n\mathbf{e}_i$ معادل با ستون iام ماتریس $\mathbf{P}'^n$ و $\mathbf{e}_i$ نیز بیانگر ستون iام ماتریس $\mathbf{I}_m$ است. بنابراین، رابطه (۱۷-۵۲) نشان می‌دهد احتمال تغییر وضعیت در n دورهٔ بعد، از وضعیت i به j برابر با $P(s_{t+n}=j|s_t=i)$ است که معادل با عنصر مربوط به سطر j و ستون i از ماتریس $\mathbf{P}'^n$ می‌باشد.

$$s_t=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} P(s_{t+n}=1|s_t=1) \\ P(s_{t+n}=2|s_t=1) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'^n\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۳)$$

$$s_t=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} P(s_{t+n}=1|s_t=2) \\ P(s_{t+n}=2|s_t=2) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'^n\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۴)$$

به‌عنوان مثال احتمال‌های مربوط به پیش‌بینی تغییر وضعیت برای دورهٔ بعدی عبارتند از:

$$s_t=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} P(s_{t+1}=1|s_t=1) \\ P(s_{t+1}=2|s_t=1) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ 1-p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۵)$$

$$s_t=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} P(s_{t+1}=1|s_t=2) \\ P(s_{t+1}=2|s_t=2) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p_{22} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۶)$$

اما پیش‌بینی تغییر وضعیت برای دو دورهٔ بعد، عبارت است از:

$$s_t=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} P(s_{t+2}=1|s_t=1) \\ P(s_{t+2}=2|s_t=1) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'^2\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p_{22})+p_{11}(p_{11}+p_{22}-1) \\ (1-p_{11})(p_{11}+p_{22}) \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۷)$$

$$s_t=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} P(s_{t+2}=1|s_t=2) \\ P(s_{t+2}=2|s_t=2) \end{bmatrix} = \mathbf{P}'^2\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p_{22})(p_{11}+p_{22}) \\ (1-p_{11})+p_{22}(P_{11}+p_{22}-1) \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۸)$$

به‌عنوان مثال در (۱۷-۵۷) عبارت $(1-p_{11})(p_{11}+p_{22})$ احتمال این است که وضعیت فعلی (وضعیت ۱) به وضعیت ۲، در دو دورهٔ بعد تغییر کند.

برای محاسبه توان‌های مختلف ماتریس P' می‌توان از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه استفاده نمود. بدین منظور ابتدا مقادیر ویژه ماتریس P' را برای حالت دو وضعیتی، حساب می‌کنیم[1]:

$$P' = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۵۹)$$

$$|P'-\lambda I_2|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & 1-p_{22} \\ 1-p_{11} & p_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-(p_{11}+p_{22})\lambda+(p_{11}+p_{22})=0$$

$$\Rightarrow (\lambda^2-1)-(p_{11}+p_{22})(\lambda-1)=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1-p_{11}-p_{22})=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1 \ , \ \lambda_2=\rho \quad (۱۷-۶۰)$$

که $\rho=p_{11}+p_{22}-1$ است.

حال بردارهای ویژه را حساب می‌کنیم که عبارتند از:

$$\lambda_1=1 \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1-p_{22}}{1-\rho} \\ \dfrac{1-p_{11}}{1-\rho} \end{bmatrix} \quad (۱۷-۶۱)$$

$$\lambda_2=\rho \Rightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردار ویژهٔ $\mathbf{c}_1$ برابر با بردار احتمال‌های غیرشرطی برای وضعیت‌های ۱ و ۲ است. ماتریس حاصل از بردارهای ویژه عبارت است از:

$$\mathbf{C}=[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2] = \begin{bmatrix} \dfrac{1-p_{22}}{1-\rho} & -1 \\ \dfrac{1-p_{11}}{1-\rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (۱۷-۶۲)$$

۱- صفایی (۱۳۹۰).

طبق خواص بردارهای ویژه، رابطه زیر را داریم (ضمیمه ب):

$$\mathbf{P}^{\prime}=\mathbf{C}\hat{\lambda}\mathbf{C}^{-1} \qquad (۱۷-۶۳)$$

$\hat{\lambda}$ ماتریس قطری است که عناصر آن مقادیر ویژه را نشان می‌دهند. با استفاده از خواص مقادیر و بردارهای ویژه می‌توان احتما تغییر وضعیت در n دورهٔ بعدی را به‌دست آورد که برابر با $\mathbf{P}^{\prime n}$ است:

$$\mathbf{P}^{\prime n}=\mathbf{C}\hat{\lambda}^{n}\mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1-p_{22}}{1-\rho} & -1\\ \frac{1-p_{11}}{1-\rho} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho\end{bmatrix}^{n}\begin{bmatrix}\frac{1-p_{22}}{1-\rho} & -1\\ \frac{1-p_{11}}{1-\rho} & 1\end{bmatrix}^{-1}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{(1-p_{22})+(1-p_{11})\rho^{n}}{1-\rho} & \frac{(1-p_{22})-(1-p_{22})\rho^{n}}{1-\rho}\\ \frac{(1-p_{11})-(1-p_{11})\rho^{n}}{1-\rho} & \frac{(1-p_{11})+(1-p_{22})\rho^{n}}{1-\rho}\end{bmatrix} \qquad (۱۷-۶۴)$$

به‌عنوان مثال، احتمال اینکه n دوره در وضعیت۱ بمانیم برابر است با:

$$P(s_{t+n}=1|s_t=1)=\frac{(1-p_{22})-(1-p_{11})\rho^{n}}{1-\rho} \qquad (۱۷-۶۵)$$

به‌عنوان مثال دیگر، احتمال اینکه از وضعیت ۱ در دوره t به وضعیت ۲ در دوره $t+2$ برسیم برابر است با:

$$P(s_{t+2}=2|s_t=1)=\frac{(1-p_{11})-(1-p_{11})\rho^{2}}{1-\rho}$$
$$=\frac{(1-p_{11})(1-\rho^{2})}{1-\rho}$$
$$=(1-p_{11})(1+\rho)$$
$$=(1-p_{11})(p_{11}+p_{22}) \qquad (۱۷-۶۶)$$

این نتیجه مشابه با (۱۷-۵۷) است.

۱۷-۷-۲. مدل خودرگرسیون تغییر جهت مارکف[1]

مدل خودرگرسیون تغییر جهت مارکف توسط هامیلتون (۱۹۸۹) ارائه گردید که آن را به‌اختصار با MS-AR(p) نشان می‌دهیم که بیانگر خودرگرسیون مرتبهٔ p براساس مدل تغییر جهت مارکف می‌باشد. شکل کلی این مدل در حالت دو وضعیتی عبارت است از:

$$Y_t=\mu_1+\phi_{11}Y_{t-1}+\phi_{12}Y_{t-2}+\cdots+\phi_{1p}Y_{t-p}+u_{1t} \quad , \quad s_t=1$$
$$Y_t=\mu_2+\phi_{21}Y_{t-1}+\phi_{22}Y_{t-2}+\cdots+\phi_{2p}Y_{t-p}+u_{2t} \quad , \quad s_t=2 \qquad (۱۷-۶۷)$$

مدل فوق بیانگر AR(p) است که در هر یک از وضعیت‌های ۱ و ۲، متفاوت است. علاوه بر این، توجه شود که جملهٔ اختلال در هر یک از این دو وضعیت متفاوت در نظر گرفته شده است.

$$u_{1t}\sim N(0,\sigma_1^2)$$
$$u_{2t}\sim N(0,\sigma_2^2) \qquad (۱۷-۶۸)$$

بنابراین، واریانس u_t ثابت نیست و وابسته به وضعیت است. اگر واریانس‌ها برابر باشند، آنگاه می‌توان در هر دو وضعیت، آنها را یکسان درنظر گرفت ($u_{1t}=u_{2t}=u_t$).

برای سادگی، مدل MS-AR(۱) با دو وضعیت درنظر بگیرید:

$$Y_t=\mu_1+\phi_1Y_{t-1}+u_{1t} \quad , \quad s_t=1$$
$$Y_t=\mu_2+\phi_2Y_{t-1}+u_{2t} \quad , \quad s_t=2 \qquad (۱۷-۶۹)$$

و یا آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$Y_t=\mu_{s_t}+\phi_{s_t}Y_{t-1}+u_{s_t,t} \quad , \quad s_t=1,2 \qquad (۱۷-۷۰)$$

ماتریس انتقال نیز قبلاً معرفی گردید که در اینجا به‌صورت زیر می‌باشد:

$$P=\begin{bmatrix}P(s_t=1|s_{t-1}=1) & P(s_t=2|s_{t-1}=1)\\ P(s_t=1|s_{t-1}=2) & P(s_t=2|s_{t-1}=2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_{11} & 1-p_{11}\\ 1-p_{22} & p_{22}\end{bmatrix} \qquad (۱۷-۷۱)$$

p_{ij} احتمال تغییر وضعیت از i به j می‌باشد.

به‌منظور تخمین این مدل، لازم است تابع درستنمایی را تشکیل دهیم. اما قبل از آن تابع چگالی Y_t را می‌نویسیم که مشروط به وضعیت s_t است:

1- Markov switching AR

$$f(Y_t|Y_{t-1},s_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{s_t}^2}}e^{-\frac{(Y_t-\mu_{s_t}-\phi_{s_t}Y_{t-1})^2}{2\sigma_{s_t}^2}} \quad ; \quad s_t=1,2 \qquad (۱۷-۷۲)$$

و تابع چگالی Y_t عبارت است از:

$$f(Y_t|Y_{t-1})=\sum_{s_t=1}^{2}f(Y_t,s_t|Y_{t-1}) \qquad (۱۷-۷۳)$$

$f(Y_t,s_t|Y_{t-1})$ تابع چگالی مشترک Y_t و s_t است که بر اساس آن، تابع چگالی شرطی Y_t را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(Y_t|s_t,Y_{t-1})=\frac{f(Y_t,s_t|Y_{t-1})}{f(s_t|Y_{t-1})} \quad \text{یا} \quad f(Y_t,s_t|Y_{t-1})=f(Y_t|s_t,Y_{t-1})f(s_t|Y_{t-1}) \qquad (۱۷-۷۴)$$

با جایگذاری (۱۷-۷۴) در (۱۷-۷۳)، خواهیم داشت:

$$f(Y_t|Y_{t-1})=\sum_{s_t=1}^{2}f(Y_t|s_t,Y_{t-1})P(s_t|Y_{t-1})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{(Y_t-\mu_1-\phi_1 Y_{t-1})^2}{2\sigma_1^2}}P(s_t=1|Y_{t-1})+\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-\frac{(Y_t-\mu_2-\phi_2 Y_{t-1})^2}{2\sigma_2^2}}P(s_t=2|Y_{t-1}) \qquad (۱۷-۷۵)$$

حال تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$\ln L=\sum_{s_t=1}^{2}\ln[f(Y_t|s_t,Y_{t-1})f(s_t|Y_{t-1})]$$
$$=\sum_{s_t=1}^{2}\ln\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-\frac{(Y_t-\mu_1-\phi_1 Y_{t-1})^2}{2\sigma_1^2}}P(s_t=1|Y_{t-1})+\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-\frac{(Y_t-\mu_2-\phi_2 Y_{t-1})^2}{2\sigma_2^2}}P(s_t=2|Y_{t-1})\right] \qquad (۱۷-۷۶)$$

برای تحمین ضرایب بایستی تابع فوق را حداکثر کنیم. اما ابتدا بایستی $P(s_t=j|Y_{t-1})$ را حساب کنیم که بدین منظور احتمال مربوط به هر وضعیت را به‌صورت زیر حساب می‌نویسیم:

$$P(s_t=j|Y_{t-1})=P(s_t=j,s_{t-1}=1|Y_{t-1})+P(s_t=j,s_{t-1}=2|Y_{t-1})$$
$$=\underbrace{P(s_t=j|s_{t-1}=1,Y_{t-1})}_{p_{1j}}P(s_{t-1}=1|Y_{t-1})+\underbrace{P(s_t=j|s_{t-1}=2,Y_{t-1})}_{p_{2j}}P(s_{t-1}=2|Y_{t-1}) \qquad (۱۷-۷۷)$$
$$=\sum_{i=1}^{2}p_{ij}P(s_{t-1}=i|Y_{t-1}) \quad ; \quad j=1,2$$

حال اگر در سال t، مقدار Y_t را مشاهده کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$P(s_t=j|Y_t,Y_{t-1})=P(s_t=j|I_t) \quad ; \quad I_t=(Y_t,Y_{t-1})$$
$$=\frac{f(Y_t,s_t|Y_{t-1})}{f(Y_t|Y_{t-1})} \qquad (۱۷-۷۸)$$
$$=\frac{f(Y_t|s_t,Y_{t-1})P(s_t|Y_{t-1})}{\sum_{j=1}^{2}f(Y_t|s_t=j,Y_{t-1})P(s_t=j|Y_{t-1})}$$

رابطه فوق بیانگر احتمال مشاهدهٔ وضعیت j با توجه به مقادیر Y_t و Y_{t-1} می‌باشد.

برای تخمین ضرایب از روش حداکثر درستنمایی، بایستی از (۱۷-۷۷) به‌جای $P(s_t=1|Y_{t-1})$ و $P(s_t=2|Y_{t-1})$ در (۱۷-۷۶) قرار دهیم. در این صورت، تخمین ضرایب μ_1، μ_2، ϕ_1 و ϕ_2 به‌دست می‌آید.

یکی از نتایجی که از این مدل به‌دست می‌آید، طول دوره‌ای است که انتظار می‌رود متغیر مورد نظر در یک وضعیت معین، بماند. بدین منظور توجه داریم که احتمال ماندن در وضعیت i از یک دوره به دورهٔ بعد، برابر با p_{ii} است:

$$P(s_t=i|s_{t-1}=i)=p_{ii} \qquad (۱۷-۷۹)$$

این احتمال را می‌توان برای طول دوره‌های مختلف نیز حساب نمود. اگر طول این دوره‌ها را با d نشان دهیم، خواهیم داشت:

۱- احتمال اینکه فقط در دوره t (فقط یک دوره) در وضعیت i باشیم (یعنی در دوره t در وضعیت i هستیم ولی در دورهٔ $t+1$ تغییر وضعیت رخ می‌دهد):

$$d=1 \Rightarrow P(s_t=i,s_{t+1}\neq i)=1-p_{ii} \qquad (۱۷-۸۰)$$

۲- احتمال اینکه در دوره t و $t+1$ در وضعیت i باشیم، ولی در دورهٔ $t+2$ تغییر وضعیت رخ دهد:

$$d=۲ \Rightarrow P(s_t=s_{t+۱}=i,s_{t+۲}\neq i)$$
$$=\underbrace{P(s_{t+۱}=i|s_t=i)}_{p_{ii}}\underbrace{P(s_{t+۲}\neq i|s_{t+۱}=i)}_{۱-p_{ii}}=(۱-p_{ii})p_{ii} \quad (۱۷-۸۱)$$

۳- احتمال اینکه در دوره t، $t+۱$ و $t+۲$ در وضعیت i باشیم، ولی در دورهٔ $t+۳$ تغییر وضعیت رخ دهد:

$$d=۳ \Rightarrow P(s_t=s_{t+۱}=s_{t+۲}=i,s_{t+۳}\neq i)$$
$$=\underbrace{P(s_{t+۱}=i|s_t=i)}_{p_{ii}}\underbrace{P(s_{t+۲}=i|s_{t+۱}=i)}_{p_{ii}}\underbrace{P(s_{t+۳}\neq i|s_{t+۲}=i)}_{۱-p_{ii}}=(۱-p_{ii})p_{ii}^۲ \quad (۱۷-۸۲)$$

۴- احتمال اینکه در دوره t تا دورهٔ $t+n$ در وضعیت i باشیم، ولی در دورهٔ $t+n+۱$ تغییر وضعیت رخ دهد:

$$d=n \Rightarrow P(s_t=s_{t+۱}=\cdots=s_{t+n}=i,s_{t+n+۱}\neq i)$$
$$=\underbrace{P(s_{t+۱}=i|s_t=i)}_{p_{ii}}\underbrace{P(s_{t+۲}=i|s_{t+۱}=i)}_{p_{ii}}\cdots\underbrace{P(s_{t+n}=i|s_{t+n-۱}=i)}_{p_{ii}}\underbrace{P(s_{t+n+۱}\neq i|s_{t+n}=i)}_{۱-p_{ii}} \quad (۱۷-۸۳)$$
$$=(۱-p_{ii})p_{ii}^n$$

بنابراین، طول دورهٔ ماندن در وضعیت i که با d نشان داده‌ایم، یک متغیر تصادفی است که امید ریاضی آن برابر است با:

$$E(d)=۱(۱-p_{ii})+۲(۱-p_{ii})p_{ii}+۳(۱-p_{ii})p_{ii}^۲+\cdots$$
$$=(۱-p_{ii})(۱+۲p_{ii}+۳p_{ii}^۲+\cdots) \quad (۱۷-۸۴)$$
$$=(۱-p_{ii})\frac{۱}{(۱-p_{ii})^۲}=\frac{۱}{۱-p_{ii}}$$

بنابراین، احتمال ماندن در وضعیت i برابر با p_{ii} است که مدت زمان مورد انتظار برای ماندن در وضعیت i برابر با $\frac{۱}{۱-p_{ii}}$ می‌باشد. به‌عنوان مثال اگر $p_{ii}=۰/۶$ باشد، آنگاه انتظار می‌رود که وضعیت i به طور متوسط حدود ۲/۵ دوره طول بکشد. بدیهی است که هرچه p_{ii} بزرگ‌تر باشد، متوسط مدت زمانی که وضعیت i برقرار است نیز بیشتر خواهد شد.

۳-۷-۱۷ کاربردی از مدل تغییر جهت مارکف[1]

مدل تغییر جهت مارکف برای تبیین رفتار متغیرهایی که به طور مداوم تغییر جهت می‌دهند و رفتار آنها از یک حالت به حالت دیگر تغییر کرده و مجدداً به حالت قبلی برمی‌گردند، مناسب است. به‌ویژه این مدل می‌تواند در مواردی مفید باشد که عامل یا متغیری که این تغییر رفتارها را ایجاد می‌کند (که موسوم به متغیر پیشرو است) غیرقابل مشاهده باشد.

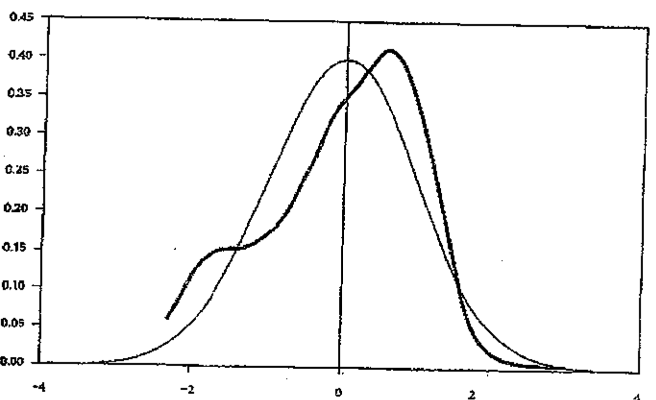
یکی از کاربردهای این مدل راجع به GEYR[2] می‌باشد که بیانگر نسبت عواید اوراق قرضه بلندمدت به سود سهام است. این نسبت بیان می‌کند که مقدار فعلی GEYR می‌تواند ابزار مفیدی برای تصمیم‌گیری راجع به سرمایه‌گذاری باشد. بر این اساس می‌توان تعیین نمود که آیا سرمایه‌گذاری در سهام صورت گیرد یا در اوراق قرضه دولتی. بنابراین GEYR اطلاعات مفیدی برای ارزیابی روند بازار سهام ارائه می‌کند. فرض می‌شود که GEYR دارای یک مقدار تعادلی بلندمدت است و انحراف‌هایی که از آن ایجاد می‌شود این علامت را می‌دهد که قیمت‌های سهام در سطوح ناپایدار خود قرار دارند. اگر GEYR نسبت‌به سطح تعادلی بلندمدت خود بالاتر باشد، بدین معنی است که سهام نسبت به اوراق قرضه گران‌تر است و لذا انتظار می‌رود که برای هر سطح معینی از بازدهی اوراق قرضه دولتی، بازدهی سهام افزایش یابد که این امر از طریق کاهش در قیمت سهام رخ خواهد داد. مشابه این، اگر GEYR پایین‌تر از سطح تعادلی خود باشد، اوراق قرضه نسبت به سهام گران‌تر است و لذا انتظار می‌رود که قیمت سهام افزایش یابد. بنابراین در ساده‌ترین حالت، قاعدهٔ مبادله سهام و اوراق قرضه که بر مبنای GEYR قرار دارد بدین معنی است که «اگر GEYR پایین باشد، سهام بخرید و اگر GEYR بالا باشد، سهام بفروشید». در این زمینه، مقاله بروکس و پرساند[3] (۲۰۰۱) مفید بودن روش تغییر جهت مارکف را گوشزد می‌کنند و این نکته را بررسی می‌کنند که قاعدهٔ مبادله‌ای که از این مدل استخراج می‌شود، می‌توانند سودآور باشد.

بروکس و پرساند (۲۰۰۱) شاخص درآمد ماهانه سهام و اوراق قرضه دولتی را از ژانویه ۱۹۷۵ تا آگوست ۱۹۹۷ برای سه کشور آمریکا، انگلستان و آلمان به‌کار گرفتند. برای نمونه، توزیع GEYR برای امریکا در نمودار (۳-۱۷) نشان داده شده است. همچنین در این نمودار توزیع نرمال نیز که دارای میانگین و واریانس مشابه با توزیع GEYR می‌باشد ترسیم شده است. واضح است که توزیع GEYR با توزیع نرمال دارای اختلاف قابل توجهی است. این توزیع همراه با یک

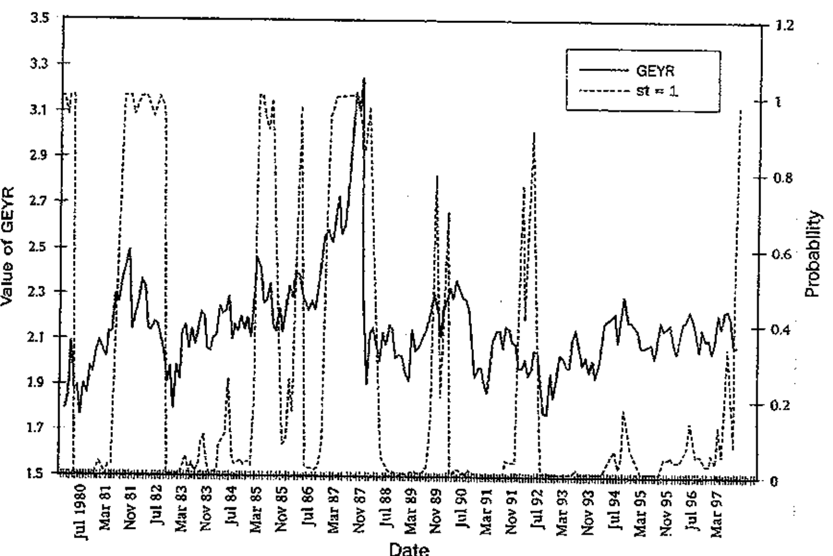
۱- این مثال از Brooks(2008) می‌باشد.

2- gilt–equity yield ratio
3- Brooks and Persand (2001)

قاعدهٔ مبادله بین سهام و اوراق قرضه را می‌توان توسعه داد و بر اساس آن مشخص کرد که آیا GEYR بالا است یا پایین. این شیوه، در فقدان یک مدل اقتصاد سنجی مرسوم، بیانگر آن است که روش تغییر جهت مارکف می‌تواند مفید باشد.



نمودار ۱۱–۱۷: توزیع GEYR در مقایسه با توزیع نرمال



نمودار ۱۲–۱۷: GEYR و احتمال تغییر جهت آن

تخمین ضرایب این مدل در جدول ۱–۱۷ ارائه شده است.

جدول ۱–۱۷: ضرایب تخمینی مدل تغییر جهت مارکف

	μ_1	μ_2	σ_1^2	σ_2^2	p_{11}	p_{22}	N_1	N_2
انگلستان	۲/۴۲۹۳ (۰/۰۳۰۱)	۲/۰۷۴۹ (۰/۰۳۶۷)	۰/۰۶۲۴ (۰/۰۰۹۲)	۰/۰۱۴۲ (۰/۰۰۱۸۰)	۰/۹۵۴۷ (۰/۰۷۲۶)	۰/۹۷۱۹ (۰/۰۱۳۴)	۱۰۲	۱۷۰
امریکا	۲/۴۵۵۴ (۰/۰۱۸۱)	۲/۱۲۱۸ ۰/۰۶۲۳)	۰/۰۲۹۴ (۰/۰۶۰۴)	۰/۰۳۹۵ (۰/۰۰۴۴)	۰/۹۷۱۷ (۰/۰۱۷۱)	۰/۹۸۲۳ (۰/۰۱۰۶)	۱۰۰	۱۷۲
آلمان	۳/۰۲۵۰ (۰/۰۵۴۴)	(۲/۱۵۶۳ (۰/۰۱۵۴)	۰/۵۵۱۰ (۰/۰۵۶۹)	۰/۰۱۲۵ (۰/۰۰۲۰)	۰/۹۸۱۶ (۰/۰۱۰۷)	۰/۹۳۲۸ (۰/۰۳۲۳)	۲۰۰	۷۲

توجه: داخل پرانتز انحراف معیار را نشان می‌دهد. N_1 و N_2 به ترتیب تعداد مشاهدات مربوط به وضعیت ۱ و ۲ هستند.

در جدول (۱–۱۷) میانگین و واریانس‌های GEYR برای وضعیت‌های ۱ و ۲ شده است. واضح است که در این مدل، داده‌ها به دو نمونه تقسیم شده‌اند که یکی میانگین بالا (μ_1) و دیگری میانگین پایین (μ_2) می‌باشد. در وضعیت ۱ که میانگین بالا است، GEYR در انگلستان و آلمان دارای نوسان‌پذیری بیشتری است زیرا واریانس وضعیت ۱ (σ_1^2) در مقایسه با وضعیت ۲ (σ_2^2) بالاتر است که در انگلستان ۴ برابر و در آلمان حدود ۲۰ برابر می‌باشد.

تعداد مشاهداتی که GEYR دارای میانگین بالا با احتمال بیش از ۰/۵ می‌باشد، در انگلستان ۱۰۲ مشاهده (۳۷/۵ درصد از کل مشاهدات)، در امریکا ۱۰۰ مشاهده (۳۶/۸ درصد از کل مشاهدات) و در آلمان ۲۰۰ مشاهده (۷۳/۵ درصد از کل مشاهدات) است. بنابراین در امریکا و انگلستان به احتمال زیاد میانگین GEYR پایین و در آلمان بالا می‌باشد.

در جدول (۱–۱۷) مقادیر p_{11} و p_{22} نیز داده شده است. این مقادیر بیانگر احتمال عدم تغییر وضعیت است. p_{11} احتمال این است که GEYR در ماه قبل در وضعیت ۱ بوده و در ماه بعد نیز در وضعیت ۱ بماند. p_{22} نیز بیانگر این احتمال است که GEYR در ماه قبل و بعد در وضعیت ۲ باشد. مقدار این پارامترها نشان می‌دهد که احتمال تغییر وضعیت از ۱ به ۲ (از وضعیتی که GEYR بالا است به وضعیتی که GEYR پایین باشد) و بر عکس، در هر سه کشور کمتر از ۱۰ درصد می‌باشد.

این وضعیت در نمودار (۱۴-۱۷) نشان داده شده است. در این نمودار مقدار GEYR و احتمال اینکه GEYR در وضعیت ۱ (میانگین بالا) باشد برای انگلستان ترسیم شده است. همان طور که نمودار نشان می‌دهد احتمال اینکه GEYR در انگلستان بالا باشد به‌صورت تکراری تغییر می‌کند. اما اکثر اوقات یا نزدیک به ۱ است و یا نزدیک به صفر.

دقت پیش‌بینی GEYR با استفاده از مدل تغییر جهت مارکف

انگل و هامیلتون (۱۹۹۰) نشان می‌دهند که می‌توان احتمال اینکه Y_t در یک وضعیت معین باشد، با استفاده از مدل تغییر جهت مارکف، پیش‌بینی نمود. این احتمال برابر است با:

$$p^f_{1t+1|t}=\mu_2+\big(\theta+(p_{11}+p_{22}-1)(p_{1t}-\theta)\big)(\mu_1-\mu_2)$$
$$=\mu_2+(\theta+\rho)(p_{1t}-\theta))(\mu_1-\mu_2) \quad (۸۵-۱۷)$$

$$\theta=\frac{1-p_{22}}{(1-p_{11})+(1-p_{22})}=\frac{1-p_{22}}{1-\rho}$$

p_{1t} بیانگر آخرین احتمال مشاهده شده برای ماندن در وضعیت ۱ است. $P^f_{1t+1|t}$ دلالت بر احتمال پیش‌بینی شده برای ماندن در وضعیت ۱ دارد که این پیش‌بینی در زمان t برای زمان $t+1$ صورت گرفته است.

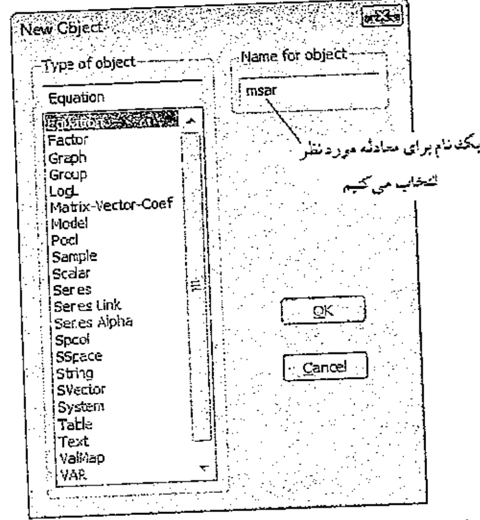
بروکس و پرساند (۲۰۰۱)، ۶۰ مشاهده را از ژانویه ۱۹۷۵ تا دسامبر ۱۹۷۹ استفاده کردند و پارامترهای μ_1، μ_2، σ_1^2، σ_2^2، p_{11} و p_{22} را تخمین زدند. سپس احتمال اینکه GEYR طی دوره بعدی در وضعیت ۱ (میانگین بالا) باشد را پیش‌بینی کردند. اگر پیش‌بینی شود که احتمال اینکه GEYR طی دوره بعدی در وضعیت ۲ (میانگین پایین) بماند، بیش از ۰/۵ باشد، به معنی پیش‌بینی این است که GEYR در وضعیت ۲ خواهد بود و از این‌رو بهتر است سهام خریداری یا نگهداری شود. اگر پیش‌بینی شود که احتمال قرار گرفتن GEYR در وضعیت ۲ (میانگین پایین) طی دوره بعدی، کمتر از ۰/۵ باشد به معنی پیش‌بینی این است که GEYR بالا خواهد بود و لذا اوراق قرضه نگه‌داری یا خریداری می‌شود. بدین ترتیب بر اساس این مدل می‌توان یک مشاهدهٔ بعدی را پیش‌بینی نمود.

برآورد مدل خود رگرسیون تغییر جهت مارکف در Eviews

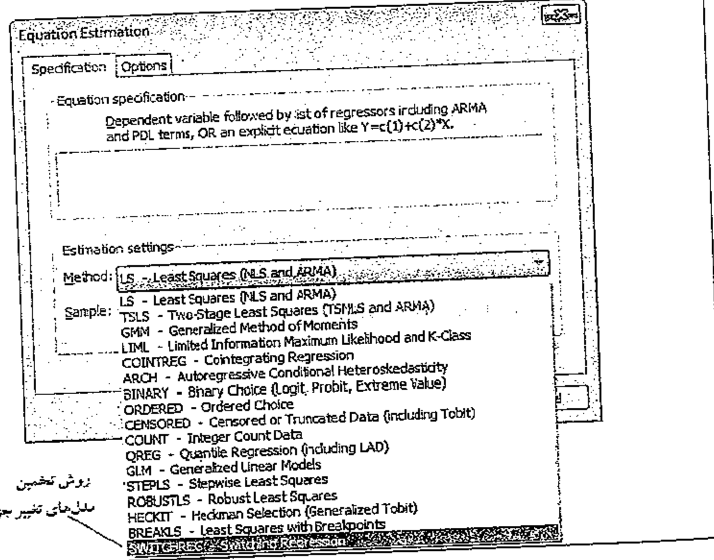
فایل data29

ابتدا با انتخاب مسیر زیر، پنجرهٔ New Object را باز می‌کنیم:

New Object … → Object



با انتخاب OK پنجره زیر باز می‌شود که روش تخمین مورد نظر را انتخاب می‌کنیم:



بعد از انتخاب روش تخمین، پنجره زیر باز می‌شود که مشخصات معادله مورد را وارد می‌کنیم (در اینجا مشخصات یک معادله AR(1) را وارد کرده‌ایم):

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Dependent variable followed by list of switching regressors

y c y(-1)

List of non-switching regressors

Regime specific error variances

Switching specification

Switching type: Simple

Probability regressors:

c

Number of regimes: 2

Estimation settings

Method: SWITCHREG - Switching Regression

Sample: 1301 1400

OK Cancel

معادله را اینجا وارد می‌کنیم

متغیرهایی که ضریب آنها در هر وضعیت ثابت است را اینجا وارد می‌کنیم

اگر واریانس‌ها در هر وضعیت متفاوت است اینجا را تیک می‌زنیم

نوع مدل تغییر جهت را انتخاب می‌کنیم

تعداد وضعیت‌ها

Switching specification

Switching type: Simple

Markov

نوع مدل می‌تواند ساده (Simple) یا مارکف (Markov) باشد که اولی احتمال انتقال را ثابت فرض می‌کند ولی دومی آن را متغیر در نظر می‌گیرد. در مدل ساده، احتمال انتقال از وضعیت ۱ به ۱ با احتمال انتقال از وضعیت ۲ به ۱، یکسان است. بدین معنی که احتمال انتقال به وضعیت ۱ تحت تأثیر وضعیت قبلی قرار ندارد.

حال اگر مدل را از نوع Markov انتخاب کنیم، نتایج به‌صورت زیر بدست خواهد آمد:

Equation: MSAR Workfile: DATA29::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Switching Regression (Markov Switching)
Date: 10/13/14 Time: 07:53
Sample: 1301 1400
Included observations: 100
Number of states: 2
Initial probabilities obtained from ergodic solution
Ordinary standard errors & covariance using numeric Hessian
Random search: 25 starting values with 10 iterations using 1 standard deviation (rng=kn, seed=619711633)
Convergence achieved after 8 iterations

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
		Regime 1		
C	1.938286	0.174114	11.13227	0.0000
Y(-1)	-0.445648	0.092610	-4.812090	0.0000
		Regime 2		
C	-1.024751	0.290300	-3.529976	0.0004
Y(-1)	0.744088	0.165072	4.507662	0.0000
		Common		
LOG(SIGMA)	-0.075185	0.084154	-0.893428	0.3716

Transition Matrix Parameters

وضعیت ۱

وضعیت ۲

مشترک بین دو وضعیت

نتایج فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = ۱/۹۳۴ - ۰/۴۴۶Y_{t-1} \quad , \quad s_t = ۱$$
$$Y_t = -۱/۰۲۵ + ۰/۷۴۴Y_{t-1} \quad , \quad s_t = ۲$$

یکی از نتایج مدل تغییر جهت مارکف، ماتریس انتقال و طول دورهٔ ماندن در یک وضعیت است. در پنجرهٔ نتایج، می‌توان این موارد را با انتخاب مسیر زیر، مشاهده نمود:

View → Regime Results → Transition Results ...

Transition Results

Display

Summary

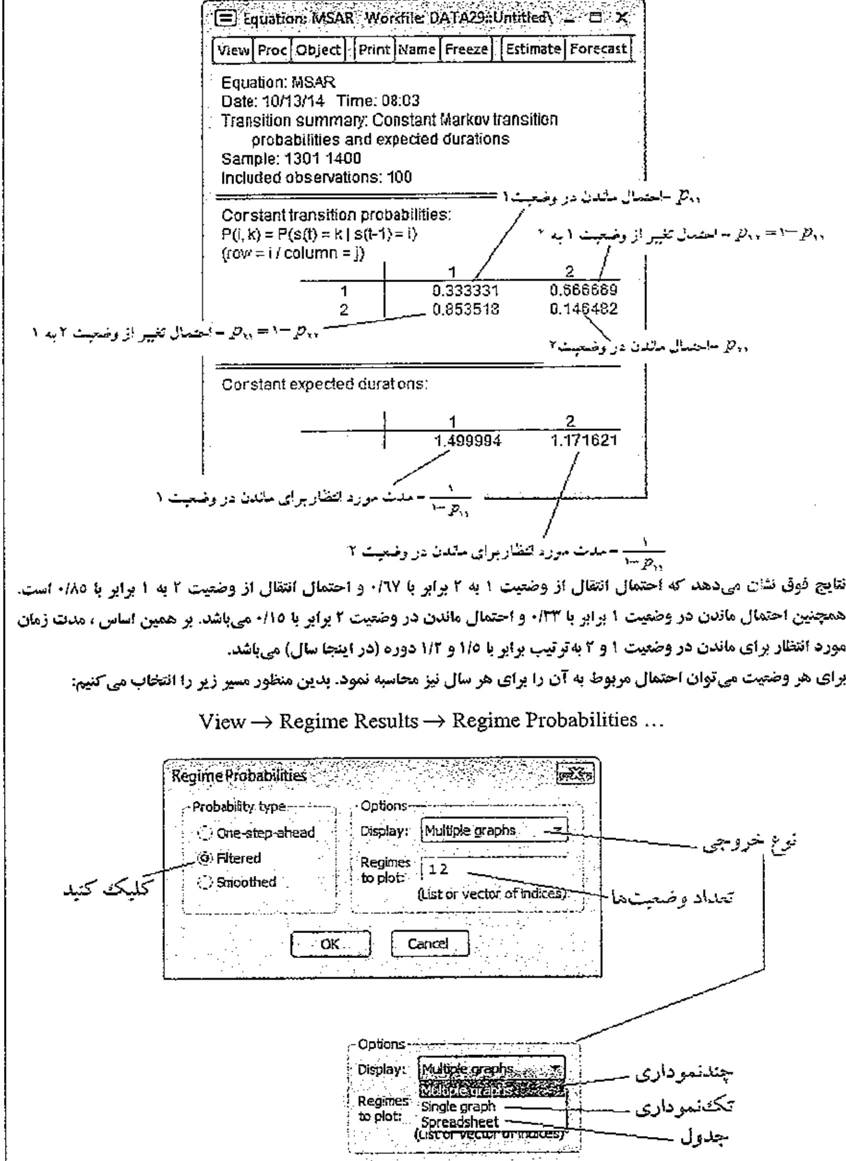
Transition probabilities

Expected durations

Format: Graph

OK Cancel

با انتخاب Summary نتایج را به صورت زیر مشاهده می‌کنیم:

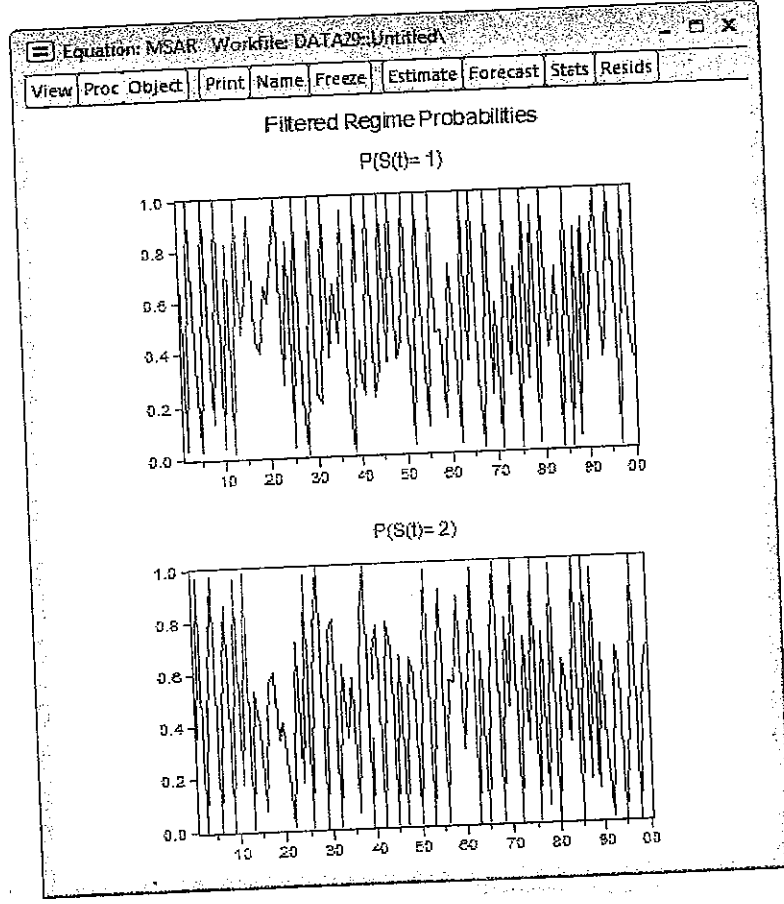


نتایج فوق نشان می‌دهد که احتمال انتقال از وضعیت ۱ به ۲ برابر با ۰/۶۷ و احتمال انتقال از وضعیت ۲ به ۱ برابر با ۰/۸۵ است. همچنین احتمال ماندن در وضعیت ۱ برابر با ۰/۳۳ و احتمال ماندن در وضعیت ۲ برابر با ۰/۱۵ می‌باشد. بر همین اساس ، مدت زمان مورد انتظار برای ماندن در وضعیت ۱ و ۲ به‌ترتیب برابر با ۱/۵ و ۱/۲ دوره (در اینجا سال) می‌باشد.

برای هر وضعیت می‌توان احتمال مربوط به آن را برای هر سال نیز محاسبه نمود. بدین منظور مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

View → Regime Results → Regime Probabilities ...

نمودارهای زیر احتمال هر وضعیت را در هر سال نشان می‌دهد. نمودار اول احتمال‌های مربوط به وضعیت ۱ است که نشان می‌دهد در هر سال، احتمال وقوع وضعیت ۱ چقدر است.



از آنجا که تعیین مقدار دقیق این احتمال‌ها از روی نمودار مشکل است لذا بهتر است از جدول آنها استفاده کنیم. لذا اگر گزینه Spreadsheet را انتخاب کنیم، جدول احتمال‌هاس هر وضعیت را خواهیم داشت. در این جدول، ستون اول احتماهای مربوط به وضعیت ۱ و ستون دوم احتماهای مربوط وضعیت ۲ را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال احتمال وقوع وضعیت ۱ در سال ۱۳۰۱ برابر با ۰/۶۴ و برای وضعیت ۲ برابر با ۰/۳۶ است. این در حالی که احتمال وضعیت ۱ و ۲ در سال ۱۳۰۲ به ترتیب برابر به ۰/۰۳۲ و ۰/۹۶۸ می‌باشد.

Equation: MSAR Workfile: DATA29::Untitled\

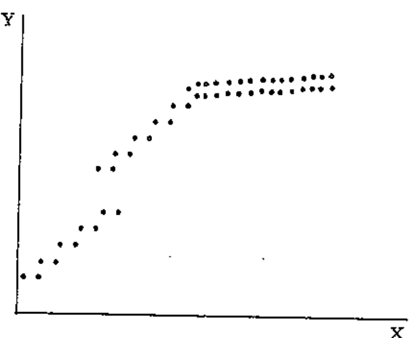
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast

Filtered Regime Probabilities

		P(S(t)= 1)	P(S(t)= 2)
1301	1301	0.642752	0.357248
1302	1302	0.032004	0.967996
1303	1303	0.999998	1.96E-06
1304	1304	0.385245	0.614755
1305	1305	0.028951	0.971049
1306	1306	1.000000	1.06E-07
1307	1307	0.357299	0.642701
1308	1308	0.133033	0.866967
1309	1309	1.000000	3.80E-09
1310	1310	0.038502	0.961498
1311	1311	0.824589	0.175411
1312	1312	0.017695	0.982305
1313	1313	0.999980	2.03E-05
1314	1314	0.472275	0.527725
1315	1315	0.602312	0.397688
1316	1316	0.928819	0.071181
1317	1317	0.443742	0.556258
1318	1318	0.396561	0.603439
1319	1319	0.657331	0.342669
1320	1320	0.594458	0.405542
1321	1321	0.789339	0.210661
1322	1322	0.989811	0.010189
1323	1323	0.278974	0.721026
1324	1324	0.827781	0.172219
1325			

مسائل

۱۷-۱ رابطه X و Y به‌صورت نمودار زیر است:



با استفاده از متغیرهای مجازی یک معادله برای تغییر جهت Y ارائه دهید.

۱۷-۲ فرض کنید که بر این باور هستید که بازده سهام تحت تأثیر فصل قرار دارد، یک مدل برای بررسی تغییرات بازده سهام طرح کنید.

۱۷-۳ تفاوت مدل‌های خودرگرسیون آستانه با مدل‌های تغییر جهت مارکف چیست؟

۱۷-۴ مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای (CAPM) را در نظر بگیرید. اگر بر این باور هستید که وقتی شاخص بازار رو به کاهش یا افزایش است دارای اثرات متفاوتی بر بازده سهام i ام می‌باشد، یک مدل برای بررسی این اثرات، طرح کنید.

۱۷-۵ معمولاً قیمت هر سهم با اعلام سود سهام، دچار تغییر می‌شود. مدل مناسبی برای بررسی این پدیده ارائه کنید.

۱۷-۶ فرض کنید که معادله $Y_t = \alpha + \beta Z_t + \sqrt{\sigma_1^2 \phi Z_t}\, u_t$ برای تغییر جهت بازدهی و سهام معرفی شده است. Z_t یک متغیر مجازی است که به‌صورت $Z_t = (1-p_{22}) + \rho Z_{t-1} + v_{1t}$ و $\rho = P_{11} + P_{22} - 1$ می‌باشد، که انتقال داده را نشان می‌دهد. اولاً Z_t را از فرایند مارکف استخراج کنید. ثانیاً نشان دهید که معادله Y_t چگونه تغییر جهت بازدهی سهام را توصیف می‌کند.

۱۷-۷ فرض کنید که تابع تولید به‌صورت $Y_t = AK^{\alpha}L^{\beta}$ با $\alpha + \beta = 1$ می‌باشد. این تابع تولید را به‌صورت سرانه می‌نویسیم:

$$\left(\frac{Y_t}{L_t}\right) = A_t\left(\frac{K_t}{L_t}\right)$$

A_t عامل بهره‌وری است.

نرخ رشد تولید سرانه تابعی از نرخ رشد سرمایه سرانه است:

$$\left(\frac{\dot{Y}}{L}\right)_t = a + \alpha\left(\frac{\dot{K}}{L}\right)_t$$

$a = \dot{A}$ می‌باشد که بیانگر نرخ رشد بهره‌وری است. بر اساس تابع تولید فوق می‌خواهیم عملکرد سه دولت A و B و C را که هر کدام هشت سال دولت را در اختیار داشته‌اند بررسی و مقایسه نماییم.

الف) آیا رشد بهره‌وری در این سه دولت متفاوت بوده است؟ چگونه این موضوع را آزمون می‌کنید؟

ب) آیا در این سه دولت، تأثیر سرمایه بر رشد، تفاوت معنادار داشته است؟ این موضوع را آزمون کنید.

ج) آیا معادله رشد اساساً در این سه دولت دچار تغییر معنادار شده است؟

فصل هجدهم

معادلات به‌ظاهر نامرتبط (SUR)[1]

۱۸-۱ مقدمه

معادلات به‌ظاهر نامرتبط در مورد رگرسیون‌هایی بحث می‌کند که به‌ظاهر مستقل از هم هستند و به‌نظر می‌رسد که کاربرد روش OLS مشکلی را ایجاد نمی‌کند. اما تصور کنید که دو معادله رگرسیون داریم که یکی Y_{1t} و دیگری Y_{2t} را توصیف کند. از طرف دیگر Y_{it} شامل دو جزء است: یکی جزء معین که با $E(Y_{it}|X_{it})$ نشان داده می‌شود و دیگری u_{it} که شامل اثر سایر عوامل است. در حالی که جزء معین شامل متغیرهایی است که هیچ ارتباطی بین این دو معادله نشان نمی‌دهد، ولی u_{it} به‌گونه‌ای است که موجب تغییر همزمان Y_{1t} و Y_{2t} می‌شود. لذا عوامل ناشناخته که موجب تغییر u_{it}ها می‌شود موجب وابستگی Y_{1t} و Y_{2t} می‌شود. در این شرایط، کاربرد OLS نمی‌تواند به تخمین‌های سازگار منجر شود.

۱۸-۲ الگوی سادهٔ معادلات به‌ظاهر نامرتبط

دو معادله سادهٔ زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{1t}=\alpha_1+\beta_1 X_{1t}+u_{1t} \quad ; \quad t=1,\cdots,T$$
$$Y_{2t}=\alpha_2+\beta_2 X_{2t}+u_{2t} \quad ; \quad t=1,\cdots,T \qquad (۱۸-۱)$$

1- seemingly unrelated regression.

این دو معادله به‌ظاهر هیچ ارتباطی با هم ندارند. برای بررسی جزئیات بیشتر این بحث، فرض کنید که Y مقدار تولید و X عامل تولید است. مثلاً تولید صنعت ۱ و ۲ ممکن است به نظر مستقل آیند، ولی برخی عوامل وجود دارند که موجب تغییر همزمان آنها می‌شود. این عوامل از طریق u_{1t} و u_{2t} موجب تغییر هم‌جهت در تولید می‌شود. مثال دیگر در مورد تورم در دو کشور مختلف که علاوه بر متغیرهای داخلی، ممکن است منشأهای مشترکی نیز وجود داشته باشد که از طریق u_{it} عمل می‌کند و لذا موجب می‌شود که تورم یک کشور با کشور دیگر ارتباط پیدا کند.

به‌هرحال سؤال این است که آیا جملهٔ خطای این دو معادله، واقعاً مستقل‌اند؟ اگر چنین باشد، به‌کارگیری روش OLS برای هر یک از این دو معادله مشکلی ایجاد نمی‌کند و تخمین‌های کارا و سازگار به‌دست خواهد آمد. در غیر این صورت، نمی‌توان این دو معادله را جداگانه برآورد نمود، زیرا جملات خطای آنها همبستگی دارد.

۱۸-۳ تخمین‌زننده‌های OLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط

اگر معادلات (۱-۱۸) را جداگانه در نظر گرفته و به شکل ماتریسی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1+\mathbf{u}_1 \;,\quad \mathrm{var}(\mathbf{u}_1)=E(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1')=\boldsymbol{\Sigma}_{11}=\sigma_1^2\mathbf{I}_T \qquad (۱۸-۲)$$

$$\mathbf{y}_2=\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2+\mathbf{u}_2 \;,\quad \mathrm{var}(\mathbf{u}_2)=E(\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2')=\boldsymbol{\Sigma}_{22}=\sigma_2^2\mathbf{I}_T$$

برای سادگی فرض کنید که در هر دو معادله تعداد مشاهدات یکسان است به‌گونه‌ای که بردارهای $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، $\mathbf{u}_1$ و $\mathbf{u}_2$ با ابعاد $T\times 1$ می‌باشند. ماتریس‌های $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ به ترتیب $T\times K_1$ و $T\times K_2$ بردارهای $\boldsymbol{\beta}_1$ و $\boldsymbol{\beta}_2$ نیز به ترتیب $K_1\times 1$ و $K_2\times 1$ می‌باشند.

تخمین‌زننده‌های OLS برای هر معادله به‌طور جداگانه عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,OLS}=(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 \qquad (۱۸-۳)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2,OLS}=(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2$$

همچنین واریانس آنها عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,OLS})=\sigma_1^2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} \qquad (۱۸-۴)$$

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2,OLS})=\sigma_2^2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}$$

۱۸-٤ تخمین‌زننده‌های GLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط

حال هر دو معادله را با هم ترکیب کرده و به‌صورت یکجا برآورد می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۵)$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u}$$

به‌گونه‌ای که $\mathbf{y}$ و $\mathbf{u}$ بردارهای ستونی $2T\times 1$، ماتریس $\mathbf{X}$ و بردار $\boldsymbol{\beta}$ نیز به‌ترتیب $2T\times(K_1+K_2)$ و $(K_1+K_2)\times 1$ می‌باشند.

ماتریس واریانس $\mathbf{u}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\Omega}=\mathrm{var}(\mathbf{u})=E(\mathbf{u}\mathbf{u}')=E\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1' & \mathbf{u}_2'\end{bmatrix}\right\}$$

$$=E\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1' & \mathbf{u}_1\mathbf{u}_2'\\ \mathbf{u}_2\mathbf{u}_1' & \mathbf{u}_2\mathbf{u}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{12} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma_1^2\mathbf{I}_T & \sigma_{12}\mathbf{I}_T\\ \sigma_{12}\mathbf{I}_T & \sigma_2^2\mathbf{I}_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\otimes\mathbf{I}_T=\boldsymbol{\Sigma}\otimes\mathbf{I}_T \qquad (۱۸-۶)$$

σ_{12} کوواریانس u_{1t} و u_{2t} است که همبستگی آنها را نشان می‌دهد. اگر $\sigma_{12}=0$ باشد، روش OLS معتبر است. در این حالت، تخمین یکجای $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ دقیقاً مشابه تخمین جداگانهٔ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ و $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ با روش OLS است. اما اگر $\sigma_{12}\neq 0$ باشد، در این صورت لازم است از روش GLS استفاده کنیم که نتیجهٔ آن به‌صورت زیر است[1]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{y}) \qquad (۱۸-۷)$$

با جایگذاری به جای $\boldsymbol{\Omega}$، $\mathbf{X}$ و $\mathbf{y}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^{11} & \sigma^{12}\\ \sigma^{21} & \sigma^{22}\end{bmatrix}\otimes\mathbf{I}_T\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma^{11}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \sigma^{12}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\\ \sigma^{21}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \sigma^{22}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۸)$$

σ^{ij} عناصر ماتریس $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ را نشان می‌دهد.

۱- فصل ششم را ببینید.

$$X'\Omega^{-1}y=[X_1' \quad X_2']\begin{bmatrix}\sigma^{11} & \sigma^{12}\\ \sigma^{21} & \sigma^{22}\end{bmatrix}\otimes I_T\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma^{11}X_1'y_1 & \sigma^{12}X_1'y_2\\ \sigma^{21}X_2'y_1 & \sigma^{22}X_2'y_2\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۹)$$

معکوس Ω عبارت است از:

$$\Omega^{-1}=(\Sigma\otimes I_T)^{-1}=\Sigma^{-1}\otimes I_T=\begin{bmatrix}\sigma^{11} & \sigma^{12}\\ \sigma^{21} & \sigma^{22}\end{bmatrix}\otimes I_T=\begin{bmatrix}\sigma^{11}I_T & \sigma^{12}I_T\\ \sigma^{21}I_T & \sigma^{22}I_T\end{bmatrix}$$

برای محاسبه معکوس Σ، ابتدا دترمینان آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2=\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

$$\rho^2=\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2} \qquad (۱۸-۱۱)$$

ρ ضریب همبستگی u_{1t} و u_{2t} است.

Σ^{-1} عبارت است از:

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{|\Sigma|}\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۱۳)$$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & -\sigma_{12}\rho^2\\ -\sigma_{12}\rho^2 & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}$$

بنابراین، σ^{ij}ها عبارتند از:

$$\sigma^{11}=\frac{\sigma_2^2}{|\Sigma|}=\frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)}$$

$$\sigma^{22}=\frac{\sigma_1^2}{|\Sigma|}=\frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \qquad (۱۸-۱۲)$$

$$\sigma^{12}=\sigma^{21}=\frac{-\sigma_{12}^2}{|\Sigma|}=\frac{\sigma_{12}\rho^2}{1-\rho^2}$$

۱۸-۵ شرایط یکسان بودن OLS و GLS

همان‌طور که اشاره شد، اگر $\sigma_{12}=0$ باشد، تخمین‌زننده‌های GLS و OLS یکسان خواهند بود. بدین منظور اگر $\sigma_{12}=0$ را به‌کار ببریم، در این صورت Σ^{-1} برابر است با:

$$\Sigma^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۱۴)$$

با جایگذاری در (۱۸-۸) و (۱۸-۹) نتیجه می‌شود:

$$X'\Omega^{-1}X=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}X_1'X_1 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}X_2'X_2\end{bmatrix}\Rightarrow(X'\Omega^{-1}X)^{-1}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2(X_1'X_1)^{-1} & 0\\ 0 & \sigma_2^2(X_2'X_2)^{-1}\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۱۵)$$

$$X'\Omega y=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}X_1'y_1\\ \frac{1}{\sigma_2^2}X_2'y_2\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۱۶)$$

با جایگذاری (۱۸-۱۵) و (۱۸-۱۶) در (۱۸-۷) و مقایسه آن با (۱۸-۳) ثابت می‌شود که تخمین‌زننده‌های OLS و GLS یکسان هستند.

$$\hat{\beta}_{GLS}=\begin{bmatrix}(X_1'X_1)^{-1}X_1'y_1\\ (X_2'X_2)^{-1}X_2'y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{1,OLS}\\ \hat{\beta}_{2,OLS}\end{bmatrix}=\hat{\beta}_{OLS} \qquad (۱۸-۱۷)$$

بنابراین اگر این دو معادله هیچ ارتباطی نداشته باشند، تخمین‌زننده‌های OLS از کارایی برخوردارند.

حالت دیگری نیز وجود دارد که موجب یکسان شدن تخمین‌های OLS و GLS می‌شود. اگر در ماتریس‌های X_1 و X_2، متغیرهای توضیحی دقیقاً مشابه و یکسان باشند، در این صورت به نتیجهٔ فوق می‌رسیم. فرض کنید که $X_1=X_2=Z$ باشد، در این صورت طبق (۱۸-۸) و (۱۸-۹) خواهیم داشت:

$$X'\Omega^{-1}X=\begin{bmatrix}\sigma^{11}Z'Z & \sigma^{12}Z'Z\\ \sigma^{21}Z'Z & \sigma^{22}Z'Z\end{bmatrix}=\Sigma\otimes Z'Z \qquad (۱۸-۱۸)$$

$$X'\Omega^{-1}y=\begin{bmatrix}\sigma^{11}Z'y_1 & \sigma^{12}Z'y_2\\ \sigma^{21}Z'y_1 & \sigma^{22}Z'y_2\end{bmatrix}=\Sigma\otimes Z'y$$

از طرف دیگر، ماتریس **X** را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$X=\begin{bmatrix}X_1 & 0\\ 0 & X_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix}=I_2\otimes Z \qquad (۱۸-۱۹)$$

با توجه به $\Omega^{-1}=\Sigma^{-1}\otimes I_T$ و رابطهٔ فوق، تخمین‌زنندهٔ GLS را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\beta}_{GLS}=\left[(I_2\otimes Z)'(\Sigma^{-1}\otimes I_T)(I_2\otimes Z)\right]^{-1}\left[(I_2\otimes Z)'(\Sigma^{-1}\otimes I_T)y\right] \qquad (۱۸-۲۰)$$

با ساده کردن عبارت فوق، خواهیم داشت[1]:

$$\hat{\beta}_{GLS}=\left[\Sigma\otimes(Z'Z)^{-1}\right]\left[(\Sigma^{-1}\otimes Z')y\right] \qquad (۱۸-۲۱)$$

$$=\left[I_2\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]y \quad , \quad \Sigma^{-1}\Sigma=I_2$$

$$=\begin{bmatrix}(Z'Z)^{-1}Z' & 0\\ 0 & (Z'Z)^{-1}Z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(Z'Z)^{-1}Z'y_1\\ (Z'Z)^{-1}Z'y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{1,OLS}\\ \hat{\beta}_{2,OLS}\end{bmatrix}=\hat{\beta}_{OLS}$$

بدین ترتیب ثابت شد که اگر $X_1=X_2$ باشد، آنگاه تخمین‌زننده‌های OLS و GLS یکسان خواهند بود.

۱- در اینجا از روابط زیر استفاده شده است:

$$(I_2\otimes Z)'=\begin{bmatrix}Z' & 0\\ 0 & Z'\end{bmatrix} \ , \ \Sigma^{-1}\otimes I_T=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 I_T & \sigma_{12}I_T\\ \sigma_{21}I_T & \sigma_2^2 I_T\end{bmatrix} \ , \ I_2\otimes Z=\begin{bmatrix}Z & 0\\ 0 & Z\end{bmatrix}$$

حاصل‌ضرب سه عبارت فوق برابر است با:

$$(I_2\otimes Z)'(\Sigma^{-1}\otimes I_T)(I_2\otimes Z)=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 Z'Z & \sigma_{12}Z'Z\\ \sigma_{21}Z'Z & \sigma_2^2 Z'Z\end{bmatrix}=\Sigma\otimes Z'Z$$

مشابه روابط فوق را برای ساده نمودن عبارت $(I_2\otimes Z)'(\Sigma^{-1}I_T)y$ استفاده می‌کنیم:

$$(I_2\otimes Z)'(\Sigma^{-1}I_T)y=\begin{bmatrix}Z' & 0\\ 0 & Z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^{11}I_T & \sigma^{12}I_T\\ \sigma^{21}I_T & \sigma^{22}I_T\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}\sigma^{11}Z' & \sigma^{12}Z'\\ \sigma^{21}Z' & \sigma^{22}Z'\end{bmatrix}y=(\Sigma^{-1}\otimes Z')y$$

همچنین رابطهٔ $(A\otimes B)^{-1}=A^{-1}\otimes B^{-1}$ و $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$ برقرار است.

۱۸-۶ تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات تعمیم یافتهٔ قابل‌دسترس(FGLS)[1]

برای تخمین ضرایب با روش GLS لازم است که ماتریس **Ω** را داشته باشیم. از آنجا که $\Omega=\Sigma\otimes I_T$ است، لذا ابتدا بایستی عناصر ماتریس **Σ** را برآورد نماییم.

$$\hat{\Sigma}=\begin{bmatrix}\hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12}\\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{22}\end{bmatrix} \qquad (۱۸-۲۲)$$

ابتدا هر دو معادله را با روش OLS برآورد کرده و خطاها را حساب می‌کنیم. e_{1t} و e_{2t} به‌ترتیب باقیمانده‌های معادلات اول و دوم هستند. با استفاده از باقیمانده‌ها، واریانس‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\hat{\sigma}_1^2=\frac{\sum_{t=1}^{T}e_{1t}^2}{T-K_1} \quad , \quad \hat{\sigma}_2^2=\frac{\sum_{t=1}^{T}e_{2t}^2}{T-K_2} \qquad (۱۸-۲۳)$$

و تخمین σ_{12} برابر است با:

$$\hat{\sigma}_{12}=\frac{\sum_{t=1}^{T}e_{1t}e_{2t}}{T} \qquad (۱۸-۲۴)$$

بنابراین، **Ω** عبارت است از:

$$\hat{\Omega}=\hat{\Sigma}\otimes I_T \Rightarrow \hat{\Omega}^{-1}=\hat{\Sigma}^{-1}\otimes I_T \qquad (۱۸-۲۵)$$

۱۸-۷ کارایی GLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط

برای سادگی، بحث را با رگرسیون‌های ساده ادامه می‌دهیم که عبارتند از:

$$Y_{1t}=\alpha_1+\beta_1 X_{1t}+u_{1t} \qquad (۱۸-۲۶)$$
$$Y_{2t}=\alpha_2+\beta_2 X_{2t}+u_{2t}$$

معادلات فوق را برحسب انحراف از میانگین می‌نویسیم:

$$y_{1t}=\beta_1 x_{1t}+u_{1t} \qquad (۱۸-۲۷)$$
$$y_{2t}=\beta_2 x_{2t}+u_{2t}$$

1- feasible generalized least squares

تخمین‌های OLS و GLS عبارتند از[1]:

$$\hat{\beta}_{1,OLS}=(\tilde{X}_1'\tilde{X}_1)^{-1}\tilde{X}_1'y_1=\frac{\sum x_{1t}y_{1t}}{\sum x_{1t}^2} \quad (۱۸-۲۸)$$

$$\hat{\beta}_{2,OLS}=(\tilde{X}_2'X_2)^{-1}\tilde{X}_2'y_2=\frac{\sum x_{2t}y_{2t}}{\sum x_{2t}^2}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_{1,GLS}\\ \hat{\beta}_{2,GLS}\end{bmatrix}=(\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{X})^{-1}(\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{y}) \quad (۱۸-۲۹)$$

واریانس تخمین‌زننده‌های OLS عبارتند از:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{1,OLS})=\frac{\sigma_1^2}{\sum x_{1t}^2}\ ,\ \text{var}(\hat{\beta}_{2,OLS})=\frac{\sigma_2^2}{\sum x_{2t}^2} \quad (۱۸-۳۰)$$

واریانس تخمین‌زنندهٔ GLS عبارت است از:

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS})=(\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{X})^{-1} \quad (۱۸-۳۱)$$

با جایگذاری به‌جای $\tilde{X}'$ و Ω^{-1} خواهیم داشت[2]:

۱- در اینجا از روابط زیر استفاده شده است (علامت~ بیانگر انحراف از میانگین است):

$$\tilde{X}_1'=[x_{11},\ \cdots,\ x_{1T}]\Rightarrow\tilde{X}_1'\tilde{X}_1=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}^2 \quad ; \quad \tilde{y}_1'=[y_{11},\ \cdots,\ y_{1T}]\Rightarrow\tilde{X}_1'\tilde{y}_1=\sum_{t=1}^{T}x_{1t}y_{1t}$$

مشابه این روابط برای X_{2t} و Y_t نیز تعریف می‌شود. اما برای $\tilde{X}$ و $\tilde{y}$ روابط زیر را داریم:

$$\tilde{y}'=[\tilde{y}_1'\ \ \tilde{y}_2']=[y_{11},\ \cdots,\ y_{1T},y_{21},\ \cdots,\ y_{2T}]\ \tilde{X}'=[\tilde{X}_1'\ \ \tilde{X}_2']=[x_{11},\ \cdots,\ x_{1T},x_{21},\ \cdots,\ x_{2T}]$$

$$\tilde{X}'\tilde{X}'=[\tilde{X}_1'\ \ \tilde{X}_2']\begin{bmatrix}\tilde{X}_1\\ \tilde{X}_2\end{bmatrix}=\tilde{X}_1'\tilde{X}_1+\tilde{X}_2'\tilde{X}_2=\sum x_{1t}^2+\sum x_{2t}^2$$

$$\tilde{X}'\tilde{y}=[\tilde{X}_1'\ \ \tilde{X}_2']\begin{bmatrix}\tilde{y}_1\\ \tilde{y}_2\end{bmatrix}=\tilde{X}_1'\tilde{y}_1+\tilde{X}_2'\tilde{y}_2=\sum x_{1t}y_{1t}+\sum x_{2t}y_{2t}$$

۲- $\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{X}$ عبارت است از:

$$(\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{X})=\begin{bmatrix}\tilde{X}_1' & 0\\ 0 & \tilde{X}_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^{11}I_T & \sigma^{12}I_T\\ \sigma^{21}I_T & \sigma^{22}I_T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{X}_1 & 0\\ 0 & \tilde{X}_2\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس‌های فوق را ضرب کرده و به‌جای σ^{ij} از (۱۲-۱۵) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{X})=\begin{bmatrix}\sigma^{11}\tilde{X}_1'\tilde{X}_1 & \sigma^{12}\tilde{X}_1'\tilde{X}_2\\ \sigma^{21}\tilde{X}_2'\tilde{X}_1 & \sigma^{22}\tilde{X}_2'\tilde{X}_2\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\rho^2}\begin{bmatrix}\frac{\sum x_{1t}^2}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho^2\sum x_{1t}x_{2t}}{\sigma_{12}}\\ -\frac{\rho^2\sum x_{1t}x_{2t}}{\sigma_{12}} & \frac{\sum x_{2t}^2}{\sigma_2^2}\end{bmatrix}$$

$$(\tilde{X}'\Omega^{-1}\tilde{X})^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{\sum x_{1t}^2}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & -\frac{\rho\sum x_{1t}x_{2t}}{\sigma_{12}(1-\rho^2)}\\ -\frac{\rho\sum x_{1t}x_{2t}}{\sigma_{12}(1-\rho^2)} & \frac{\sum x_{2t}^2}{\sigma_2^2(1-\rho^2)}\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2r^2}\begin{bmatrix}\frac{\sigma_1^2}{\sum x_{1t}^2} & \frac{\sigma_{12}r^2}{\sum x_{1t}x_{2t}}\\ \frac{\sigma_{12}r^2}{\sum x_{1t}x_{2t}} & \frac{\sigma_2^2}{\sum x_{2t}^2}\end{bmatrix} \quad (۱۸-۳۲)$$

r ضریب همبستگی X_{1t} و X_{2t} است. طبق نتایج فوق، واریانس‌ها عبارتند از:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{1,GLS})=\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2r^2}\frac{\sigma_1^2}{\sum x_{1t}^2}=\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2r^2}\text{var}(\hat{\beta}_{1,OLS}) \quad (۱۸-۳۳)$$

$$\text{var}(\hat{\beta}_{2,GLS})=\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2r^2}\frac{\sigma_2^2}{\sum x_{2t}^2}=\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2r^2}\text{var}(\hat{\beta}_{2,OLS})$$

بنابراین کارایی نسبی تخمین‌زنندهٔ OLS نسبت به GLS برابر است با:

$$\frac{\text{var}(\hat{\beta}_{1,GLS})}{\text{var}(\hat{\beta}_{1,OLS})}=\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2r^2}\leq 1 \ \Rightarrow\ \text{var}(\hat{\beta}_{1,GLS})\leq\text{var}(\hat{\beta}_{1,OLS}) \quad (۱۸-۳۴)$$

ملاحظه می‌شود که کارایی GLS بیشتر از OLS است، زیرا واریانس کمتری دارد. از طرف دیگر اگر $\rho=0$ باشد، کارایی آنها یکسان است، زیرا به ازای $\rho=0$ تخمین‌زنندهٔ OLS و GLS و همچنین واریانس آنها یکسان خواهد بود. عامل دیگری که در اینجا تأثیرگذار است، همبستگی X_{1t} و X_{2t} است. اگر $r^2=1$ باشد (یعنی X_{1t} و X_{2t} همبستگی کامل داشته باشند، مثلاً یکی باشند)، آنگاه کارایی هر دو روش، یکسان خواهد بود.

به‌هرحال اگر $\rho=0$ باشد بدان معنا است که $\sigma_{12}=0$ است و لذا ماتریس Σ قطری می‌باشد و در این صورت روش OLS و GLS یکسان هستند. بنابراین سؤال این است که آیا Σ قطری است؟

۸-۱۸ آزمون قطری بودن Σ

مرز بین روش OLS و GLS در معادلات به‌ظاهر نامرتبط این است که Σ قطری است یا نه. برای آزمون قطری بودن، بروش و پاگان (۱۹۸۰) آزمون ضریب لاگرانژ را ارائه داده‌اند. آماره مورد استفادهٔ آنها عبارتند از:

$$LM = T\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{i-1}\hat{\rho}_{ij}^2 \quad , \quad \hat{\rho}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j} \qquad (۱۸-۲۵)$$

m تعداد معادلات است. LM توزیع χ^2 با درجه آزادی $\frac{m(m-1)}{2}$ دارد.[1] $\hat{\sigma}_{ij}$ و $\hat{\sigma}_i^2$ طبق فرمول‌های (۱۸-۲۳) و (۱۸-۲۴) محاسبه می‌شوند. آماره LM به‌ازای $m=2$ برابر با $T\hat{\rho}_{12}^2 = \frac{T\hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2\hat{\sigma}_2^2}$ است. همچنین برای $m=3$ مقدار LM برابر با $T(\hat{\rho}_{12}^2 + \hat{\rho}_{13}^2 + \hat{\rho}_{23}^2)$ می‌باشد.

برآورد مدل SUR در Eviews

با انتخاب مسیر زیر پنجره‌ای باز می‌شود که معادلات را در آن وارد می کنیم:

Object → New Object → System

System: UNTITLED Workfile: DATA8::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | InsertTxt | Estimate | Spec | Stats | Resids

```
y1=c(1)+c(2)*x1+c(3)*x2
y2=c(4)+c(5)*x3+c(6)*x4
```

در پنجره فوق، از منوی Estimate، پنجره زیر را باز کرده و در قسمت Estimation Method روش SUR را وارد می‌کنیم:

[1] - فصل نهم بخش ۱۵-۹ را ببینید.

System Estimation

Estimation Method | Options

Estimation method: Seemingly Unrelated Regression

Estimation settings

Add lagged regressors to instruments for linear equations with AR terms

Identity weighting matrix in estimation (2SLS coefs & GMM robust std.errors)

Time series HAC specification

Prewhitening by VAR(1)

Kernel options: Bartlett, Quadratic

Bandwidth selection: Fixed, Andrews, Variable - Newey-West

Number of NW for Newey-West

Sample: 1353 1386

OK | Cancel

با انتخاب OK نتایج تخمین به‌دست می‌آید. جزئیات بیشتر روش‌های سیستمی در فصل نوزدهم ارائه شده است.

مسائل

۱-۱۸ سیستم معادلات زیر را مانند (۲-۱۸) داریم:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{u}_1$$
$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}_2$$

اگر $\mathbf{X}_2$ زیرمجموعهٔ $\mathbf{X}_1$ باشد، (به‌عنوان مثال $\mathbf{X}_1 = [\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_*]$ باشد که $\mathbf{X}_*$ در داخل $\mathbf{X}_2$ نیست)، در این صورت ثابت کنید که روابط زیر برقرار است:

الف) $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2,OLS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2,GLS}$

ب) $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,GLS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1,OLS} - B$ که $\mathbf{B} = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_2^2}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{e}_{2,OLS}$ است. همچنین $\hat{\sigma}_2^2 = \frac{\sum e_{2t}^2}{n}$ و $\hat{\sigma}_{12} = \frac{\sum e_{1t}e_{2t}}{n}$ و $e_{2,OLS}$ باقیمانده‌های OLS برای معادله $\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \mathbf{u}_2$ است.

۲-۱۸ فرض کنید در مسئله ۱ ماتریس‌های $\mathbf{X}_1$ و $\mathbf{X}_2$ متعامد باشند ($\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2 = \mathbf{0}$). ثابت کنید که رابطه زیر برقرار است:

$$\hat{\beta}_{i,GLS} = \hat{\beta}_{i,OLS} + \frac{\hat{\sigma}^{ij}}{\hat{\sigma}^{ii}}(X_i'X_i)^{-1}X_i'y_j \quad ; \quad i=1,2 \ , \ j \neq i$$

(توجه شود که $j \neq i$ بدان معنا است که اگر $i=1$ باشد، آنگاه $j=2$ و اگر $i=2$ باشد، آنگاه $j=1$ خواهد بود).

۱۸–۳ در مسئله ۱ فرض کنید که X_1 و X_2 فقط شامل یک متغیر باشند. در این صورت $Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + u_{1t}$ و $Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t}$ را داریم. حال نتیجهٔ مسئله ۱ را ثابت کنید.

۱۸–۴ واریانس تخمین‌زننده‌های GLS را در مسئله ۳ حساب کرده و کارایی آنها را در مقایسه با تخمین‌زننده‌های OLS بررسی کنید.

۱۸–۵ معادلات (۱) و (۲) را می‌خواهیم با استفاده از داده‌های زیر برآورد کنیم:

$$Y_t = \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + u_{1t} \qquad (1)$$

$$Y_t = \alpha_2 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t} \qquad (2)$$

Y_t	X_{1t}	X_{2t}
۲۴	۳۵	۷۸
۲۵	۳۳	۷۹
۲۸	۳۰	۸۰
۲۸	۳۵	۸۲
۳۵	۳۲	۸۴
۳۶	۳۱	۸۵
۴۹	۲۸	۸۶
۴۰	۳۳	۸۷
۳۸	۳۴	۸۵
۲۸	۳۵	۸۴
۳۶	۳۲	۸۵
۳۹	۳۴	۸۴
۳۹	۳۰	۸۲
۴۶	۳۹	۸۷
۵۸	۲۵	۸۶
۵۲	۲۸	۸۷
۴۷	۲۹	۸۸
۴۹	۲۷	۸۹
۴۳	۲۹	۹۰
۳۴	۳۶	۹۲

الف) معادله (۱) و (۲) را با روش OLS برآورد کنید.

ب) معادله (۱) و (۲) را با روش GLS برآورد کنید.

ج) نتایج الف و ب را مقایسه کنید.

د) آزمون قطری بودن را انجام دهید.

۱۸–۶ معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = \alpha_1 + \beta_1 X_{1t} + u_{1t}$$
$$Y_t = \alpha_2 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t}$$

تخمین‌زننده‌های OLS و GLS را به‌دست آورده و مقایسه کنید.

۱۸–۷ در مسئله ۶ نشان دهید که اگر u_{1t} و u_{2t} مستقل باشند، تخمین‌زننده‌های OLS و GLS یکسان خواهند بود.

ضمیمه فصل هجدهم: معادلات به ظاهر نامرتبط (SUR) در Stata

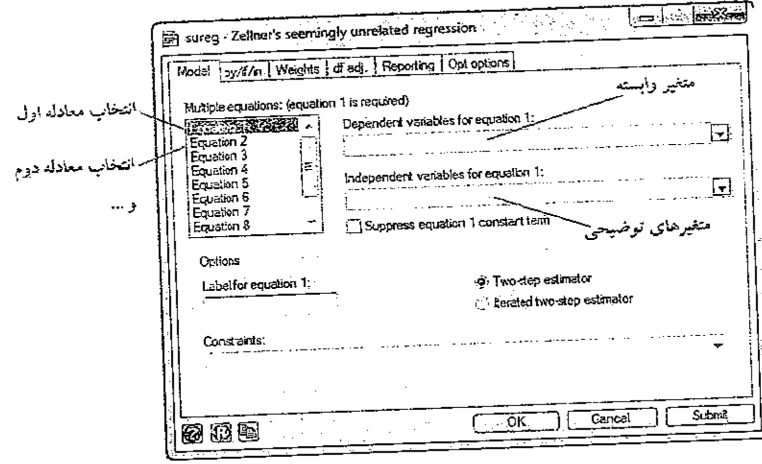
برآورد معادلات به ظاهرنامرتبط (SUR) در Stata

فایل data5

به منظور برآورد سیستم معادلات به ظاهر نامرتبط، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Statistics → Linear models and related → Multi-equation models → seemingly unrelated regression

پنجره زیر باز می‌شود که مشخصات معادلات وارد می‌کنیم:



با انتخاب OK نتایج تخمین به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

به عنوان مثال مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_1 + \beta_2 X_{2t} + u_{2t}$$

نتایج عبارت است از:

```
. (5 vars, 49 obs pasted into editor)
- preserve
save "I:\econometrics-new\Econometrics 6\stata\data5.dta"
file I:\econometrics-new\Econometrics 6\stata\data5.dta saved

. sureg (y1 = x1 x2) (y2 = x2)

Seemingly unrelated regression
```

Equation	Obs	Parms	RMSE	"R-sq"	chi2	P
y1	32	2	.0570391	0.9622	900.15	0.0000
y2	32	1	.0154719	0.9965	9185.50	0.0000

		Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
y1							
	x1	.4625348	.0305408	15.14	0.000	.4026759	.5223936
	x2	.0181705	.001244	14.61	0.000	.0157323	.0206087
	_cons	6.625395	.328489	20.17	0.000	5.981568	7.269222
y2							
	x2	.0283906	.0002962	95.84	0.000	.02781	.0289712
	_cons	8.691635	.0100083	868.44	0.000	8.672019	8.711251

و یا از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

sureg (y1 = x1 x2) (y2 = x2)

اگر بخواهیم همبستگی بین اجزای خطای معادلات را نیز به‌دست آوریم، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

sureg (y1 = x1 x2) (y2 = x2), corr

علاوه بر نتایج قبلی، نتایج زیر نیز به‌دست می‌آید:

```
Correlation matrix of residuals:

        y1        y2
y1   1.0000
y2  -0.3091    1.0000

Breusch-Pagan test of independence: chi2(1) =     3.057, Pr = 0.0804
```

ضریب همبستگی u_1 و u_2

آماره LM

چون مقدار LM در ناحیه بحرانی قرار دارد (با احتمال ۰/۰۸ و نه ۰/۰۵) لذا اجزای خطای این دو معادله دارای همبستگی هستند و در نتیجه، تخمین OLS با تخمین GLS متفاوت است.

فصل نوزدهم

معادلات همزمان

۱-۱۹ مقدمه

در فصل‌های قبلی، مدل‌های تک‌معادله‌ای را بررسی کردیم. این مدل‌ها دارای یک متغیر وابسته یا درون‌زا (Y) و یک یا چند متغیر توضیحی (X) می‌باشند که در آنها، جهت علیّت از X به Y می‌باشد. از طرف دیگر یکی از فروض مدل کلاسیک این بود که متغیرهای توضیحی (Xها) غیرتصادفی و یا برون‌زا هستند. بدیهی است که ممکن است چنین شرایطی برقرار نباشد و یک متغیر درون‌زا تابعی از متغیر درون‌زای دیگر باشد که خود نیز نیاز به معرفی معادله دیگری دارد. بدین‌ترتیب به‌جای یک معادله با چند معادله (سیستم معادلات) مواجه‌ایم که این وضعیت موجب نقض فروض روش OLS می‌شود.

۲-۱۹ سیستم معادلات همزمان: تعاریف و مفاهیم

سیستم معادلات همزمان وقتی مورد استفاده است که چند متغیر وابسته داریم که بین آنها وابستگی متقابل وجود دارد. بنابراین بایستی چند معادله یا یک سیستم معادلات برای آنها تعریف کنیم. به‌عنوان مثال فرض کنید که رابطه Y_1 و Y_2 به‌صورت زیر باشد:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_t + \gamma_1 Y_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_t + \gamma_2 Y_{1t} + u_{2t} \qquad (۱-۱۹)$$

در اینجا، دو معادله همراه با دو متغیر وابسته (Y_1, Y_2) و یک متغیر توضیحی داریم. رابطهٔ Y_1 و Y_2، دو طرفه است. ویژگی مهم سیستم معادلات فوق آن است که Y_1 و Y_2 علاوه بر اینکه متغیر وابسته هستند به‌عنوان متغیر توضیحی نیز ظاهر شده‌اند. این بدان معنا است که Y_1 و Y_2 که به‌ترتیب تابعی از u_1 و u_2 هستند، متغیرهای تصادفی بوده که در نقش متغیر توضیحی ظاهر شده‌اند. از طرف دیگر، در معادله اول Y_2 تابعی از u_1 است که به معنای نقض یکی دیگر از فروض کلاسیک است، زیرا طبق معادله دوم، Y_2 تابعی از Y_1 است که Y_1 نیز به نوبه خود طبق معادله اول، تابعی از u_1 می‌باشد. لذا اگر u_1 تغییر کند، از طریق Y_1 موجب تغییر Y_2 خواهد شد. بدین ترتیب تخمین‌زننده‌های OLS، ناااریب و سازگار نخواهد بود.

فروض زیر برای سیستم معادلات فوق برقرار است:

$$E(u_{1t}|X_t) = E(u_{2t}|X_t) = 0$$

$$E(u_{1t}^2|X_t) = \sigma_1^2 \quad , \quad E(u_{2t}^2|X_t) = \sigma_2^2$$

$$\text{cov}(u_{1t}, u_{2t}) = E(u_{1t}u_{2t}) = 0$$

$$\text{cov}(u_{1t}, X_t) = E(u_{2t}X_t) = 0$$

تعاریف

متغیر درون‌زا: متغیر درون‌زا متغیری است که برای تعیین آن، یک معادله تعریف می‌شود و مقدار آن از حل همزمان سیستم معادلات، به‌دست می‌آید. در سیستم معادلات فوق، Y_1 و Y_2 متغیرهای درون‌زا هستند.

متغیرهای برون‌زا: متغیرهایی هستند که مقدار آنها خارج از سیستم معادلات تعیین می‌شود و برای تعیین مقدار آنها هیچ معادله‌ای تعریف نمی‌شود، مانند X.

متغیرهای از قبل تعیین‌شده[1]: متغیرهایی هستند که در نقش متغیرهای توضیحی با وقفه‌های مختلف، ظاهر می‌شوند. مثلاً ممکن است معادله اول شامل X_{t-1}، Y_{t-1} و ... باشد.

1- predetermined

فرم ساختاری[1]: سیستم معادلات ۱-۱۹ را فرم ساختاری می‌نامند که در هر معادله، متغیر درون‌زا بر حسب متغیرهای برون‌زا و درون‌زا بیان می‌شود. ضرایب این معادلات را نیز ضرایب ساختاری می‌نامند.

فرم حل‌شده (خلاصه‌شده)[2]: اگر سیستم معادلات ۱-۱۹ را برای متغیرهای درون‌زا حل کرده و آنها را بر حسب متغیرهای برون‌زا بنویسیم، آن را فرم حل‌شده یا خلاصه‌شده می‌گویند. ضرایب این معادلات را نیز ضرایب فرم حل‌شده می‌گویند.

اتحادها[3]: در یک سیستم معادلات ممکن است برخی از معادلات صرفاً به‌صورت یک اتحاد حسابداری باشند، مثلاً برابری درآمد ملی با مجموع مصرف، پس‌انداز و مالیات. بدیهی است که اتحادها شامل جملهٔ تصادفی نیستند زیرا همواره و به‌طور کامل برقرار می‌باشند.

شرایط تعادل: یک سیستم معادلات ممکن است شامل شرایط تعادلی نیز باشند. مانند برابری عرضه و تقاضای یک کالا یا برابری درآمد ملی با مصرف و سرمایه‌گذاری در مدل سادهٔ کینزی.

معادلات رفتاری: معادلاتی هستند که رفتار کارگزاران اقتصادی را توصیف می‌کنند، مانند معادله مصرف در مدل کینزی که تابعی از درآمد ملی است یا عرضه و تقاضای یک کالا که تابعی از قیمت و متغیرهای مربوطه هستند.

معادلات فنی: این معادلات بیانگر یک رابطه فنی بین متغیرها هستند، مانند تابع تولید که یک رابطه فنی را بین مقدار تولید و عوامل تولید توصیف می‌کند. این رابطهٔ فنی بیانگر رفتار بنگاهها نیست، زیرا تابع تولید بیانگر رابطهٔ فنی است که حداکثر محصول قابل تولید با هر ترکیبی از عوامل تولید را نشان می‌دهد، در حالی که رفتار بنگاه‌ها با چنین تعریفی، فاصله دارد.

تعاریف و اصطلاحات فوق، به‌ویژه رابطه بین فرم ساختاری و فرم حل‌شده در مثال‌های زیر توصیف شده است.

مثال ۱-۱۹: مدل ساده کینزی را در نظر بگیرید:

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

1- structural form
2- reduced form
3- identity

در اینجا دو معادله با دو متغیر درون‌زای Y_t و C_t داریم. I_t متغیر برون‌زا و u_t نیز جمله خطا می‌باشد. α و β نیز ضرایب ساختاری هستند. معادله اول بیانگر شرط تعادل و معادله دوم نیز یک معادله رفتاری را نشان می‌دهد.

فرم حل‌شده عبارت است از:

$$Y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} u_t$$

$$C_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{\beta}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} u_t$$

فرم حل‌شده را به‌صوت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + v_{1t}$$

$$C_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + v_{2t}$$

بنابراین، ضرایب فرم حل‌شده عبارتند از:

$$\pi_0 = \pi_2 = \frac{\alpha}{1-\beta} \ , \ \pi_1 = \frac{1}{1-\beta} \ , \ \pi_3 = \frac{\beta}{1-\beta}$$

بدین ترتیب، در این سیستم معادلات، معادله مصرف شامل دو ضریب ساختاری (β, α) و دو ضریب فرم حل‌شده (π_3, π_2) می‌باشد. لذا تعداد ضرایب فرم حل‌شدهٔ آن برابر با تعداد ضرایب ساختاری آن است. بنابراین می‌توان ضرایب ساختاری را بر حسب ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آورد:

$$\pi_3 = \frac{\beta}{1-\beta} \Rightarrow \beta = \frac{\pi_3}{1+\pi_3}$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha}{1-\beta} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi_2}{1+\pi_3}$$

بدین ترتیب برای هر یک از ضرایب α و β جواب منحصر به‌فرد به‌دست می‌آید.

مثال ۲-۱۹: معادلات عرضه و تقاضای یک کالا را در نظر بگیرید:

$$Q_t^d = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$$

$$Q_t^s = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

$$Q_t^d = Q_t^s$$

در اینجا، سه معادله با سه متغیر درون‌زای Q_t^d، Q_t^s و P_t داریم. در این سیستم معادلات، متغیر برون‌زا وجود ندارد. ضرایب ساختاری شامل α_0، α_1، β_0 و β_1 است. معادلات اول و دوم بیانگر معادلات رفتاری و معادله سوم بیانگر شرط تعادل می‌باشد.

مثال ۳-۱۹: اگر در مثال ۲-۱۹ شرط تعادل را به‌صورت $Q_t^d = Q_t^s = Q_t$ نوشته و در معادلات عرضه و تقاضا قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$$

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

معادله اول و دوم به‌ترتیب تقاضا و عرضه را نشان می‌دهند، لذا دو معادله رفتاری با متغیرهای درون‌زای Q_t و P_t داریم.

فرم حل‌شده عبارت است از:

$$P_t = \pi_0 + v_{1t}$$

$$R_t = \pi_1 + v_{2t}$$

در این معادلات، روابط زیر برقرار است:

$$\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \ , \ \pi_1 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$v_{1t} = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1} \ , \ v_{2t} = \frac{\alpha_1 u_{2t} - \beta_1 u_{1t}}{\alpha_1 - \beta_1}$$

در این سیستم معادلات، ۴ ضریب ساختاری و ۲ ضریب فرم حل‌شده وجود دارد که بدین‌ترتیب، تعداد ضرایب فرم حل‌شده کمتر از ضرایب ساختاری می‌باشد. اگر فرم حل‌شده را برای معادلات عرضه و تقاضا برآورد کنیم دو ضریب π_0 و π_1 به‌دست می‌آید، ولی براساس آنها نمی‌توان هیچ یک از ضرایب فرم ساختاری را به‌دست آورد.

مثال ٤-۱۹: فرض کنید که در مثال ۳-۱۱، تقاضا تابعی از درآمد (I_t) باشد:

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t}$$

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

این سیستم معادلات، علاوه‌بر متغیرهای درون‌زای Q_t و P_t، شامل متغیر برون‌زای I_t نیز می‌باشد. در اینجا ۵ ضریب ساختاری وجود دارد.

فرم حل‌شده معادلات عبارت است از:

$$P_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + v_{1t}$$

$$Q_t = \pi_2 + \pi_3 I_t + v_{2t}$$

ضرایب فرم حل‌شده عبارتند از:

$$\pi_0 = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - \beta_1} \ , \ \pi_1 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$\pi_2 = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} \ , \ \pi_3 = \frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1}$$

در این سیستم معادلات، ۵ ضریب ساختاری و ۴ ضریب فرم حل‌شده وجود دارد. در اینجا تعداد ضرایب فرم حل‌شده، کمتر از تعداد ضرایب ساختاری است و لذا مکان تعیین همهٔ ضرایب ساختاری وجود ندارد. اما در معادله عرضه، دو ضریب β_0 و β_1 را می‌توان برحسب ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آورد، زیرا فرم حل‌شدهٔ آن دارای دو ضریب π_2 و π_3 است. از تقسیم π_3 بر π_1، مقدار β_1 برابر با نسبت $\frac{\pi_3}{\pi_1}$ به‌دست می‌آید و با توجه به اینکه $\pi_2=\beta_0+\beta_1\pi_0$ است، لذا ضرایب معادله عرضه عبارتند از:

$$\pi_2=\beta_0+\beta_1\pi_0 \Rightarrow \beta_0=\pi_2-\frac{\pi_0\pi_3}{\pi_1}$$

$$\beta_1=\frac{\pi_3}{\pi_1}$$

بدین‌ترتیب برای هر یک از ضرایب معادله عرضه یک جواب منحصر به‌فرد به‌دست می‌آید، در حالی که ضرایب معادله تقاضا را نمی‌توان به‌دست آورد.

مثال ۵-۱۹: فرض کنید که در مثال ۴-۱۱، عرضه تابعی از مالیات (T_t) باشد:

$$Q_t=\alpha_0+\alpha_1P_t+\alpha_2I_t+u_{1t}$$
$$Q_t=\beta_0+\beta_1P_t+\beta_2T_t+u_{2t}$$

در این سیستم معادلات دو متغیر درون‌زای Q_t و P_t و دو متغیر برون‌زای I_t و T_t وجود دارد. ضرایب ساختاری نیز شامل α_0، α_1، α_2، β_0، β_1 و β_2 می‌باشد.

فرم حل‌شده عبارت است از:

$$P_t=\pi_0+\pi_1I_t+\pi_2T_t+v_{1t}$$
$$Q_t=\pi_3+\pi_4I_t+\pi_5T_t+v_{2t}$$

ضرایب فرم حل‌شده عبارتند از:

$$\pi_0=\frac{\beta_0-\alpha_0}{\alpha_1-\beta_1}\ ,\ \pi_1=\frac{-\alpha_2}{\alpha_1-\beta_1}\ ,\ \pi_2=\frac{-\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}$$
$$\pi_3=\frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}\ ,\ \pi_4=\frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}\ ,\ \pi_5=\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1-\beta_1}$$

در این سیستم معادلات، ۶ ضریب ساختاری و ۶ ضریب فرم حل‌شده وجود دارد. چون تعداد ضرایب ساختاری برابر با تعداد ضرایب حل‌شده است، لذا می‌توان هر یک از ضرایب ساختاری را بر حسب ضرایب فرم حل‌شده نوشت (توجه شود که وقتی P_t را از معادله تقاضا حساب کرده و در معادله عرضه قرار می‌دهیم، در ابتدا روابط $\pi_3=\beta_0+\beta_1\pi_0$ و $\pi_5=\beta_2+\beta_1\pi_2$ را داریم:

$$\alpha_0=\pi_3-\frac{\pi_0\pi_5}{\pi_2}\ ,\ \alpha_1=\frac{\pi_5}{\pi_2}\ ,\ \alpha_2=\pi_4-\frac{\pi_1\pi_5}{\pi_2}$$
$$\beta_0=\pi_3-\frac{\pi_0\pi_4}{\pi_1}\ ,\ \beta_1=\frac{\pi_4}{\pi_1}\ ,\ \beta_2=\pi_5-\frac{\pi_2\pi_4}{\pi_1}$$

بدین ترتیب برای هر یک از ضرایب معادلات عرضه و تقاضا یک جواب منحصر به‌فرد به‌دست می‌آید. توجه شود که معادله تقاضا دارای ۳ ضریب ساختاری و ۳ ضریب فرم حل‌شده است. همین شرایط برای معادله عرضه نیز برقرار است.

مثال ۶-۱۹: معادلات عرضه و تقاضا به‌صورت زیر بیان شده‌اند:

$$Q_t=\alpha_0+\alpha_1P_t+\alpha_2I_t+u_{1t}$$
$$Q_t=\beta_0+\beta_1P_t+\beta_2T_t+\beta_3P_{t-1}+u_{2t}$$

این معادلات دارای ۷ ضریب ساختاری شامل α_0، α_1، α_2، β_0، β_1، β_2 و β_3 می‌باشند.

فرم حل‌شدهٔ این سیستم معادلات عبارت است از:

$$P_t=\pi_0+\pi_1I_t+\pi_2T_t+\pi_3P_{t-1}+v_{1t}$$
$$Q_t=\pi_4+\pi_5I_t+\pi_6T_t+\pi_7P_{t-1}+v_{2t}$$

ضرایب فرم حل‌شده عبارتند از:

$$\pi_0=\frac{\beta_0-\alpha_0}{\alpha_1-\beta_1},\pi_1=\frac{-\alpha_2}{\alpha_1-\beta_1},\pi_2=\frac{\beta_2}{\alpha_1-\beta_1},\pi_3=\frac{\beta_3}{\alpha_1-\beta_1}$$
$$\pi_4=\frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1}{\alpha_1-\beta_1},\pi_5=\frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1-\beta_1},\pi_6=\frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1-\beta_1},\pi_7=\frac{\alpha_1\beta_3}{\alpha_1-\beta_1}$$

در این سیستم معادلات، ۷ ضریب ساختاری و ۸ ضریب فرم حل‌شده وجود دارد. بدین‌ترتیب تعداد ضرایب فرم حل‌شده بیشتر از ضرایب ساختاری است. از طرف دیگر، تعداد ضرایب ساختاری معادله تقاضا برابر ۳ و تعداد ضرایب فرم حل‌شدهٔ آن برابر ۴ است، لذا اگر ضرایب فرم حل‌شده را بنویسیم، برای هر یک از ضرایب معادلهٔ تقاضا، بیش از یک جواب به‌دست می‌آید:

$$\alpha_0=\pi_4-\frac{\pi_0\pi_6}{\pi_2}\ ,\ \alpha_0=\pi_4-\frac{\pi_0\pi_7}{\pi_3}$$
$$\alpha_1=\frac{\pi_6}{\pi_2}\ ,\ \alpha_1=\frac{\pi_7}{\pi_3}$$
$$\alpha_2=\pi_5-\frac{\pi_1\pi_6}{\pi_2}\ ,\ \alpha_2=\pi_5-\frac{\pi_1\pi_7}{\pi_3}$$

از طرف دیگر چون تعداد ضرایب ساختاری معادله عرضه برابر با ۴ و تعداد ضرایب ساختاری آن نیز برابر ۴ است، لذا برای هر یک از ضرایب ساختاری یک جواب منحصر به‌فرد دست می‌آید:

$$\beta_0 = \pi_4 - \frac{\pi_0\pi_5}{\pi_1}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi_5}{\pi_1}$$

$$\beta_2 = \pi_6 - \frac{\pi_2\pi_5}{\pi_1}$$

$$\beta_3 = \pi_7 - \frac{\pi_3\pi_5}{\pi_1}$$

نتیجهٔ کلی که از مثال‌های فوق گرفته می‌شود آن است که اگر برای معادله‌ای، تعداد ضرایب ساختاری بیش از تعداد ضرایب فرم حل‌شده باشد، امکان تعیین ضرایب ساختاری وجود ندارد. در غیر این صورت، می‌توان ضرایب ساختاری را برای معادله موردنظر تعیین نمود.

۱۹-۳ تخمین معادلات فرم ساختاری از روش OLS و اریب (تورش) معادلات همزمان

یکی از ویژگی‌های مهم معادلات همزمان که موجب نقض فروض کلاسیک می‌شود آن است که متغیر درون‌زا به‌عنوان متغیر توضیحی در یک معادله وارد می‌شود. این موضوع تخمین‌زننده‌های OLS را با اریب مواجه می‌کند. به‌خاطر داریم که تخمین‌زنندهٔ OLS در مدل تک معادله‌ای (با K متغیر) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\hat{\boldsymbol\beta} = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'y} = \boldsymbol\beta + (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'u}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{X}$ و $\mathbf{u}$ مستقل هستند، لذا $E(\hat{\boldsymbol\beta}) = \boldsymbol\beta$ است. اما اگر X شامل متغیرهایی باشد که مستقل از $\mathbf{u}$ نباشند، در این صورت $E(\hat{\boldsymbol\beta}) \neq \boldsymbol\beta$ خواهد شد. بنابراین اگر روش OLS را برای هر یک از معادلات فرم ساختاری به‌کار ببریم، تخمین‌زننده‌های آن، بدون توش نخواهند بود.

مثال ۱۹-۷: مدل سادهٔ کینزی را در نظر بگیرید:

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$$

تخمین‌زنندهٔ OLS برای β عبارت است از:

$$\hat\beta = \frac{\sum y_t c_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum y_t C_t}{\sum y_t^2}$$

c_t و y_t برحسب انحراف از میانگین می‌باشند. $\hat\beta$ را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم[1]:

$$\hat\beta = \frac{\sum y_t C_t}{\sum y_t^2} = \sum \frac{y_t}{\sum y_t^2} C_t = \sum w_t C_t \;\;,\;\; w_t = \sum \frac{y_t}{\sum y_t^2}$$
$$= \sum w_t(\alpha + \beta Y_t + u_t) = \beta + \sum w_t u_t$$

در اینجا امید ریاضی $\hat\beta$ برابر β نخواهد شد، زیرا امید ریاضی جملهٔ آخر برابر صفر نیست:

$$E(\sum w_t u_t) = E\left(\sum \frac{y_t}{\sum y_t^2} u_t\right) = E\left(\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2}\right) \neq 0$$

توجه شود که چون صورت و مخرج عبارت فوق، شامل متغیرهای تصادفی هستند محاسبهٔ امید ریاضی آن، تا حدودی مشکل است. در عوض، می‌توان از حد احتمال استفاده نمود، یعنی اگر حجم نمونه افزایش یابد، آنگاه $\frac{\sum y_t u_t}{n}$ برابر با $\text{cov}(Y,u)$ و $\frac{\sum y_t^2}{n}$ نیز برابر با $\text{var}(Y) = \sigma_y^2$ خواهد شد:

$$\text{plim}\frac{\sum y_t u_t}{\sum y_t^2} = \frac{\text{plim}\sum y_t u_t / n}{\text{plim}\sum y_t^2 / n} = \frac{\text{cov}(Y,u)}{\sigma_y^2}$$

از طرف دیگر، می‌توان ثابت نمود که $\text{cov}(Y,u) = \frac{\sigma^2}{1-\beta}$ است.[2] لذا خواهیم داشت:

۱- توجه شود که $\sum y_t^2$ برابر با یک مقدار معین است و لذا $\sum w_t = \sum \frac{y_t}{\sum y_t^2} = \frac{\sum y_t}{\sum y_t^2} = 0$ است و همچنین $\sum w_t Y_t = 1$ می‌باشد.

۲- برای اثبات، ابتدا فرم خلاصه شدهٔ Y را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = C_t + I_t = \alpha + \beta Y_t + u_t + I_t \Rightarrow Y_t = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t + \frac{1}{1-\beta} u_t$$

امید ریاضی Y_t عبارت است از:

$$E(Y_t) = \frac{\alpha}{1-\beta} + \frac{1}{1-\beta} I_t \;\;,\;\; E(u_t) = 0$$

بدین ترتیب $Y_t - E(Y_t) = \frac{u_t}{1-\beta}$ است. حال کوواریانس Y_t و u_t عبارت است از:

$$\text{cov}(Y_t, u_t) = E[(Y_t - E(Y_t))(u_t - E(u_t))] = E\left[\left(\frac{u_t}{1-\beta}\right)(u_t - 0)\right] = \frac{E(u_t^2)}{1-\beta} = \frac{\sigma^2}{1-\beta}$$

$$\text{plim}(\hat{\beta})=\beta+\frac{\text{cov}(Y,u)}{\sigma_y^2}=\beta+\frac{1}{1-\beta}\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2}\geq\beta$$

یعنی با افزایش حجم نمونه، اریب $\hat{\beta}$ از بین نمی‌رود و β همواره بیش از حد واقعی، برآورد خواهد شد.

۱۹-٤ تخمین معادلات فرم خلاصه‌شده با OLS و مشکل برآورد ضرایب ساختاری

در بخش قبلی دیدیم که استفاده از روش OLS برای معادلات فرم ساختاری و تخمین مستقیم ضرایب ساختاری منجر به اریب (تورش) معادلات همزمان می‌شود. برای حل این مشکل، می‌توان از روش OLS برای برآورد ضرایب فرم خلاصه‌شده (π ها) استفاده نمود. بدیهی است که چون در فرم حل‌شده، تمام متغیرهای توضیحی، غیرتصادفی هستند لذا تخمین‌زننده OLS نااریب خواهد بود. اما توجه داریم که هدف ما تخمین ضرایب ساختاری است. لذا بعد از برآورد ضرایب فرم حل‌شده بایستی با استفاده از آنها، ضرایب ساختاری را محاسبه کنیم. اگر به مثال‌های ۱-۱۹ تا ۶-۱۹ مراجعه کنیم، متوجه مشکلات این روش خواهیم شد. همان‌طور که در این مثال‌ها دیدیم، با سه حالت مواجه خواهیم شد:

۱- امکان تعیین ضرایب ساختاری بر حسب ضرایب فرم حل‌شده وجود ندارد (در مثال ۳-۱۹ هیچ یک از ضرایب معادلات عرضه و تقاضا را نمی‌توان تعیین کرد و در مثال ۴-۱۹ نیز هیچ یک از ضرایب معادله تقاضا قابل تعیین نیستند).

۲- امکان تعیین ضرایب ساختاری با استفاده از ضرایب فرم حل‌شده وجود دارد و برای ضرایب ساختاری به جواب‌های منحصر به‌فرد می‌رسیم (در مثال ۱-۱۹ برای معادله مصرف، جواب‌های منحصر به‌فرد به‌دست می‌آید. در مثال ۴-۱۹ برای ضرایب معادله عرضه، در مثال ۵-۱۹ برای هر یک از ضرایب عرضه و تقاضا و در مثال ۶-۱۹ برای هر یک از ضرایب معادله عرضه، جواب منحصر به‌فرد به‌دست می‌آید).

۳- امکان تعیین ضرایب ساختاری با استفاده از ضرایب فرم حل‌شده وجود دارد ولی برای ضرایب ساختاری بیش از یک جواب به‌دست می‌آید. (در مثال ۶-۱۹ برای هر یک از ضرایب معادلهٔ تقاضا، دو جواب به‌دست می‌آید).

به‌طور خلاصه می‌توان گفت که امکان تعیین ضرایب ساختاری با استفاده از ضرایب فرم حل‌شده، بستگی به تعداد آنها دارد. در واقع مجهول‌ها شامل ضرایب ساختاری است ولی اطلاعات

قابل دسترس فقط شامل ضرایب فرم حل‌شده است که هدف ما تعیین مجهول‌ها با استفاده از اطلاعات موجود می‌باشد. این موضوع تحت عنوان مسئله شناسایی یا تشخیص[1] معادلات ساختاری است که به بررسی آن می‌پردازیم.

۱۹-۵ شناسایی (تشخیص) معادلات فرم ساختاری

قابلیت شناسایی یا تشخیص یک معادله بدان معنا است که آیا امکان محاسبه ضرایب فرم ساختاری با استفاده از ضرایب فرم خلاصه‌شده، وجود دارد یا نه. این موضوع در مثال‌های ۱-۱۹ تا ۶-۱۹ بررسی شد.

۱-۵-۱۹ انواع معادلات ساختاری بر اساس قابلیت شناسایی

به‌طور کلی براساس قابلیت شناسایی یا تشخیص، هر یک از معادلات فرم ساختاری را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی می‌کنند:

۱- **غیرقابل شناسایی یا کمتر از حد مشخص یا نامشخص**[2]: در این صورت امکان برآورد ضرایب ساختاری وجود ندارد (مانند معادله عرضه و تقاضا در مثال ۳-۱۹ و معادله تقاضا در مثال ۴-۱۹).

۲- **دقیقاً قابل شناسایی یا دقیقاً مشخص**[3]: در این صورت امکان برآورد ضرایب ساختاری وجود دارد و جواب منحصر به‌فرد برای آنها به‌دست می‌آید (مانند معادله مصرف در مثال ۱-۱۱، معادله عرضه در مثال ۴-۱۱، معادلات عرضه و تقاضا در مثال ۵-۱۹ و معادله عرضه در مثال ۶-۱۹).

۳- **بیش از حد قابل شناسایی یا بیش از حد مشخص**[4]: در این صورت امکان برآورد ضرایب ساختاری وجود دارد ولی بیش از یک جواب برای آنها به‌دست می‌آید (مانند معادله تقاضا در مثال ۶-۱۹).

برای شناسایی هر یک از معادلات فرم ساختاری می‌توان از قواعد ساده‌تری استفاده نمود که معروف به شرط درجه‌ای و شرط رتبه‌ای است. اما قبل از آن، بهتر است به مثال ۴-۱۹ توجه کنیم. همان‌طور که اشاره شد، معادله عرضه دقیقاً مشخص ولی معادله تقاضا نامشخص است. دلیل آن این است که معادله تقاضا شامل متغیر درآمد است که در معادله عرضه وارد نشده است. یعنی معادله عرضه یکی از متغیرهای برون‌زای موجود در مدل را ندارد و همین موضوع باعث شناسایی

1- identification
2- unidentification (under-identification)
3- excactly identification
4- over-indentification

آن می‌شود. نکته مهم این است که در خصوص معادله عرضه، یک اطلاعات اضافی داریم و آن این است که می‌دانیم ضریب I_t در معادله عرضه برابر صفر است. این اطلاعات اضافی موجب شناسایی معادله عرضه می‌شود.

۱۹-۵-۲ شرط درجه‌ای[1]

برای بررسی شرط درجه‌ای، ابتدا حالت کلی یک سیستم معادلات را تصور کنید که فرم ساختاری آن شامل موارد زیر است:

الف) دارای M معادله و M متغیر درون‌زا (Yها) و

ب) دارای K متغیر برون‌زا شامل متغیرهای توضیحی و از قبل تعیین‌شده می‌باشد.

حال یکی از معادلات ساختاری را در نظر بگیرید که دارای شرایط زیر است:

الف) دارای m متغیر درون‌زا است و

ب) دارای k متغیر برون‌زا می‌باشد.

بدین‌ترتیب برای معادله موردنظر، $(m-1)+k$ ضریب ساختاری را باید برآورد کنیم. این معادله دارای k ضریب برای متغیرهای برون‌زا و $m-1$ ضریب برای متغیرهای درون‌زا است، زیرا یکی از متغیرهای درون‌زا در سمت چپ معادله است که ضریب آن برابر با ۱ است.

از طرف دیگر در فرم خلاصه‌شده هر معادله، تابعی از تمام متغیرهای برون‌زای مدل (یعنی K متغیر) می‌باشد. بنابراین با برآورد معادله موردنظر، K ضریب فرم خلاصه‌شده به‌دست می‌آید. حال با استفاده از این اطلاعات (ضرایب فرم حل‌شده) می‌خواهیم $(m-1)+k$ ضریب ساختاری را به‌دست آوریم. به عبارت دقیق‌تر، می‌توان گفت که K اطلاعات و $(m-1)+k$ مجهول داریم. اگر $K \geq m+k-1$ باشد، امکان تعیین ضرایب ساختاری وجود دارد. این شرط معروف به شرط درجه‌ای برای شناسایی معادله موردنظر است. شرط درجه‌ای را به‌صورت $K \geq m+k-1$ یا $K-k \geq m-1$ می‌توان نوشت. شرط $K \geq m+k-1$ بدان معنا است که تعداد متغیرهای برون‌زای مدل (K) بزرگتر یا مساوی تعداد متغیرهای موجود در معادله مورد نظر (اعم از درون‌زا و برون‌زا) منهای ۱ باشد. شرط $K-k \geq m-1$ بیانگر آن است که «تعداد متغیرهای برون‌زای موجود در مدل ولی خارج از معادلهٔ موردنظر» بزرگتر یا مساوی با تعداد «متغیرهای درون‌زای موجود در معادله منهای ۱» باشد.

براساس شرط درجه‌ای می‌توان تقسیم‌بندی زیر را انجام داد.

[1] 1- order condition

۱-اگر $K-k < m-1$ باشد، معادلهٔ موردنظر نامشخص است.

۲-اگر $K-k = m-1$ باشد، معادلهٔ موردنظر دقیقاً مشخص است.

۳-اگر $K-k > m-1$ باشد، معادلهٔ موردنظر بیش از حد مشخص است.

شرط درجه‌ای را می‌توان با مقایسه $K+1$ و $m+k$ نیز بیان نمود. $K+1$ برابر با کل ضرایب فرم حل‌شده (شامل عرض از مبدأ) در معادله مورد نظر (یا برابر با کل متغیرهای برون‌زا به‌علاوهٔ عرض از مبدأ) و $m+k$ بیانگر تعدادمتغیرهای موجود در معادله مورد نظر می‌باشد. اگر $K+1<k+m$ باشد، معادله مورد نظر، نامشخص خواهد بود.

مثال ۱۹-۸: در مثال ۱۹-۱ دو معادله و دو متغیر درون‌زا ($M=2$) و یک متغیر برون‌زا ($K=1$) داریم. معادله مصرف هیچ متغیر برون‌زا ندارد ($k=0$) ولی دو متغیر درون‌زای C_t و Y_t دارد ($m=2$). بدین ترتیب برای معادله مصرف، با توجه به اینکه شرط درجه‌ای به‌صورت $K+1=k+m$ تأمین می‌شود، لذا دقیقاً مشخص می‌باشد.

مثال ۱۹-۹: در مثال ۱۱-۳، $M=2$ و $K=0$ است. چون برای معادله تقاضا $k=0$ و $m=2$ است. لذا $K+1=1$ و $k+m=2$ بوده و در نتیجه $K+1<k+m$ است که شرط درجه‌ای را تأمین نمی‌کند. برای معادله عرضه نیز همین شرایط برقرار است.

مثال ۱۹-۱۰: در مثال ۱۱-۴، $M=2$ و $K=1$ است. برای معادلات عرضه و تقاضا شرط درجه‌ای به‌صورت زیر است:

معادله تقاضا : $k=1, m=2 \Rightarrow K+1<m+k$

معادله عرضه : $k=0, m=2 \Rightarrow K+1=k+m$

بدین‌ترتیب، معادله تقاضا نامشخص و معادله عرضه دقیقاً مشخص است.

مثال ۱۹-۱۱: در مثال ۱۱-۵، $M=2$ و $K=1$ است.

معادله تقاضا : $k=1, m=2 \Rightarrow K+1=k+m$

معادله عرضه : $k=1, m=2 \Rightarrow K+1=k+m$

بدین‌ترتیب، هم معادله تقاضا و هم معادله عرضه دقیقاً مشخص هستند.

مثال ۱۹-۱۲: در مثال ۱۱-۶، $M=2$ و $K=3$ است.

معادله تقاضا : $k=1, m=2 \Rightarrow K+1>k+m$

معادله عرضه : $k=2, m=2 \Rightarrow K+1=k+m$

بدین ترتیب، معادله تقاضا بیش از حد مشخص و معادله عرضه دقیقاً مشخص است.

۳-۵-۱۹ شرط رتبه‌ای[1]

برای بررسی شرط رتبه‌ای و مفهوم آن، مثال زیر را در نظر بگیرید:

تقاضا : $Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$

عرضه : $Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$

قبلاً دیدیم که هم معادله تقاضا و هم معادله عرضه، نامشخص هستند. حال اگر به معادله تقاضا، درآمد (I_t) را اضافه کنیم آنگاه معادله عرضه، دقیقاً مشخص خواهد شد.

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 I_t + u_{1t}$$
$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_{2t}$$

اما این موضوع در صورتی درست است که واقعاً α_2 از لحاظ آماری معنادار باشد $(\alpha_2 \neq 0)$. اگر $\alpha_2 = 0$ باشد بدان معنا است که وارد کردن I_t فقط تغییر صورت مسئله است و ماهیت آن هیچ تغییری نکرده است. نتیجهٔ کلی آن است که اگر متغیر یا متغیرهای برون‌زایی که در معادله موردنظر وجود ندارد (مانند I_t در مثال فوق) دارای ضریب صفر یا دارای هرگونه ترکیب خطی بین ضرایب باشد، می‌تواند مشکل‌ساز باشد و علی‌رغم اینکه شرط درجه‌ای به ظاهر برقرار است ولی در اصل، کمکی به شناسایی معادله، نخواهد کرد. مثال فوق نشان می‌دهد که ضرایب متغیرهای خارج از معادلهٔ مورد نظر نباید برابر با صفر بوده و یا بین آنها محدودیت برقرار باشد. برای اطمینان از این موضوع، نیاز به بررسی شرط دیگری به نام شرط رتبه‌ای داریم.

شرط رتبه‌ای در صورتی تأمین می‌شود که هیچ ترکیب خطی بین ضرایب متغیرهای خارج از معادله موردنظر وجود نداشته باشد. بدین منظور لازم است که ماتریسی از ضرایب متغیرهای خارج از معادله موردنظر تشکیل داده و دترمینان آن را بررسی کنیم. برای تأمین شرط رتبه‌ای لازم است که این ماتریس لااقل یک دترمینان $(M-1)\times(M-1)$ مخالف صفر داشته باشد. به‌عبارت دیگر رتبه ماتریس مذکور برابر با $M-1$ باشد. برای بررسی دقیق‌تر شرط رتبه‌ای، مثال زیر را در نظر بگیرید.

1- rank condition

مثال ۱۳-۱۹: سیستم معادلات زیر را در نظر بگیرید[1]:

$$Y_{1t} - \beta_{10} - \beta_{12}Y_{2t} - \beta_{13}Y_{3t} - \gamma_{11}X_{1t} = u_{1t}$$
$$Y_{2t} - \beta_{20} - \beta_{23}Y_{3t} - \gamma_{21}X_{1t} - \gamma_{22}X_{2t} = u_{2t}$$
$$Y_{3t} - \beta_{30} - \beta_{31}Y_{1t} - \gamma_{31}X_{1t} - \gamma_{32}X_{2t} = u_{3t}$$
$$Y_{4t} - \beta_{40} - \beta_{41}Y_{1t} - \beta_{42}Y_{2t} - \gamma_{43}X_{3t} = u_{4t}$$

در این سیستم معادلات، $M=4$ و $K=3$ می‌باشد. برای هر یک از معادلات فوق، شرط درجه‌ای تأمین می‌شود. بدین منظور با توجه به $K+1=4$ و محاسبه $m+k$ برای هر معادله، خواهیم داشت:

معادله اول : $k=1, m=3 \Rightarrow K+1=m+k=4$ دقیقاً مشخص

معادله دوم : $k=2, m=2 \Rightarrow K+1=m+k=4$ دقیقاً مشخص

معادله سوم : $k=2, m=2 \Rightarrow K+1=m+k=4$ دقیقاً مشخص

معادله چهارم: $k=1, m=3 \Rightarrow K+1=m+k=4$ دقیقاً مشخص

حال شرط رتبه‌ای را بررسی می‌کنیم.

از آنجا که معادله اول شامل متغیرهای Y_4، X_2 و X_3 نمی‌باشد، لذا دترمینان ضرایب متغیرهای خارج از معادله اول عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -\gamma_{22} & 0 \\ 0 & -\gamma_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\gamma_{43} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$$ رتبه ماتریس A کمتر از $M-1=3$ می‌باشد

معادله دوم نیز شامل متغیرهای Y_1، Y_4 و X_3 نمی‌باشد، لذا ماتریس A عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta_{31} & 0 & 0 \\ -\beta_{41} & 1 & -\gamma_{41} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$$ رتبه ماتریس A کمتر از $M-1=3$ می‌باشد

معادله سوم شامل متغیرهای Y_2، Y_4 و X_3 نمی‌باشد، لذا ماتریس A عبارت است از:

$$A=\begin{bmatrix} -\beta_{12} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\beta_{42} & 1 & -\gamma_{43} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0 \Rightarrow$$ رتبه ماتریس A کمتر از $M-1=3$ می‌باشد

معادله چهارم شامل متغیرهای Y_3، X_1 و X_2 نمی‌باشد، لذا ماتریس A عبارت است از:

۱- این مثال از منبع زیر است:
گجراتی، دامودار، مبانی اقتصاد سنجی، جلد دوم، ترجمه دکتر حمید ابریشمی، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ سوم، ۱۳۸۲، ص ۸۵۷.

رتبه ماتریس A برابر با $M-1=3$ می‌باشد $\Leftarrow |A|\neq 0 \Leftarrow$

$$A=\begin{bmatrix} -\beta_{13} & -\gamma_{11} & 0 \\ -\beta_{23} & -\gamma_{21} & -\gamma_{22} \\ 1 & -\gamma_{31} & -\gamma_{32} \end{bmatrix}$$

براساس نتایج فوق می‌توان گفت که شرط رتبه‌ای برای معادلات اول، دوم و سوم تأمین نمی‌شود و لذا این معادلات نامشخص هستند. اما شرط رتبه‌ای برای معادله چهارم برقرار است و لذا معادله چهارم دقیقاً مشخص می‌باشد.

۱۹-۵-۴ تشخیص معادلات با استفاده از محدودیت روی ماتریس واریانس-کوواریانس

تاکنون دیدیم که اساس تشخیص معادلات ساختاری بر مبنای آن دسته از متغیرهایی است که در سیستم معادلات وجود دارند ولی از معادله موردنظر حذف شده‌اند. از آنجا که حذف یک متغیر به معنای آن است که ضریب آن متغیر برابر صفر است، لذا می‌توان گفت که مسئله تشخیص یک معادله ساختاری به معنای وجود «محدودیت‌های صفر» بر روی برخی از ضرایب است. البته می‌توان به‌جای محدودیت صفر از ترکیب خطی بین ضرایب نام برد. علاوه بر این، می‌توان مسئله تشخیص را از طریق محدودیت‌هایی که بر روی برخی از عناصر ماتریس واریانس-کوواریانس اعمال می‌شود، بررسی نمود. این بحث را با استفاده از سیستم معادلات عرضه و تقاضا بررسی می‌کنیم.

تقاضا : $Q_t=\alpha_0+\alpha_1 P_t+\alpha_2 I_t+u_{1t}$

عرضه : $Q_t=\beta_0+\beta_1 P_t+u_{2t}$

در بررسی مسئله تشخیص معادلات دیدیم که معادله تقاضا نامشخص ولی معادله عرضه، دقیقاً مشخص است حال محدودیت دیگری را به این سیستم معادلات اضافه می‌کنیم که طبق آن، u_1 و u_2 مستقل هستند:

$$\text{cov}(u_{1t},u_{2t})=E(u_{1t}u_{2t})=0$$

این محدودیت کمک می‌کند تا بتوانیم علی‌رغم نامشخص بودن معادله تقاضا، ضرایب ساختاری آن را تعیین کنیم، زیرا یک اطلاعات اضافی به ما می‌دهد.

بدین منظور، فرم حل‌شدهٔ معادلات عرضه و تقاضا را به‌صورت زیر می‌نویسیم[1]:

۱- این مثال از Kmenta(1990) می باشد.

$$P_t=\pi_0+\pi_1 I_t+v_{1t}$$
$$Q_t=\pi_2+\pi_3 I_t+v_{2t}$$

رابطه بین ضرایب فرم حل‌شده و ضرایب ساختاری به‌صورت زیر است:

$$\pi_0=\alpha_0+\alpha_1\pi_1=\frac{\beta_0-\alpha_0}{\alpha_1-\beta_1} \quad \text{یا} \quad \pi_0=\beta_1+\beta_1\pi_1$$

$$\pi_1=\beta_1\pi_3=\frac{-\alpha_2}{\alpha_1-\beta_1} \quad \text{یا} \quad \pi_1=\alpha_1\pi_3+\alpha_2$$

$$\pi_2=\beta_0+\beta_1\pi_0=\frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}$$

$$\pi_3=\frac{-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}$$

هم‌چنین با استفاده از روابط فوق، می‌توان ضرایب ساختاری را بر حسب ضرایب فرم حل‌شده، نوشت:

$$\beta_1=\frac{\pi_1}{\pi_3} \quad , \quad \beta_0=\pi_2-\frac{\pi_0\pi_3}{\pi_1}$$
$$\alpha_0=\pi_0-\alpha_1\pi_1 \ , \ \alpha_2=\pi_1-\alpha_1\pi_3$$

بدیهی است که از آنجا که معادله عرضه دقیقاً مشخص است، ضرایب آن (β_0 و β_1) قابل تعیین هستند. اما معادله تقاضا نامشخص است و لذا ضرایب آن قابل تعیین نیستند. اما روابط فوق نشان می‌دهد که اگر مقدار α_1 را داشته باشیم (یعنی یک اطلاعات اضافی داشته باشیم) آنگاه α_0 و α_2 نیز قابل تعیین خواهند بود. این اطلاعات اضافی می‌تواند به هر شکلی باشد، مثلاً اینکه u_1 و u_2 مستقل‌اند.

در فرم حل‌شده، v_{1t} و v_{2t} عبارتند از:

$$v_{1t}=\frac{-\beta_1 u_{1t}+\alpha_1 u_{2t}}{\alpha_1-\beta_1} \quad , \quad v_{2t}=\frac{-u_{1t}+u_{2t}}{\alpha_1-\beta_1}$$

براین اساس، می‌توان u_{1t} و u_{2t} را به‌صورت زیر نوشت:

$$u_{1t}=v_{1t}-\alpha_1 v_{2t} \quad , \quad u_{2t}=v_{1t}-\beta_1 v_{2t}$$

با توجه به محدودیت $\text{cov}(u_{1t},u_{2t})=E(u_{1t}u_{2t})=0$ خواهیم داشت:

$$E(u_{1t}u_{2t})=E[(v_{1t}-\alpha_1 v_{2t})(v_{1t}-\beta_1 v_{2t})]=0$$

$$E\left[v_{1t}^{2}-(\alpha_{1}+\beta_{1})v_{1t}v_{2t}+\alpha_{1}\beta_{1}v_{2t}^{2}\right]=0$$
$$E(v_{1t}^{2})-(\alpha_{1}+\beta_{1})E(v_{1t}v_{2t})+\alpha_{1}\beta_{1}E(v_{2t}^{2})=0$$
$$\sigma_{1}^{2}-(\alpha_{1}+\beta_{1})\sigma_{12}+\alpha_{1}\beta_{1}\sigma_{2}^{2}=0$$

که σ_1^2 و σ_2^2 به‌ترتیب واریانس v_{1t} و v_{2t} و σ_{12} کوواریانس v_{1t} و v_{2t} در معادلات فرم حل‌شده، می‌باشند. با توجه به $\beta_1=\frac{\pi_1}{\pi_3}$ خواهیم داشت:

$$\sigma_{1}^{2}-(\alpha_{1}+\frac{\pi_{1}}{\pi_{3}})\sigma_{12}+\alpha_{1}\frac{\pi_{1}}{\pi_{3}}\sigma_{2}^{2}=0 \;\Rightarrow\; \alpha_{1}=\frac{\pi_{1}\sigma_{12}-\pi_{3}\sigma_{1}^{2}}{\pi_{1}\sigma_{2}^{2}-\pi_{3}\sigma_{12}}$$

بدین ترتیب مقدار α_1 به‌دست می‌آید که بر اساس آن می‌توان α_0 و α_2 را نیز به‌دست آورد.

۶-۱۹ تخمین سیستم معادلات همزمان

برای تخمین سیستم معادلات همزمان، دو روش وجود دارد: روش تک معادله‌ای و روش سیستمی.

۱- روش‌های تک معادله‌ای یا روش‌های با اطلاعات محدود

الف) روش حداقل مربعات معمولی (OLS) برای مدل‌های بازگشتی[1].

ب) روش حداقل مربعات غیرمستقیم (ILS)[2] برای معادلات دقیقاً مشخص.

ج) روش متغیرهای ابزاری (IV)[3].

د) روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای (2SLS)[4].

هـ) روش حداکثر درست نمایی با اطلاعات محدود (LIML)[5].

۲- روش‌های سیستمی یا روش‌های با اطلاعات کامل

الف) روش حداقل مربعات سه مرحله‌ای (3SLS)[6].

ب) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML)[7].

1- recursive model
2- indirect least squares
3- instrumental variables
4- two-stage least squares
5- limited information maximum likelihood
6- three-stage least squares
7- full information maximum likelihood

۱-۶-۱۹ روش‌های تک معادله‌ای

در روش‌های تک معادله‌ای یا روش‌های با اطلاعات محدود، هر یک از معادلات فقط با توجه به محدودیت‌های معادله موردنظر و بدون توجه به محدودیت‌های سایر معادلات برآورد می‌شود. به‌عنوان مثال در مثال ۵-۱۱، معادله تقاضا با توجه به اینکه ضریب متغیر مالیات (T) در معادله تقاضا برابر صفر است برآورد می‌شود و معادله عرضه نیز با توجه به صفر بودن ضریب متغیر درآمد(I) در معادله عرضه، برآورد می‌شود. بدیهی است که بدون داشتن این اطلاعات (یعنی صفر بودن ضریب T در معادله تقاضا)، معادله تقاضا نامشخص می‌باشد، اما دانستن اینکه ضریب I در معادله عرضه برابر صفر است، هیچ کمکی به برآورد معادله تقاضا نمی‌کند.

الف) تخمین سیستم معادلات بازگشتی با روش OLS

سیستم معادلات بازگشتی یا سیستم مثلثی، نوع خاصی از سیستم معادلات همزمان است که در آن رابطهٔ دو سویه بین متغیرهای درون‌زا وجود ندارد. در واقع علیرغم آنکه تحت عنوان معادلات همزمان مطرح می‌شوند، ولی عملاً همزمانی وجود نخواهد داشت. به‌عنوان مثال Y_{it} تابعی از Y_{jt} است ولی عکس آن برقرار نمی‌باشد. در سیستم معادلات بازگشتی نظم خاصی برقرار است، بدین صورت که Y_1 فقط تابعی از متغیرهای برون‌زا است، Y_2 تابعی از متغیرهای برون‌زا و Y_1 است، Y_3 تابعی از متغیرهای برون‌زا و Y_1 و Y_2 است، Y_4 تابعی از متغیرهای برون‌زا و Y_1 و Y_2 و Y_3 است و ... Y_M نیز تابعی از متغیرهای برون‌زا و Y_1 و Y_2 و... و Y_{M-1} می‌باشد. به عبارت دیگر ضرایب متغیرهای درون‌زا (β_{ij} ها) یک حالت مثلثی را تشکیل می‌دهند:

	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_{M-1}	Y_M
معادله اول (Y_1)	-	0	0	...	0	0
معادله دوم (Y_2)	β_{21}	-	0	...	0	0
معادله سوم (Y_3)	β_{31}	β_{32}	-	...	0	0
⋮ ⋮						
معادله Mام (Y_M)	β_{M1}	β_{M2}	β_{M3}	...	β_{M-1}	-

توجه شود که هر معادله، تابعی از متغیرهای برون‌زا نیز می‌باشد که در جدول فوق نشان داده نشده است.

با توجه به ویژگی خاص سیستم معادلات بازگشتی و با این فرض که جملات خطای این معادلات همبستگی نداشته باشند، می‌توان هر یک از معادلات را با روش OLS برآورد نمود، زیرا

الف) معادله اول شامل هیچ متغیر درون‌زا نمی‌باشد و چون متغیرهای برون‌زا مستقل از جملهٔ خطا (u_{1t}) می‌باشند، لذا با OLS برآورد می‌شود.

ب) معادله دوم شامل متغیر درون‌زای Y_1 است، اما چون Y_1 هیچ رابطه‌ای با u_{2t} ندارد (زیرا Y_2 در معادله اول وجود ندارد)، لذا امکان برآورد آن با روش OLS وجود دارد.

ج) معادله سوم شامل متغیر درون‌زای Y_1 و Y_2 است، اما چون Y_1 و Y_2 هیچ رابطه‌ای با u_{3t} ندارند (زیرا Y_3 نه در معادله اول و نه در معادله دوم وارد نشده است)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با روش OLS وجود دارد.

د) معادله Mام شامل متغیرهای درون‌زای Y_1 تا Y_{M-1} می‌باشد، اما چون Y_1، Y_2، ... و Y_{M-1} هیچ رابطه‌ای با u_{Mt} ندارند (زیرا Y_M در هیچ یک از معادلات قبلی وارد نشده است)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با روش OLS وجود دارد.

مثال ۱۴-۱۹: سیستم معادلات زیر، یک سیستم بازگشتی یا مثلثی را تشکیل می‌دهد:

$$Y_{1t} = \beta_{10} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{21} X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_{20} + \beta_{21} Y_{1t} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{21} X_{2t} + u_{2t}$$
$$Y_{3t} = \beta_{30} + \beta_{31} Y_{1t} + \beta_{32} Y_{2t} + \gamma_{11} X_{1t} + \gamma_{21} X_{2t} + u_{3t}$$

سیستم معادلات فوق در واقع شبیه به سیستم معادلات همزمان است، در حالی که همزمانی وجود ندارد. زیرا هیچ‌گونه رابطهٔ دو سویه‌ای بین Y_1 و Y_2 و Y_3 وجود ندارد. در اینجا Y_2 تابعی از Y_1 است، در حالی که Y_1 تابع Y_2 نیست. Y_3 نیز تابعی از Y_1 و Y_2 است در حالی که Y_1 و Y_2 تابع Y_3 نیستند.

فرض کنید که جملات خطای این معادلات، همبستگی نداشته باشند. در این صورت می‌توان هریک از این معادلات را با روش OLS برآورد نمود، زیرا:

الف) معادله اول شامل هیچ متغیر درون‌زا نمی‌باشد و چون X_1 و X_2 مستقل از u_1 هستند، لذا با OLS برآورد می‌شود.

ب) معادله دوم شامل متغیر درون‌زای Y_1 می‌باشد، اما چون Y_1 هیچ رابطه‌ای با u_2 ندارد (زیرا Y_2 در معادله اول وجود ندارد)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با OLS وجود دارد.

ج) معادله سوم شامل متغیرهای درون‌زای Y_1 و Y_2 می‌باشد، اما چون Y_1 و Y_2 هیچ رابطه‌ای با u_3 ندارند (زیرا Y_3 نه در معادله اول و نه در معادله دوم وارد نشده است)، لذا امکان برآورد ضرایب آن با OLS وجود دارد.

ب) تخمین معادلات همزمان با روش حداقل مربعات غیرمستقیم (ILS)

اگر در یک سیستم معادلات همزمان هر یک از معادلات، دقیقاً مشخص باشند، در این صورت می‌توان آنها را با روش حداقل مربعات غیرمستقیم (ILS) برآورد نمود. همان‌طور که دیدیم، چون یک یا چند متغیر درون‌زا به‌عنوان متغیر توضیحی در سمت راست معادله ساختاری وارد می‌شوند و از آنجا که این متغیرها مستقل از جملهٔ خطای آن معادله نیستند، لذا فروض کلاسیک را نقض کرده و تخمین‌زننده‌های OLS دارای اریب خواهند بود. اما اگر فرم حل‌شده را برای هر یک از این معادلات بنویسیم، آنگاه هر متغیر درون‌زا صرفاً بر حسب متغیرهای برون‌زا به‌دست می‌آید که مستقل از جملات خطا هستند. بنابراین می‌توان با روش OLS تخمین‌زننده‌های نااریب برای ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آورد. از طرف دیگر چون هر یک از معادلات، دقیقاً مشخص هستند، لذا می‌توان ضرایب ساختاری را با استفاده از ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آورد.

مثال ۱۵-۱۹: در مثال ۵-۱۹ دو معادلهٔ عرضه و تقاضا دقیقاً مشخص هستند، لذا همان‌طور که دیدیم، با برآورد ضرایب فرم حل‌شده می‌توان برای هر یک از ضرایب ساختاری، به یک جواب منحصر به‌فرد رسید.

نکته قابل توجه در روش ILS این است که وقتی فرم حل‌شده را می‌نویسیم، هر یک از متغیرهای درون‌زا بر حسب «تمام متغیرهای برون‌زای موجود در مدل» بیان می‌شوند. به‌عنوان مثال در مثال ۱۵-۱۹ هریک از متغیرهای درونزا (Q_t, P_t) بر حسب تمام متغیرهای برون‌زای موجود در مدل (T_t, I_t) بیان شده‌اند.

ج) برآورد معادلات بیش از حد مشخص با روش 2SLS

اگر هر یک از معادلات در یک سیستم همزمان، بیش از حد مشخص باشند، می‌توان آنها را با روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای (2SLS) برآورد نمود. همان‌طور که در بخش قبلی دیدیم، برای یک سیستم دقیقاً مشخص، از ILS استفاده می‌کنیم که اساس آن، برآورد معادلات فرم حل‌شده با روش OLS و سپس محاسبه ضرایب ساختاری با استفاده از ضرایب فرم حل‌شده است. در روش ILS برای حل مشکل همبستگی بین متغیر درون‌زای توضیحی با جملات اختلال، از فرم حل‌شده استفاده می‌شود. در روش 2SLS نیز تقریباً همین منطق حاکم است. در یک معادلهٔ بیش

از حد مشخص اگر روش ILS را استفاده کنیم، برای ضرایب ساختاری بیش از یک جواب به‌دست می‌آید که نمی‌توان به سادگی از بین آنها یکی را انتخاب نمود. در واقع به خاطر داشتن اطلاعات اضافی و استفادهٔ جداگانه از این اطلاعات، به جواب‌های جداگانه می‌رسیم، حال اگر در ابتدا این اطلاعات را با هم تلفیق کنیم و به‌صورت یکجا مورد استفاده قرار دهیم، آنگاه به یک جواب خواهیم رسید.

برای توصیف روش 2SLS مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + u_{2t}$$

هر دو معادله، بیش از حد مشخص هستند، زیرا با توجه به $M = 2$ و $K = 4$ خواهیم داشت:

معادله اول: $k = 2 \quad , \quad m = 2 \quad , \quad K - k = 2 > m - 1 = 1$

معادله دوم: $k = 2 \quad , \quad m = 2 \quad , \quad K - k = 2 > m - 1 = 1$

اگر فرم حل‌شده را بنویسیم دارای ۱۰ ضریب می‌باشد که بیش از تعداد ضرایب ساختاری (یعنی ۸ ضریب) است. فرم حل‌شده عبارت است از:

$$Y_{1t} = \pi_0 + \pi_1 X_{1t} + \pi_2 X_{2t} + \pi_3 X_{3t} + \pi_4 X_{4t} + v_{1t}$$
$$Y_{2t} = \pi_5 + \pi_6 X_{1t} + \pi_7 X_{2t} + \pi_8 X_{3t} + \pi_9 X_{5t} + v_{2t}$$

اگر π_iها را از روش ILS برآورد کرده و سپس ضرایب ساختاری (αها و βها) را حساب کنیم، آنگاه برای هر یک از آنها بیش از یک جواب به‌دست می‌آید. برای حل این مشکل، از یک روش دو مرحله‌ای استفاده می‌شود:

الف) ابتدا معادلات فرم حل‌شده را با روش OLS برآورد کرده که $\hat{\pi}_i$ها به‌دست می‌آیند، سپس روابط زیر را می نویسیم:

$$Y_{1t} = \hat{Y}_{1t} + \hat{v}_{1t}$$
$$Y_{2t} = \hat{Y}_{2t} + \hat{v}_{2t}$$

ب) در سیستم معادلات ساختاری، در سمت چپ به‌جای Y_{1t} و Y_{2t} قرار می‌دهیم:

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1(\hat{Y}_{2t} + \hat{v}_{2t}) + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1(\hat{Y}_{1t} + \hat{v}_{1t}) + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + u_{2t}$$

با ساده کردن معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + \alpha_3 X_{2t} + \varepsilon_{1t} \quad , \quad \varepsilon_{1t} = u_{1t} + \alpha_1 \hat{v}_{2t}$$
$$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 \hat{Y}_{1t} + \beta_2 X_{3t} + \beta_3 X_{4t} + \varepsilon_{2t} \quad , \quad \varepsilon_{2t} = u_{2t} + \beta_1 \hat{v}_{1t}$$

توجه داریم که چون $\hat{Y}_{1t}$ و $\hat{Y}_{2t}$ فقط تابعی از متغیرهای برون‌زا هستند، لذا مستقل از جملات خطا می‌باشند. بنابراین می‌توان ضرایب آنها را با روش OLS برآورد نمود.

روش فوق موسوم به روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای است که در آن، دوبار از روش OLS استفاده می‌شود. بدیهی است که اگر معادلات، دقیقاً مشخص باشند، تخمین‌های روش 2SLS با ILS یکسان خواهد بود.

د) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود (LIML)

در فصول قبلی روش حداکثر درستنمایی برای تخمین معادله رگرسیون یک متغیره و K متغیره، توضیح داده شد. در سیستم معادلات همزمان نیز می‌توان هر یک از معادلات را با روش حداکثر درستنمایی تخمین زد که در اینجا معروف به روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود (LIML) می‌باشد. این روش مبتنی بر حداکثر نمودن تابع درستنمایی برای مشاهدات مربوط به متغیرهای درون‌زای موجود در معادله موردنظر، می‌باشد. اطلاعات محدود بدان معنا است که در تشکیل تابع درستنمایی خود را محدود به آن دسته از متغیرهای درون‌زا می‌کنیم که در معادله موردنظر وارد شده‌اند و توجهی به محدودیت‌هایی که در سایر معادلات ساختاری وجود دارد نمی‌کنیم.

۱۹-۶-۲ روش‌های سیستمی

در روش‌های سیستمی، برای تخمین ضرایب از تمام اطلاعات موجود در سیستم معادلات استفاده می‌شود در اینجا دو روش را بررسی می‌کنیم که شامل روش حداقل مربعات سه مرحله‌ای (3SLS) و روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML) می‌باشد. در این بخش توصیف مختصری از این روش‌ها را ارائه می‌کنیم. جزئیات بیشتر در ضمیمهٔ این فصل ارائه شده است.

الف) روش حداقل مربعات سه مرحله‌ای (3SLS)[1]

روش 3SLS یکی از روش‌های سیستمی برای برآورد معادلات همزمان است. روش‌های تک‌معادله‌ای، روش‌های سازگار هستند اما کارایی مجانبی ندارند. یعنی با افزایش حجم نمونه،

1- three stage least squares

اریب و واریانس آنها به سمت صفر میل می‌کند، لذا سازگارند، اما چون حداقل واریانس را ندارند لذا از کارایی برخوردار نیستند. دلیل عدم کارایی مجانبی آنها در نادیده گرفتن همبستگی جملات خطای معادلات است. یعنی فرض بر این است که جمله خطای یک معادله با جملهٔ خطای سایر معادلات، همبستگی ندارد. این بحث مشابه با آن است که سیستم معادلات به ظاهر نامرتبط را با روش OLS برآورد کنیم، زیرا همبستگی بین جملات خطا را نادیده گرفته‌ایم. اگر همبستگی بین جملات خطای معادلات ساختاری را نادیده بگیریم، در این صورت از تمام اطلاعات موجود در هر معادله استفاده نکرده‌ایم و لذا به‌کارایی مجانبی نخواهیم رسید.

روش 3SLS در سه مرحله انجام می‌شود:

۱- تخمین فرم حل‌شده برای متغیرهای درون‌زای موجود در هر معادله. به‌عنوان مثال برای معادله jام اگر $\mathbf{Y}_j$ بردار متغیرهای درون‌زای موجود در آن معادله باشد، ابتدا با روش OLS معادله $\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}\boldsymbol{\pi}_j + \mathbf{v}_j$ را برآورد می‌کنیم. توجه شود که هر یک از Y_{ij}ها را روی تمام متغیرهای برون‌زا برازش می‌کنیم.

۲- $\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\pi}}_j$ را حساب کرده و $\hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{v}}_j$ را در معادله موردنظر (معادله jام) به‌جای $\mathbf{Y}_j$ قرار می‌دهیم و ضرایب آن را برآورد می‌کنیم. این برآوردها همان تخمین‌های 2SLS هستند. با استفاده از این برآوردها، خطاهای معادله موردنظر را حساب کرده و سپس واریانس و کوواریانس بین جملات خطا (یعنی $\hat{\sigma}_{ij}$ها) را محاسبه می‌کنیم. ماتریس واریانس-کوواریانس جملات خطا به‌صورت $E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = \boldsymbol{\Sigma}_t$ تعریف می‌شود که عناصر $\boldsymbol{\Sigma}_t$ معادل با $E(u_{it}u_{jt}) = \sigma_{ij}$ هستند.

۳- از روش حداقل مربعات وزنی (GLS) برای برآورد ضرایب سیستم معادلات استفاده می‌کنیم که وزن‌ها معادل با $\hat{\sigma}_{ij}$ها هستند.

ب) برآورد سیستم معادلات همزمان با روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML)[1]

در این روش از تابع درستنمایی استفاده می‌شود که از تابع احتمال جملات خطای تمام معادلات استخراج می‌شود. با حداکثر نمودن این تابع، تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی به‌دست می‌آید. جزئیات این روش در ضمیمه این فصل ارائه شده است.

1- full Information maximum likelihood

تخمین معادلات همزمان در Eviews فایل data5

به‌منظور تخمین ضرایب یک سیستم معادلات همزمان، ابتدا از منوی Object پنجره New Object را باز می‌کنیم:

New Object
Type of object: Equation, Factor, Graph, Group, LogL, Matrix-Vector-Coef, Model, Pool, Sample, Scalar, Series, Series Link, Series Alpha, Spool, SSpace, String, SVector, System, Table, Text, ValMap, VAR
Name for object: Untitled
OK Cancel

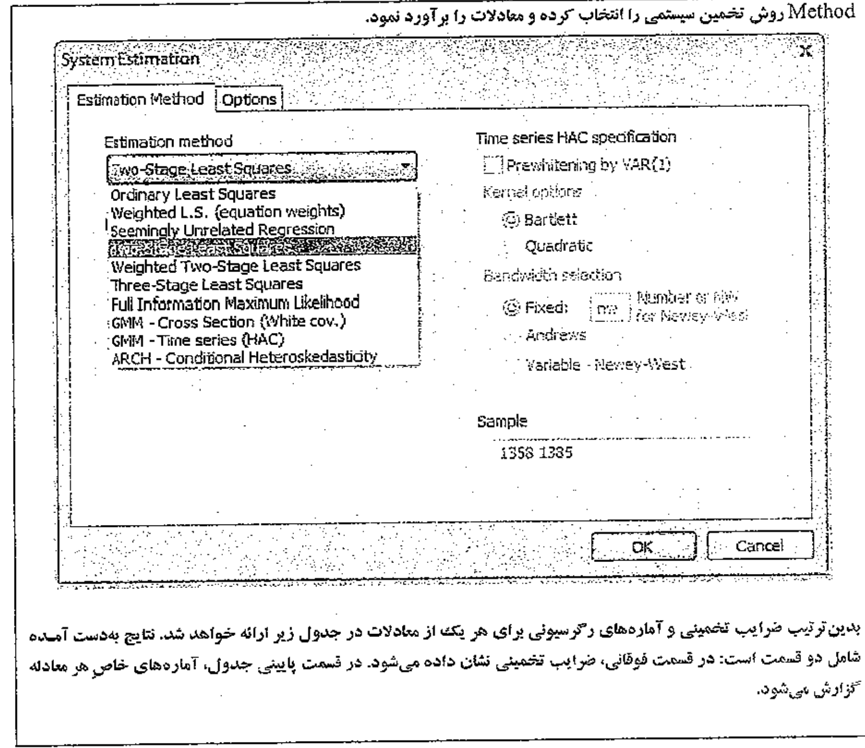
در پنجره New Object، گزینه System را انتخاب می‌کنیم. در پنجره System، معادلات را مانند شکل زیر وارد می‌کنیم. در سطر اول، عبارت inst بیانگر متغیرهای ابزاری است که شامل متغیرهای برونزا و از قبل تعیین‌شده، می‌باشد. در سطرهای بعدی معادلات را وارد می‌کنیم.

System: SYS03 Workfile: DATA5::Untitled
View Proc Object Print Name Freeze InsertTxt Estimate Spec Stats Resids

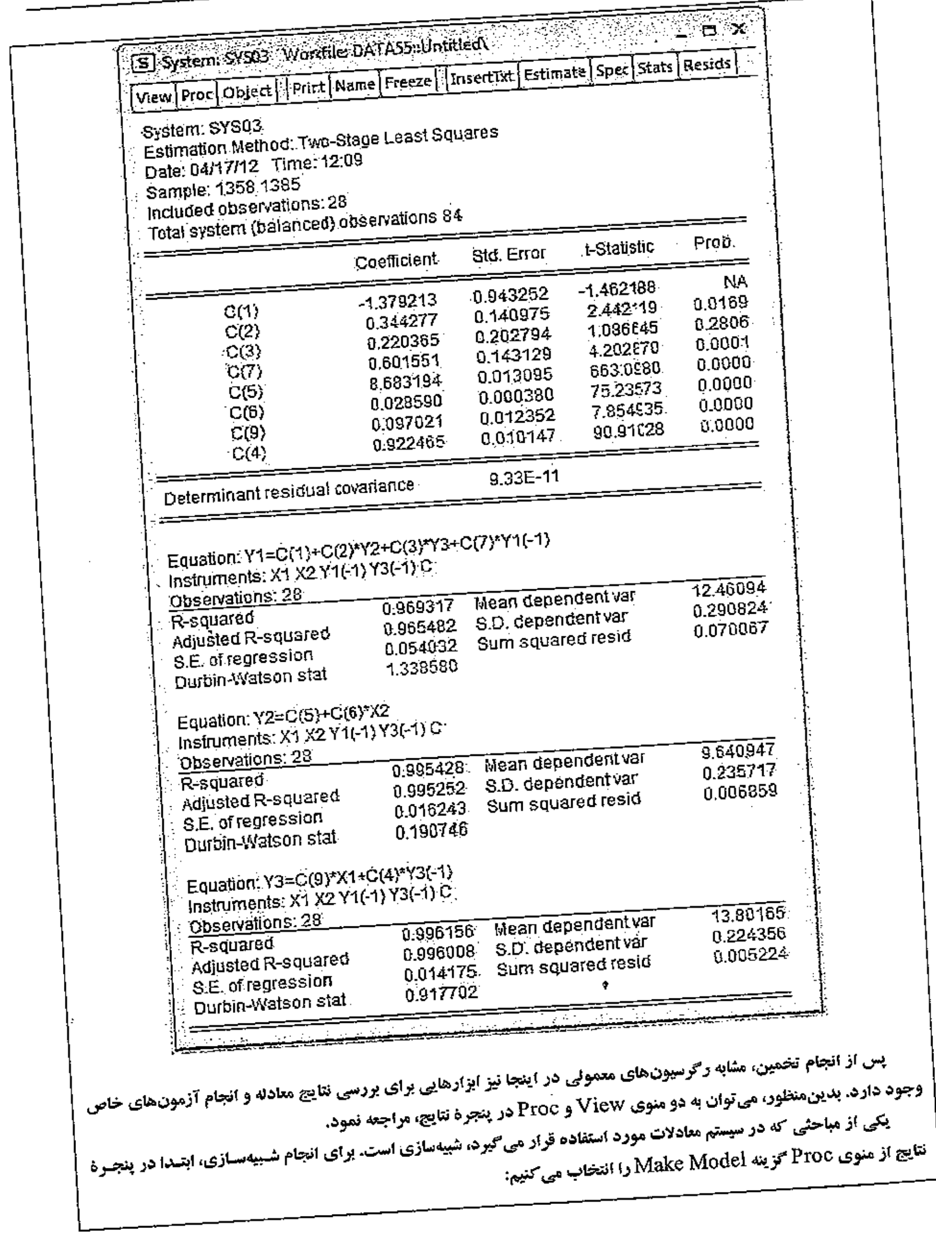
```
inst x1 x2 y1(-1) y3(-1)
y1=c(1)+c(2)*y2+c(3)*y3+c(7)*y1(-1)
y2=c(5)+c(6)*x2
y3=c(9)*x1+c(4)*y3(-1)
```

در این پنجره، با انتخاب Name می‌توان یک نام دلخواه برای سیستم معادلات انتخاب نمود. در پنجره System اگر گزینه Estimate را انتخاب کنیم، پنجره System Estimation باز می‌شود. در این پنجره می‌توان از گزینه Estimation

Method روش تخمین سیستمی را انتخاب کرده و معادلات را برآورد نمود.



بدین‌ترتیب ضرایب تخمینی و آماره‌های رگرسیونی برای هر یک از معادلات در جدول زیر ارائه خواهد شد. نتایج به‌دست آمده شامل دو قسمت است: در قسمت فوقانی، ضرایب تخمینی نشان داده می‌شود. در قسمت پایینی جدول، آماره‌های خاص هر معادله گزارش می‌شود.



System: SYS03 Workfile: DATA55::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | InsertTxt | Estimate | Spec | Stats | Resids

System: SYS03
Estimation Method: Two-Stage Least Squares
Date: 04/17/12 Time: 12:09
Sample: 1358 1385
Included observations: 28
Total system (balanced) observations 84

	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-1.379213	0.943252	-1.462188	NA
C(2)	0.344277	0.140975	2.442119	0.0169
C(3)	0.220365	0.202794	1.086645	0.2806
C(7)	0.601551	0.143129	4.202870	0.0001
C(5)	8.683194	0.013095	663.0880	0.0000
C(6)	0.028590	0.000380	75.23573	0.0000
C(9)	0.097021	0.012352	7.854635	0.0000
C(4)	0.922465	0.010147	90.91028	0.0000

Determinant residual covariance 9.33E-11

Equation: Y1=C(1)+C(2)*Y2+C(3)*Y3+C(7)*Y1(-1)
Instruments: X1 X2 Y1(-1) Y3(-1) C
Observations: 28

R-squared	0.969317	Mean dependent var	12.46094
Adjusted R-squared	0.965482	S.D. dependent var	0.290824
S.E. of regression	0.054032	Sum squared resid	0.070067
Durbin-Watson stat	1.338580		

Equation: Y2=C(5)+C(6)*X2
Instruments: X1 X2 Y1(-1) Y3(-1) C
Observations: 28

R-squared	0.995428	Mean dependent var	9.640947
Adjusted R-squared	0.995252	S.D. dependent var	0.235717
S.E. of regression	0.016243	Sum squared resid	0.006859
Durbin-Watson stat	0.190746		

Equation: Y3=C(9)*X1+C(4)*Y3(-1)
Instruments: X1 X2 Y1(-1) Y3(-1) C
Observations: 28

R-squared	0.996156	Mean dependent var	13.80165
Adjusted R-squared	0.996008	S.D. dependent var	0.224356
S.E. of regression	0.014175	Sum squared resid	0.005224
Durbin-Watson stat	0.917702		

پس از انجام تخمین، مشابه رگرسیون‌های معمولی در اینجا نیز ابزارهایی برای بررسی نتایج معادله و انجام آزمون‌های خاص وجود دارد. بدین‌منظور، می‌توان به دو منوی View و Proc در پنجرهٔ نتایج، مراجعه نمود.

یکی از مباحثی که در سیستم معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرد، شبیه‌سازی است. برای انجام شبیه‌سازی، ابتدا در پنجرهٔ نتایج از منوی Proc گزینه Make Model را انتخاب می‌کنیم:

Model: UNTITLED Workfile: DATA55::Untitled
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Solve | Scenarios | Equations | Variables | Text
Equations: 3 Baseline
SYS03 Eq1.. y1, y2, y3 = F(x1, x2, y1, y2, y3)

در این پنجره، عبارت SYS03 نام سیستم معادلات ما است که قبلاً برآورد شده است. توجه شود که اگر روابط دیگری را نیاز داشته باشیم می‌توان با کلیک راست و انتخاب Insert آنها را وارد نمود.
حال با استفاده از منوی Solve، مدل را حل می‌کنیم. با انتخاب Solve پنجره Model Solution باز می‌شود. در این پنجره، گزینه‌های مورد نظر را انتخاب کرده و مدل را حل می‌کنیم.

Model Solution
Basic Options | Stochastic Options | Tracked Variables | Diagnostics | Solver
Simulation type: Deterministic / Stochastic
Dynamics: Dynamic solution / Static solution / Fit (static - no eq interactions) / Structural (ignore ARMA)
Solution sample: Workfile sample used if left blank
Solution scenarios & output: Active: Baseline — Edit Scenario Options
Solve for Alternate along with Active — Alternate: Baseline — Edit Scenario Options
Add/Delete Scenarios
OK | Cancel

همچنین با انتخاب گزینه Solver برای شبیه‌سازی درون نمونه‌ای از گزینه actual و برای پیش‌بینی برون‌نمونه‌ای از گزینه Previous Period's solution استفاده نمود.

Model Solution
Basic Options | Stochastic Options | Tracked Variables | Diagnostics | Solver
Solution algorithm: Newton — Order simultaneous blocks for minimum feedback — Use analytic derivatives
Preferred solution starting values: Actuals / Previous period's solution — Initialize Excluded from Actuals
Forward solution: Terminal conditions: User supplied in Actuals — Solve model in both directions
Solution control: Max iterations: 5000 — Convergence: 1e-8 — Stop solve on missing data — Missing data always stops stochastic solves
Solution round-off: Round solutions to 7 digits — Round solutions less than 1e-7 in absolute value to zero
OK | Cancel

علاوه بر این باید توجه داشت که در شبیه‌سازی‌ها، نیاز به ارائه سناریوهای مختلف داریم. این سناریوها را می‌توان در پنجره Model Solution تعریف نمود. در این خصوص معمولاً یک سناریو پایه داریم که با نام Baseline معرفی می‌شود. برای معرفی هر سناریو، بایستی متغیرهای برونزا را در پنجره Model Solution در قسمت Tracked Variable وارد نمود.

Model Solution
Basic Options | Stochastic Options | Tracked Variables | Diagnostics | Solver
Tracked variables (create aliased output series based on the listed endogenous)
Track all endogenous variables
Track only the endogenous variables listed below
OK | Cancel

اما برای سایر سناریوها به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱- برای افزودن یک سناریو از گزینه add/delete scenarios استفاده می‌کنیم.

۲- به‌عنوان مثال برای تعریف سناریو ۱ مشابه سناریو پایه عمل می‌کنیم، ولی در معرفی و تعریف متغیرهای برونزا بایستی نام متغیر مورد نظر را به‌گونه‌ای وارد کنیم که با سناریو پایه، متفاوت باشد. مثلاً اگر متغیر X در سناریو پایه به‌عنوان متغیر برونزا معرفی شده است در سناریو ۱ آن را با X_1 وارد می‌کنیم.

۳- مدل را حل کرده و با استفاده از گزینه Proc نمودارها را ترسیم کرده و با سناریو پایه مقایسه می‌کنیم.

ضمیمه فصل نوزدهم

از آنجا که بررسی جزئیات سیستم معادلات همزمان و روش‌های تخمین آن، نیاز به استفاده از جبر ماتریس است. در این فصل برای رعایت سادگی، عمدتاً از یک شیوه توصیفی همراه با مثال استفاده شد. اما در این بخش با استفاده از جبر ماتریس به بررسی بیشتر این موضوعات می‌پردازیم. البته ممکن است برخی از مباحث، جنبهٔ تکراری داشته باشد، ولی از آنجا که شیوهٔ ارائه آنها متفاوت است، می‌تواند برای توصیف دقیق‌تر موضوعات، مفید باشد.[1]

۱- سیستم معادلات همزمان

سیستم معادلات همزمان زیر را در نظر بگیرید که شامل M معادله و M متغیر درون‌زا (Y) و K متغیر برون‌زا (X) می‌باشد:

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}Y_{t1}+\gamma_{21}Y_{t2}+\cdots+\gamma_{M1}Y_{tM}+\beta_{11}X_{t1}+\cdots+\beta_{K1}X_{tK}=u_{t1}\\
&\gamma_{12}Y_{t1}+\gamma_{22}Y_{t2}+\cdots+\gamma_{M2}Y_{tM}+\beta_{12}X_{t1}+\cdots+\beta_{K2}X_{tK}=u_{t2}\\
&\vdots\\
&\gamma_{1M}X_{t1}+\gamma_{2M}X_{t2}+\cdots+\gamma_{MM}X_{tM}+\beta_{1M}X_{t1}+\cdots+\beta_{KM}X_{tK}=u_{tM}
\end{aligned} \qquad (1)$$

$u_{t1},\dots,u_{tM}$ جملات خطا هستند. شکل ماتریسی سیستم معادلات برای مشاهده tام عبارت است از:

$$[Y_{t1}\ \ Y_{t2}\ \cdots\ Y_{tM}]\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{21} & \cdots & \gamma_{M1}\\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{M2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \gamma_{1M} & \gamma_{2M} & \cdots & \gamma_{MM}\end{bmatrix} + [X_{t1}\ \ X_{t2}\ \cdots\ X_{tK}]\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{21} & \cdots & \beta_{M1}\\ \beta_{12} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{M2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \beta_{K1} & \beta_{K2} & \cdots & \beta_{KM}\end{bmatrix}=[u_{t1}\ \ u_{t2}\ \cdots\ u_{tM}]$$

شکل ماتریسی این سیستم معادلات را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}_t'\mathbf{\Gamma}+\mathbf{x}_t'\mathbf{B}=\mathbf{u}_t' \quad , \quad t=1,2,\dots,T \qquad (2)$$

$\mathbf{\Gamma}$ و $\mathbf{B}$ ماتریس ضرایب هستند که در سیستم معادلات (۱) ارائه شده‌اند. $\mathbf{y}_t'$ و $\mathbf{x}_t'$ نیز به‌ترتیب بردار مشاهدات مربوط به Y و X در سال t می‌باشند:

$$\mathbf{y}_t=\begin{bmatrix}Y_{t1}\\ Y_{t2}\\ \vdots\\ Y_{tM}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_t=\begin{bmatrix}X_{t1}\\ X_{t2}\\ \vdots\\ X_{tK}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_t=\begin{bmatrix}u_{t1}\\ u_{t2}\\ \vdots\\ u_{tM}\end{bmatrix} \qquad (3)$$

شکل ماتریسی سیستم معادلات (۱) یا (۲) برای کل مشاهدات (از ۱ تا T) عبارت است از:

$$\mathbf{Y\Gamma}+\mathbf{XB}=\mathbf{U} \qquad (4)$$

بنابراین $\mathbf{X}$، $\mathbf{Y}$ و $\mathbf{U}$ عبارتند از:

$$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1'\\ \mathbf{y}_2'\\ \vdots\\ \mathbf{y}_T'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1M}\\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2M}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Y_{T1} & Y_{T2} & \cdots & Y_{TM}\end{bmatrix}_{T\times M} \qquad (5)$$

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1'\\ \mathbf{x}_2'\\ \vdots\\ \mathbf{x}_T'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1K}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2K}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ X_{T1} & X_{T2} & \cdots & X_{TK}\end{bmatrix}_{T\times K} \qquad (6)$$

۱- مباحث این بخش از Green (2012) می‌باشد.

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{u}'_1\\ \mathbf{u}'_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}'_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1M}\\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2M}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_{T1} & u_{T2} & \cdots & u_{TM}\end{bmatrix}_{T\times M} \qquad (۷)$$

فروض زیر برای این سیستم معادلات برقرار است:

$$E(\mathbf{U}|\mathbf{X})=\mathbf{0} \quad , \quad E\left(\frac{\mathbf{U}'\mathbf{U}|\mathbf{X}}{T}\right)=\mathbf{\Sigma}$$

همچنین فرض بر این است که $\mathbf{X}$ و $\mathbf{U}$ مستقل‌اند و لذا $\text{plim}(\frac{\mathbf{X}'\mathbf{U}}{T})=\mathbf{0}$ است.
فرم حل‌شدهٔ این سیستم معادلات عبارت است از:

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X\Pi}+\mathbf{V} \quad ; \quad \mathbf{V}=\mathbf{U}\,\mathbf{\Gamma}^{-1} \;,\; \mathbf{\Pi}=-\mathbf{B}\,\mathbf{\Gamma}^{-1} \qquad (۸)$$

ماتریس واریانس- کوواریانس $\mathbf{V}$ عبارت است از:

$$\mathbf{\Omega}=E(\mathbf{VV}')=E\left[(\mathbf{U\Gamma}^{-1})(\mathbf{U\Gamma}^{-1})'\right]$$
$$=(\mathbf{\Gamma}^{-1})'E(\mathbf{UU}')\mathbf{\Gamma}^{-1}=(\mathbf{\Gamma}^{-1})'\mathbf{\Sigma\Gamma}^{-1} \qquad (۹)$$

در نتیجه، خواهیم داشت:

$$\mathbf{\Omega}=(\mathbf{\Gamma}^{-1})'\mathbf{\Sigma\Gamma}^{-1}\Rightarrow\mathbf{\Sigma}=\mathbf{\Gamma}'\mathbf{\Omega\Gamma} \qquad (۱۰)$$

۲- شناسایی معادلات

در تخمین معادلات، مسئله مهم تعیین $\mathbf{\Gamma}$ است. اگر $\mathbf{\Gamma}$ معلوم باشد، می‌توان فرم ساختاری را بر حسب متغیرهای از قبل تعیین‌شده، نوشت. بنابراین مسئله تشخیص این است که آیا می‌توانیم فرم حل‌شده را مشاهده کنیم. بدین منظور بایستی ساختاری را شکل دهیم که از اطلاعات مربوط به فرم حل‌شده، به‌دست آید. اگر بیش از یک ساختار وجود داشته باشد که بتواند منجر به فرم ساختاری یکسانی شود، در این صورت نمی‌توان گفت که امکان تخمین این ساختار وجود دارد. اما سؤال این است که به دنبال کدام ساختار هستیم؟ تصور کنید که ساختار صحیح به‌صورت $[\mathbf{\Gamma},\mathbf{B},\mathbf{\Sigma}]$ باشد.

حال ساختار متفاوت دیگری را بررسی می‌کنیم که عبارت است از:

$$\mathbf{y}'_t\tilde{\mathbf{\Gamma}}+\mathbf{x}'_t\tilde{\mathbf{B}}=\tilde{\mathbf{u}}'_t \qquad (۱۱)$$

در اینجا ساختاری را تعریف کرده‌ایم که با ضرب ساختار اولیه در ماتریس دلخواهی مانند $\mathbf{F}$ به‌دست آمده است. لذا خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}=\mathbf{\Gamma F} \qquad \tilde{\mathbf{B}}=\mathbf{BF} \qquad \tilde{\mathbf{U}}'_t=\mathbf{U}'_t\mathbf{F} \qquad (۱۲)$$

فرم خلاصه‌شده‌ای که از این ساختار جدید به‌دست می‌آید، دقیقاً مشابه همان ساختار اولیه است:

$$\tilde{\mathbf{\Pi}}=-\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{\Gamma}}^{-1}=-\mathbf{BFF}^{-1}\mathbf{\Gamma}^{-1}=\mathbf{\Pi} \qquad (۱۳)$$

و همچنین رابطه $\tilde{\mathbf{\Omega}}=\mathbf{\Omega}$ نیز برقرار است. ساختار غلط دقیقاً مشابه ساختار صحیح به نظر می‌آید. از نظر آماری هیچ راهی برای تفکیک این دو ساختار وجود ندارد.

از آنجا که $\mathbf{F}$ اختیاری است، لذا نتیجه می‌گیریم که هر تبدیل غیرمنفرد از ساختار اولیه، به فرم حل‌شدهٔ یکسانی منجر می‌شود. در چنین مدلی، هیچ ابزاری وجود ندارد که با استفاده از آن بتوان ضرایب ساختاری را از ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آورد. دستاورد تجربی این بحث آن است که اگر اطلاعات ما فقط شامل ضرایب فرم حل‌شده باشد، در این صورت، مدل ساختاری قابل تخمین نخواهد بود. لذا چگونه می‌توان مدل‌ها را تشخیص داد. جواب را باید در اطلاعات غیرنمونه‌ای جستجو کرد، یعنی محدودیت‌های تئوریکی.

به‌عنوان مثال معادلات عرضه و تقاضای را در نظر بگیرید که Q مقدار، P قیمت کالای موردنظر و Z قیمت کالای دیگر می‌باشد.

$$\text{تقاضا}: Q_t=\alpha_0+\alpha_1P_t+\alpha_2Z_t+u_{1t} \qquad (۱۴)$$
$$\text{عرضه}: Q_t=\beta_0+\beta_1P_t+\beta_2Z_t+u_{2t}$$

فرم حل‌شده عبارت است از:

$$Q_t=\frac{\alpha_1\beta_0-\alpha_0\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}+\frac{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}{\alpha_1-\beta_1}Z_t+\frac{\alpha_1u_{2t}-\alpha_2u_{1t}}{\alpha_1-\beta_1} \qquad (۱۵)$$
$$=\pi_{11}+\pi_{21}Z_t+v_{1t}$$
$$P_t=\frac{\beta_0-\alpha_0}{\alpha_1-\beta_1}+\frac{\beta_2-\alpha_2}{\alpha_1-\beta_1}Z_t+\frac{u_{1t}-u_{2t}}{\alpha_1-\beta_1}$$
$$=\pi_{12}+\pi_{22}Z_t+v_{2t}$$

۴ ضریب فرم حل‌شده و ۶ ضریب ساختاری داریم. بدیهی است که تعیین ۶ ضریب ساختاری با استفاده از ۴ ضریب فرم حل‌شده، امکان‌پذیر نیست.

اگر $\beta_2=0$ باشد آنگاه $\beta_1=\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}$ خواهد بود و هم‌چنین $\beta_0=\pi_{11}-\frac{\pi_{12}\pi_{21}}{\pi_{22}}$ می‌باشد. لذا این محدودیت، موجب شناسایی ضرایب عرضه می‌شود.

تصور کنید که سیستم معادلات (۱۴)، معادله تقاضا به‌جای Z، شامل X (درآمد) باشد. در این صورت فرم ساختاری عبارت است از:

$$[Q_t \quad P_t]\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_1 & -\beta_1 \end{bmatrix} + [1 \quad X_t \quad Z_t]\begin{bmatrix} -\alpha_0 & -\beta_0 \\ -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{bmatrix} = [u_{1t} \quad u_{2t}] \qquad (16)$$

فرم حل‌شده عبارت است از:

$$[Q_t \quad P_t] = [1 \quad X_t \quad Z_t]\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\Delta} & \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\Delta} \\ \frac{-\alpha_2\beta_1}{\Delta} & \frac{-\alpha_2}{\Delta} \\ \frac{-\alpha_1\beta_2}{\Delta} & \frac{\beta_2}{\Delta} \end{bmatrix} + [v_{1t} \quad v_{2t}]$$

$\Delta = \alpha_1 - \beta_1$ است. هر ساختار غلط نیز دارای همین فرم حل‌شده است. اما در ماتریس ضرایب خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{BF} = \begin{bmatrix} \alpha_0 f_{11} + \beta_0 f_{21} & \alpha_0 f_{12} + \beta_0 f_{22} \\ \alpha_2 f_{11} & \alpha_2 f_{12} \\ \beta_2 f_{21} & \beta_2 f_{22} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

اگر $f_{12} \neq 0$ باشد در این صورت X در معادله عرضه نیز وارد می‌شود که تئوری را نقض کرده است. همچنین اگر $f_{21} \neq 0$ باشد در این صورت Z در معادله تقاضا وارد می‌شود که برخلاف تئوری است. لذا هر چند تمام ساختارهای غلط دارای فرم حل‌شدهٔ یکسانی هستند که ظاهراً مشابه با فرم صحیح است، ولی فقط یکی با تئوری سازگار است که طبق آن، ضریب Q در هر دو معادله برابر ۱ است، یعنی $\mathbf{F} = \mathbf{I}$. این تبدیل ما را به ساختار اولیه می‌رساند.

جواب‌های منحصر به‌فرد برای ضرایب ساختاری بر حسب ضرایب فرم حل‌شده عبارتند از:

$$\alpha_0 = \pi_{11} - \pi_{12}\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}} \qquad \beta_0 = \pi_{11} - \pi_{12}\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}} \qquad \beta_1 = \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}} \qquad (18)$$

$$\alpha_2 = \pi_{22}\left(\frac{\pi_{21}}{\pi_{22}} - \frac{\pi_{31}}{\pi_{32}}\right) \qquad \beta_2 = \pi_{32}\left(\frac{\pi_{31}}{\pi_{32}} - \frac{\pi_{21}}{\pi_{22}}\right)$$

بحث فوق دو روش را برای مسئله تشخیص معادلات ارائه می‌کند. اگر امکان داشته باشد که ضرایب ساختاری را از ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آوریم، در این صورت مدل قابل شناسایی

است. از طرف دیگر اگر بتوان نشان داد که هیچ ساختار غلطی نمی‌تواند محدودیت‌های تئوریکی را تأمین نماید، در این صورت، مدل قابل شناسایی است.

۳- شرایط رتبه‌ای و درجه‌ای برای تشخیص معادلات

تاکنون ماتریس‌های زیر را تعریف و بررسی نموده‌ایم:

(۱۹)

$\mathbf{\Gamma}: M \times M$

$\mathbf{B}: K \times M$

$\mathbf{\Sigma}: M \times M$ ماتریس مثبت معین و قرینه

(۲۰)

$\mathbf{\Pi}: K \times M$

$\mathbf{\Omega}: M \times M$

تفاوت تعداد ضرایب ساختاری و تعداد ضرایب فرم حل‌شده همراه با واریانس و کوواریانس جملات خطا، عبارت است از:

$$l = \underbrace{M^2 + KM + \tfrac{1}{2}M(M+1)}_{\text{تعداد ضرایب ساختاری}} - \underbrace{\left[KM + \tfrac{1}{2}M(M+1)\right]}_{\text{تعداد ضرایب فرم حل‌شده}} = M^2 \qquad (21)$$

بدیهی است که بدون داشتن اطلاعات اضافی، تشخیص معادلات غیرممکن است و همان‌طور که انتظار می‌رفت، اختلاف بین تعداد ضرایب ساختاری و فرم حل‌شده (یعنی M^2) برابر با تعداد ضرایب $\mathbf{\Gamma}$ است.

اطلاعات اضافی را به اشکال مختلف می‌توان وارد نمود:

۱- نرمال‌سازی: در هر معادله، یکی از متغیرهای درون‌زا دارای ضرایب ۱ است. با نرمال‌سازی، تعداد ضرایب موجود در $\mathbf{\Gamma}$ که برابر با M^2 است، به $M(M-1)$ تقلیل می‌یابد.

۲- اتحادها: در برخی مدل‌ها، تعریف متغیرها یا شرایط تعادل به‌گونه‌ای هستند که ضرایب آنها معلوم است.

۳- حذف متغیرها از یک معادله، به‌گونه‌ای که برخی از عناصر $\mathbf{B}$ و $\mathbf{\Gamma}$ برابر صفر شود.

۴- محدودیت‌های خطی: محدودیت‌های اعمال شده بر روی ضرایب ساختاری می‌تواند به شناسایی ساختارهای غلط کمک نماید.

۵- محدودیت‌های اعمال شده بر روی ماتریس کوواریانس جملات خطا.

برای شناسایی هر یک از معادلات، به‌عنوان مثال معادله *j*ام را که شامل ستون *j*ام ماتریس‌های $\mathbf{\Gamma}$ و $\mathbf{B}$ است، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\gamma_{1j}Y_{t1} + \gamma_{2j}Y_{t2} + \ldots + \gamma_{Mj}Y_{tM} + \beta_{1j}X_{t1} + \ldots + \beta_{Kj}X_{tK} = u_{tj} \quad (۲۲)$$

شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} Y_{t1} & Y_{t2} & \cdots & Y_{tM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{Mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{t1} & X_{t2} & \cdots & X_{tK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{1j} \\ \beta_{2j} \\ \vdots \\ \beta_{Kj} \end{bmatrix} = u_{tj} \quad (۲۳)$$

و یا به‌طور خلاصه عبارت است از:

$$\mathbf{y}'\mathbf{\Gamma}_j + \mathbf{x}'\mathbf{B}_j = \mathbf{u}_j \quad (۲۴)$$

که $\mathbf{\Gamma}_j$ و $\mathbf{B}_j$ ستون *j*ام ماتریس‌های $\mathbf{\Gamma}$ و $\mathbf{B}$ هستند. در معادله فوق، اندیس t برای سادگی حذف شده است. در این معادله می‌دانیم که: اولاً یکی از عناصر $\mathbf{\Gamma}_j$ برابر ۱ است و ثانیاً برخی متغیرهایی که در سایر معادلات وجود دارند، در معادله *j*ام نیستند. براین اساس، معادله *j*ام را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_j & \mathbf{Y}'_j & \mathbf{Y}'^{*}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\gamma}_j \\ -\boldsymbol{\gamma}^{*}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_j & \mathbf{x}'^{*}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\beta}_j \\ -\boldsymbol{\beta}^{*}_j \end{bmatrix} = \mathbf{u}_j \quad (۲۵)$$

در این معادله، تعاریف زیر به‌کار رفته است:

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_j & \mathbf{Y}'_j & \mathbf{Y}^{*}_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_j & \mathbf{x}'^{*}_j \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\gamma}_j \\ -\boldsymbol{\gamma}^{*}_j \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\beta}_j \\ -\boldsymbol{\beta}^{*}_j \end{bmatrix}$$

حال (۲۵) را برای $\mathbf{y}_j$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}'_j\boldsymbol{\gamma}_j + \mathbf{Y}'^{*}_j\boldsymbol{\gamma}^{*}_j + \mathbf{x}'_j\boldsymbol{\beta}_j + \mathbf{x}'^{*}_j\boldsymbol{\beta}^{*}_j + \mathbf{u}_j \quad (۲۷)$$

اجزاء معادله *j*ام ($\mathbf{y}_j$ متغیر وابسته است)

	متغیرهای درون‌زا	متغیرهای برون‌زا
موجود در معادله *j*ام:	$\mathbf{Y}_j =$ متغیر M_j	$\mathbf{x}_j =$ متغیر K_j
موجود در معادله *j*ام:	$\mathbf{Y}^{*}_j =$ متغیر M^{*}_j	$\mathbf{x}^{*}_j =$ متغیر K^{*}_j
تعداد معادلات: $M_j + M^{*}_j + 1 = M$ تعداد متغیرهای برون‌زا: $K_j + K^{*}_j = K$ ضریب $\mathbf{y}_j$ در معادله *j*ام برابر ۱ است.		

حذف برخی متغیرها از معادله *j*ام بدان معنا است که $\boldsymbol{\gamma}^{*}_j = \mathbf{0}$ و $\boldsymbol{\beta}^{*}_j = \mathbf{0}$ می‌باشد. طبق تعاریف فوق، ستون *j*ام ماتریس‌های $\mathbf{\Gamma}$ و $\mathbf{B}$ عبارتند از:

$$\mathbf{\Gamma}_j = \begin{bmatrix} 1 \\ -\boldsymbol{\gamma}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\beta}_j \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۲۸)$$

برای معادله *j*ام می‌توان ماتریس ضرایب فرم حل‌شده را به‌صورت زیر تقسیم‌بندی نمود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_j & \mathbf{Y}'_j & \mathbf{Y}'^{*}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'_j & \mathbf{x}'^{*}_j \end{bmatrix} \overset{(1)\quad (M_j)\quad (M^{*}_j)}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_j & \underline{\mathbf{\Pi}}_j & \overline{\mathbf{\Pi}}_j \\ \boldsymbol{\pi}^{*}_j & \underline{\boldsymbol{\pi}}^{*}_j & \overline{\mathbf{\Pi}}^{*}_j \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_j & \mathbf{V}'_j & \mathbf{V}^{*}_j \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} K_j \text{ سطر} \\ K^{*}_j \text{ سطر} \end{matrix} \quad (۲۹)$$

از طرف دیگر، ماتریس ضرایب فرم حل‌شده به‌صورت (۸) تعریف شد:

$$\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}\mathbf{\Gamma}^{-1} \Rightarrow \mathbf{\Pi\Gamma} = -\mathbf{B}$$

ستون jام این ماتریس برای معادله jام عبارت است از:

$$\Pi\Gamma_j = -\mathbf{B}_j \quad (۳۰)$$

که می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \pi_j & \underline{\Pi}_j & \overline{\Pi}_j \\ \pi_j^* & \Pi_j^* & \overline{\Pi}_j^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\gamma_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۳۱)$$

از (۳۱) نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_j - \underline{\Pi}_j \gamma_j = \beta_j \qquad K_j \text{ سطر} \quad (۳۲)$$

$$\pi_j^* - \Pi_j^* \gamma_j = 0 \qquad K_j^* \text{ سطر} \quad (۳۳)$$

$(1)\quad (M_j)$

معادله (۳۲) مشابه معادله‌ای است که $\mathbf{B}$ را بر حسب Γ بیان می‌کند. اما از معادله (۳۳)، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\Pi_j^* \gamma_j = \pi_j^* \quad (۳۴)$$

این سیستم معادلات، شامل K_j^* معادله با M_j مجهول است. اگر بتوانیم آنها را برای γ_j حل کنیم، در این صورت با جایگذاری به‌جای γ_j در معادله اول، می‌توان β_j را نیز به‌دست آورد و لذا این معادله، مشخص خواهد بود. برای این کار لازم است که حداقل به تعداد مجهول‌ها، معادله داشته باشیم که منجر به شرط زیر می‌شود:

$$K_j^* \geq M_j \quad (۳۵)$$

تعداد متغیرهای برون‌زای حذف شده از معادله jام (K_j^*) بایستی حداقل برابر با تعداد متغیرهای درون‌زای موجود در معادله jام (M_j) باشد.

شرط رتبه‌ای فقط یک قاعده شمارش است و لذا شرط لازم است اما کافی نیست. این شرط تضمین می‌کند که سیستم $\Pi_j^* \gamma_j = \pi_j^*$ حداقل یک جواب داشته باشد، اما تضمین نمی‌کند که فقط یک جواب داشته باشد. شرط کافی (شرط درجه‌ای) برای منحصر به‌فرد بودن عبارت است از:

$$\text{rank}\left[\pi_j^*, \Pi_j^*\right] = \text{rank}\left[\Pi_j^*\right] = M_j \quad (۳۶)$$

این شرط یک محدودیت را بر روی یک زیرماتریس از ماتریس ضرایب فرم حل‌شده اعمال می‌کند.

شرط درجه‌ای تضمین می‌کند که دقیقاً یک جواب برای ضرایب ساختاری با استفاده از ضرایب فرم حل‌شده به‌دست آید. روش دیگر برای مسئله تشخیص، استفاده از محدودیت‌های قبلی بر روی $[\Gamma, \mathbf{B}]$ برای حذف تمام ساختارهای غلط می‌باشد.

٤- روش‌های تخمین سیستم معادلات همزمان

روش‌های تخمین معادلات همزمان به دو روش تک معادله‌ای و سیستمی تقسیم می‌شوند.

٤-١ روش‌های تک معادله‌ای

برای استفاده از روش‌های تک معادله‌ای، ابتدا معادله jام را در نظر بگیرید که به‌صورت (۲۷) معرفی شد. اگر در این معادله $\gamma_j^* = \beta_j^* = 0$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Y}_j \gamma_j + \mathbf{X}_j \beta_j + \mathbf{u}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix} + \mathbf{u}_j \quad (۳۷)$$

اگر $\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j \end{bmatrix}$ و $\delta_j = \begin{bmatrix} \gamma_j \\ \beta_j \end{bmatrix}$ را به‌کار ببریم، فرم ساختاری معادله jام عبارت است از:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{Z}_j \delta_j + \mathbf{u}_j \quad (۳۸)$$

از طرف دیگر، فرم حل‌شدهٔ سیستم معادلات همزمان به‌صورت $\mathbf{Y} = \mathbf{X}\Pi + \mathbf{V}$ است. فرم حل‌شده برای متغیرهای درون‌زای موجود در معادله jام (یعنی $\mathbf{Y}_j$) عبارت است از:

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}\Pi_j + \mathbf{V}_j \quad (۳۹)$$

Π_j برابر با $\begin{bmatrix} \underline{\Pi}_j \\ \Pi_j^* \end{bmatrix}$ در (۳۱) است. $\mathbf{V}_j$ نیز در (۲۹) تعریف شده است که شامل M_j ستون از $\mathbf{V} = \mathbf{U}\Gamma^{-1}$ می‌باشد.

الف) روش OLS

تخمین‌زنندهٔ OLS برای مدل (۳۹) عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{j,\text{OLS}} = (\mathbf{Z}_j' \mathbf{Z}_j)^{-1} \mathbf{Z}_j' \mathbf{y}_j \quad (۴۰)$$

اگر از $\mathbf{Z}_j = \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j\end{bmatrix}$ به‌جای $\mathbf{Z}_j$ و از (۳۸) به‌جای $\mathbf{y}_j$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{OLS}} = \boldsymbol{\delta}_j + \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j'\mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j'\mathbf{X}_j \\ \mathbf{X}_j'\mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j'\mathbf{u}_j \\ \mathbf{X}_j'\mathbf{u}_j\end{bmatrix} \tag{۴۱}$$

از آنجا که $\mathbf{Y}_j$ و $\mathbf{u}_j$ مستقل نیستند ($\mathrm{plim}\frac{\mathbf{Y}_j'\mathbf{U}_j}{T} \neq \mathbf{0}$) لذا $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{OLS}}$ ناسازگار است و همان‌طور که دیدیم منجر به اریب (تورش) معادلات همزمان می‌شود. توجه شود که در اینجا شرط $\mathrm{plim}\frac{\mathbf{X}_j'\mathbf{U}_j}{T} = \mathbf{0}$ برقرار است.

ب) روش متغیرهای ابزاری (IV)[1]

روش متغیرهای ابزاری یک روش سازگار و کارا است. بدین منظور فرم ساختاری (۳۸) را در نظر بگیرید. دیدیم که چون $\mathbf{Z}_j$ و $\mathbf{u}_j$ مستقل نیستند لذا روش OLS ناسازگار است. روش دیگر برای رسیدن به تخمین‌زننده‌های سازگار، استفاده از متغیرهای ابزاری است. بدین منظور فرض کنید که $\mathbf{W}_j$ یک ماتریس با ابعاد $T\times(M_j+K_j)$ باشد که شرایط تخمین‌زننده‌های IV را تأمین می‌کند[2]:

$$\mathrm{plim}\frac{\mathbf{W}_j'\mathbf{Z}_j}{T} = \boldsymbol{\Sigma}_{wz} \quad \text{ماتریس غیرمنفرد و محدود} \tag{۴۲}$$

$$\mathrm{plim}\frac{\mathbf{W}_j'\mathbf{u}_j}{T} = \mathbf{0} \tag{۴۳}$$

$$\mathrm{plim}\frac{\mathbf{W}_j'\mathbf{W}_j}{T} = \boldsymbol{\Sigma}_{ww} \quad \text{ماتریس مثبت معین} \tag{۴۴}$$

در این صورت تخمین‌زننده IV عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}} = (\mathbf{W}_j'\mathbf{Z}_j)^{-1}\mathbf{W}_j'\mathbf{y}_j \tag{۴۵}$$

با جایگذاری از (۳۸) به‌جای $\mathbf{y}_j$ خواهیم داشت:

1- instrumental variable

۲- جزئیات روش متغیرهای ابزاری در فصل دهم ارائه شده است.

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}} = (\mathbf{W}_j'\mathbf{Z}_j)^{-1}\mathbf{W}_j'(\mathbf{Z}_j\boldsymbol{\delta}_j + \mathbf{u}_j) = \boldsymbol{\delta}_j + (\mathbf{W}_j'\mathbf{Z}_j)^{-1}\mathbf{W}_j'\mathbf{u}_j \tag{۴۶}$$

با توجه به شرایط (۴۲) تا (۴۳) خواهیم داشت:

$$\mathrm{plim}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}} = \boldsymbol{\delta}_j \tag{۴۷}$$

واریانس مجانبی $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,IV}$ عبارت است از:

$$\begin{aligned}\mathrm{plim}\,\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}}) &= \mathrm{plim}E\left[(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}} - \boldsymbol{\delta}_j)(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}} - \boldsymbol{\delta}_j)'\right] \\ &= \mathrm{plim}(\mathbf{W}_j'\mathbf{Z}_j)^{-1}\mathbf{W}_j'\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j'\mathbf{W}_j(\mathbf{Z}_j'\mathbf{W}_j)^{-1} \\ &= \frac{\sigma_j^2}{T}\mathrm{plim}(\frac{\mathbf{W}_j'\mathbf{Z}_j}{T})^{-1}\mathrm{plim}(\frac{\mathbf{W}_j'\mathbf{W}_j}{T})\mathrm{plim}(\frac{\mathbf{Z}_j'\mathbf{W}_j}{T})^{-1} \\ &= \frac{\sigma_j^2}{T}\mathbf{Q}_{wz}^{-1}\,\mathbf{Q}_{ww}\,\mathbf{Q}_{zw}^{-1}\end{aligned} \tag{۴۸}$$

$\hat{\sigma}_j^2$ براساس باقیمانده‌های معادله jام حساب می‌شود که عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{e_j'e_j}{T} = \frac{(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}})'(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,\mathrm{IV}})}{T} \tag{۴۹}$$

اگر به‌جای T از درجه آزادی، یعنی $T-M_j-K_j$ استفاده کنیم باعث می‌شود تا $\hat{\sigma}_j^2$ نااریب شود، زیرا در اینجا تعداد ضرایب برآوردی برابر با M_j+K_j است.

ج) روش حداقل مربعات دو مرحله‌ای (2SLS)

روش 2SLS یک روش عمومی برای تخمین سیستم معادلات همزمان است. این روش مبتنی بر استفاده از متغیرهای ابزاری برای $\mathbf{Y}_j$ (متغیرهای درون‌زای موجود در معادله jام به‌استثنای $\mathbf{y}_j$) می‌باشد. متغیرهای ابزاری که برای $\mathbf{Y}_j$ معرفی می‌شود عبارت از تخمین $\mathbf{Y}_j$ براساس تمام متغیرهای برون‌زای (Xها) موجود در کل سیستم معادلات است.

$$\mathbf{Y}_j = \mathbf{X}\boldsymbol{\Pi}_j + \mathbf{V}_j \tag{۵۰}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_j = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\Pi}}_j \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\Pi}}_j = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Y}_j) \tag{۵۱}$$

$$\mathbf{Y}_j = \hat{\mathbf{Y}}_j + \hat{\mathbf{V}}_j \tag{۵۲}$$

با جایگذاری در معادله jام خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y_j &= (\hat{Y}_j + \hat{V}_j)\gamma_j + X_j\beta_j + u_j \\ &= \hat{Y}_j\gamma_j + X_j\beta_j + (u_j + \hat{V}_j) \\ &= \begin{bmatrix}\hat{Y}_j & X_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_j \\ \beta_j\end{bmatrix} + (u_j + \hat{V}_j) \\ &= \hat{Z}_j\delta_j + (u_j + \hat{V}_j) \;,\; \hat{Z}_j = \begin{bmatrix}\hat{Y}_j & X_j\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۵۳}$$

تخمین‌زنندهٔ 2SLS عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = (\hat{Z}_j'\hat{Z}_j)^{-1}\hat{Z}_j'y_j \tag{۵۴}$$

با جایگذاری به‌جای $\hat{Z}_j$ خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = \begin{bmatrix}\hat{Y}_j'Y_j & \hat{Y}_j'X_j \\ X_j'Y_j & X_j'X_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{Y}_j'y_j \\ X_j'y_j\end{bmatrix} \tag{۵۵}$$

در ماتریس $\begin{bmatrix}\hat{Y}_j & X_j\end{bmatrix}$، $M_j + K_j$ ستون وجود دارد که تمام ستون‌ها توابع خطی از K ستون مربوط به X هستند. در واقع K ترکیب مستقل خطی از ستون‌های X داریم. اگر معادله، مشخص نباشد، در این صورت $M_j + K_j$ بزرگتر از K است و لذا $[\hat{Y}_j \;\; X_j]$ دارای مرتبه ستونی کامل نخواهد بود. در این حالت، روش 2SLS نمی‌تواند به‌کار گرفته شود.

در اینجا می‌توان از یک ساده‌سازی مناسب استفاده نمود: اولاً چون $X(X'X)^{-1}X' = (I - M)$ خودتوان است، لذا رابطه $\hat{Y}_j'Y_j = \hat{Y}_j'\hat{Y}_j$ را داریم.[1] ثانیاً $X_j'X(X'X)^{-1}X' = X_j'$ بدان معنا است که $X_j'Y_j = X_j'\hat{Y}_j$ است. بنابراین خواهیم داشت:

$$\hat{\delta}_{j,2SLS} = \begin{bmatrix}\hat{Y}_j'Y_j & \hat{Y}_j'X_j \\ X_j'Y_j & X_j'X_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{Y}_j'y_j \\ X_j'y_j\end{bmatrix} \tag{۵۶}$$

۱- با توجه به $\hat{Y}_j = X\hat{\Pi}_j = X(X'X)^{-1}X'Y_j$ و با توجه به اینکه $\hat{Y}_j = Y_j - MY_j$ است (MY_j خطاها است که $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ می‌باشد)، خواهیم داشت:

$$\hat{Y}_j'\hat{Y}_j = \hat{Y}_j'X(X'X)^{-1}X'Y_j = \hat{Y}_j'(I - M)Y_j = \hat{Y}_j'Y_j - \hat{Y}_j'MY_j = \hat{Y}_j'Y_j$$

چون MY_j برابر با $\hat{V}_j$ است و لذا عبارت $\hat{Y}_j'MY_j$ برابر صفر است.

بدین ترتیب، تخمین‌زنندهٔ 2SLS در دو مرحله از روش OLS استفاده می‌کند:

۱- مرحله اول: رگرسیون Y_j روی X برآورد می‌شود.

۲- مرحله دوم: تخمین δ_j از طریق رگرسیون حداقل مربعات y_j بر روی $\hat{Y}_j$ و X_j به‌دست می‌آید.

اثبات سازگاری 2SLS نیازمند آن است که تخمین‌زنندهٔ IV معتبر باشد. برای برقراری (۴۲) لازم است که ماتریس زیر، غیرمنفرد و محدود باشد:

$$\text{plim}\begin{bmatrix}\hat{Y}_j'Y_j/T & \hat{Y}_j'X_j/T \\ X_j'Y_j/T & X_j'X_j/T\end{bmatrix} = \text{plim}\begin{bmatrix}\hat{\Pi}_j'X'(X\Pi_j + V_j)/T & \hat{\Pi}_j'X'X_j/T \\ X_j'(X\Pi_j + V_j)/T & X_j'X_j/T\end{bmatrix} \tag{۵۷}$$

از آنجا که $\text{plim}\hat{\Pi}_j = \Pi_j$ است، لذا در حد می‌توان به‌جای $\hat{\Pi}_j$ از Π_j استفاده کرد. اگر مرتبه Π_j کامل باشد (یعنی معادله، مشخص باشد)، آنگاه ماتریس فوق، غیرمنفرد خواهد بود. طبق (۴۳) نیاز داریم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\text{plim}\frac{1}{T}\begin{bmatrix}\hat{Y}_j'u_j \\ X_j'u_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix} \tag{۵۸}$$

طبق فرض، شرط $\text{plim}\frac{1}{T}(X_j'u_j) = 0$ برقرار است. اما در (۵۸)، جمله اول با توجه به $\hat{Y}_j = X\hat{\Pi}_j = X(X'X)^{-1}X'Y_j$ عبارت است از:

$$\begin{aligned} \text{plim}\frac{1}{T}\hat{Y}_j'u_j &= \text{plim}\frac{1}{T}\hat{Y}_j'X(X'X)^{-1}X'u_j \\ &= \text{plim}\left(\frac{Y_j'X}{T}\right)\left(\frac{X'X}{T}\right)^{-1}\left(\frac{X'u_j}{T}\right) \end{aligned} \tag{۵۹}$$

چون حد جمله سوم برابر صفر است، لذا شرط موردنظر را تأمین می‌کند. بدین ترتیب، $\hat{\delta}_{j,2SLS}$ یک تخمین‌زننده IV است و لذا می‌توان آن را به‌صورت تخمین‌زنندهٔ IV توصیف نمود.

اگر X_j را روی X برازش کنیم، آنگاه $\hat{X}_j = X_j$ خواهد بود (زیرا X_j بخشی از X است). با استفاده از ماتریس خودتوان $I - M = X(X'X)^{-1}X'$ و $\hat{Y}_j = X\hat{\Pi}_j = X(X'X)^{-1}X'Y_j = (I - M)Y$، خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}=\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Y}_j & \mathbf{Y}_j'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{X}_j\\ \mathbf{X}_j'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Y}_j & \mathbf{X}_j'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{X}_j\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_j'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}_j\\ \mathbf{X}_j'(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{y}_j\end{bmatrix} \quad (۶۰)$$

و

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}=(\hat{\mathbf{Z}}_j'\hat{\mathbf{Z}}_j)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_j'\mathbf{y}_j$$
$$=\left[(\mathbf{Z}_j'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Z}_j)\right]^{-1}(\mathbf{Z}_j'\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}_j) \quad (۶۱)$$

$\hat{\mathbf{Z}}_j$ از برآورد معادله رگرسیون $\hat{\mathbf{Z}}_j=\mathbf{X}\hat{\mathbf{C}}$ به‌دست می‌آید که حاصل رگرسیون $\mathbf{Z}$ روی $\mathbf{X}$ است. لذا $\hat{\mathbf{Z}}_j=\mathbf{X}\hat{\mathbf{C}}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_j=(\mathbf{I}-\mathbf{M})\mathbf{Z}_j$ است. توجه شود که رگرسیون $\mathbf{Z}$ روی $\mathbf{X}$ شامل رگرسیون $\mathbf{Y}_j$ روی $\mathbf{X}$ و $\mathbf{X}_j$ روی $\mathbf{X}$ است که نتیجهٔ اولی $\hat{\mathbf{Y}}_j$ و نتیجه دومی $\hat{\mathbf{X}}_j$ است که با $\mathbf{X}_j$ برابر می‌باشد.

واریانس مجانبی $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}$ عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}=\boldsymbol{\delta}_j+(\hat{\mathbf{Z}}_j'\hat{\mathbf{Z}}_j)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_j'\mathbf{u}_j \quad (۶۲)$$

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS})=\text{plim}E(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}-\boldsymbol{\delta}_j)(\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS}-\boldsymbol{\delta}_j)' \quad (۶۳)$$
$$=\text{plim}(\hat{\mathbf{Z}}_j'\hat{\mathbf{Z}}_j)^{-1}\hat{\mathbf{Z}}_j\mathbf{u}_j\mathbf{u}_j'\hat{\mathbf{Z}}_j(\hat{\mathbf{Z}}_j'\hat{\mathbf{Z}}_j)^{-1}=\hat{\sigma}_j^2(\hat{\mathbf{Z}}_j'\hat{\mathbf{Z}}_j)^{-1}$$

$\hat{\sigma}_j^2$ عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_j^2=\frac{\mathbf{e}'\mathbf{e}}{T}=\frac{(\mathbf{y}_j-\mathbf{Z}_j\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS})'(\mathbf{y}_j-\mathbf{Z}_j\hat{\boldsymbol{\delta}}_{j,2SLS})}{T} \quad (۶۴)$$

د) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود (LIML)[1]

روش LIML یکی از روش‌های سازگار برای برآوردهای تک معادله‌ای است. این روش مبتنی بر حداکثر نمودن تابع درستنمایی براساس مشاهدات مربوط به متغیرهای درون‌زای موجود در معادله موردنظر می‌باشد و توجهی به متغیرهای درون‌زایی که در سایر معادلات وجود دارد نمی‌کند. معنی اطلاعات محدود آن است که در تشکیل تابع درستنمایی، خود را محدود به متغیرهایی می‌کنیم که در معادله موردنظر وارد شده است و توجهی به محدودیت‌های اعمال شده در سایر معادلات ساختاری نداریم.

1- limited information maximum likelihood

تصور کنید که می‌خواهیم یکی از معادلات (معادله jام) را برآورد کنیم. بخشی از این سیستم معادلات که در روش LIML مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت است از:

$$\mathbf{y}_j=\mathbf{Y}_j\boldsymbol{\gamma}_j+\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j+\mathbf{u}_j \quad \text{معادله } j\text{ام} \quad (۶۵)$$

$$\mathbf{Y}_j=\mathbf{X}\boldsymbol{\Pi}_j+\mathbf{V}_j \quad \text{فرم حل‌شده برای } \mathbf{Y}_j \quad (۶۶)$$

بردارها و ماتریس‌ها عبارتند از:

$\mathbf{Y}_j$ شامل M_j متغیر درون‌زا است که در معادله jام وارد شده است ولی در سایر معادلات وجود ندارد (توجه شود که $\mathbf{Y}_j$ شامل $\mathbf{y}_j$ نمی‌شود)، لذا ابعاد آن $M_j\times 1$ می‌باشد.

$\mathbf{X}_j$ شامل K_j متغیر برون‌زا است که در معادله jام هستند، ولی در سایر معادلات وجود ندارد.

$\mathbf{V}_j$ جملات خطا است که شامل M_j خطا برای فرم حل‌شدهٔ $\mathbf{Y}_j$ است که بردار $M_j\times 1$ می‌باشد.

حال از (۶۵) در (۶۶) قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{y}_j=\mathbf{X}\boldsymbol{\pi}_j\boldsymbol{\gamma}_j+\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j+\mathbf{v}_j \quad , \quad \mathbf{v}_j=\mathbf{u}_j+\mathbf{V}_j\boldsymbol{\beta}_j \quad (۶۷)$$

تخمین حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود از حداکثرسازی تابع درستنمایی $\mathbf{y}_j$ و $\mathbf{Y}_j$ نسبت به $\boldsymbol{\beta}_j$، $\boldsymbol{\gamma}_j$ و $\boldsymbol{\Pi}_j$ و واریانس-کوواریانس جملات خطا به‌دست می‌آید. یک راه ساده برای به‌دست آوردن تخمین‌زننده‌های LIML این است که ابتدا معادلات (۶۵) و (۶۶) را به‌صورت معادلات به‌ظاهر نامرتبط در نظر بگیریم (یعنی توجهی به همبستگی $\mathbf{Y}_j$ و $\mathbf{u}_j$ نکنیم). اما برای استفاده از معادلات (۶۵) و (۶۷) می‌توان $\mathbf{Y}_j$ را مانند یک متغیر غیرقابل مشاهده مورد توجه قرار داد و از $\mathbf{E}(\mathbf{Y}_j)=\mathbf{X}\boldsymbol{\Pi}_j$ استفاده نمود. این شیوه، تفاوت بین روش 2SLS و LIML را به‌خوبی روشن می‌کند. در روش 2SLS ابتدا $\hat{\boldsymbol{\Pi}}_j$ از معادله (۶۶) تخمین زده و در معادله (۶۵) جایگذاری می‌کنیم و سپس ضرایب $\boldsymbol{\beta}_j$ و $\boldsymbol{\gamma}_j$ را برآورد می‌کنیم. اما در روش LIML ، ضرایب $\boldsymbol{\Pi}_j$، $\boldsymbol{\beta}_j$ و $\boldsymbol{\gamma}_j$ را به‌طور همزمان برآورد می‌کنیم. با این وجود، نتایج آنها به‌طور مجانبی، یکسان است.

معادله jام را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}_j-\mathbf{Y}_j\boldsymbol{\gamma}_j=\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j+\mathbf{u}_j \quad (۶۸)$$
$$\tilde{\mathbf{y}}_j=\mathbf{X}_j\boldsymbol{\beta}_j+\mathbf{u}_j \quad , \quad \mathbf{y}_j-\mathbf{Y}_j\boldsymbol{\gamma}_j=\tilde{\mathbf{y}}_j$$

$\tilde{\mathbf{y}}_j$ یک ترکیب خطی از متغیرهای درون‌زای موجود در معادله jام است. با داشتن $\tilde{\mathbf{y}}_j$، تخمین $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_j = (\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}'_j\tilde{\mathbf{y}}_j \qquad (69)$$

و مجموع مجذور خطاهای آن عبارت است از:

$$RSS_j = \mathbf{e}'_\circ\mathbf{e}_\circ = (\tilde{\mathbf{y}}_j - \mathbf{X}_j\hat{\boldsymbol\beta}_j)'(\tilde{\mathbf{y}}_j - \mathbf{X}_j\hat{\boldsymbol\beta}_j)$$

به‌جای $\hat{\boldsymbol\beta}_j$ قرار داده و RSS_j را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$RSS_j = \mathbf{e}'_\circ\mathbf{e}_\circ = \tilde{\mathbf{y}}'_j\mathbf{y}_j - \tilde{\mathbf{y}}'_j\mathbf{X}_j(\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}'_j\tilde{\mathbf{y}}_j \qquad (70)$$

توجه شود که در اینجا فقط آن دسته از **X**هایی را داریم که در معادله jام وارد شده‌اند. اگر تمامی **X**ها را در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\hat{\mathbf{y}}_j = \mathbf{X}\boldsymbol\beta + \mathbf{u}_j \qquad (71)$$

X یک ماتریس $T\times K$ است و $\boldsymbol\beta = \begin{bmatrix}\boldsymbol\beta_j\\ \mathbf{o}\end{bmatrix}$ می‌باشد که $\boldsymbol\beta$ یک بردار $K\times 1$ می‌باشد. برای تخمین $\boldsymbol\beta$ از روش OLS خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\tilde{\mathbf{y}}_j \qquad (72)$$

و مجموع مجذور خطاها عبارتند از:

$$\begin{aligned} RSS &= \mathbf{e}'\mathbf{e} = (\tilde{\mathbf{y}}_j - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})'(\tilde{\mathbf{y}}_j - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) \\ &= \tilde{\mathbf{y}}'_j\tilde{\mathbf{y}}_j - \tilde{\mathbf{y}}'_j\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\tilde{\mathbf{y}}_j \end{aligned} \qquad (73)$$

حال نسبت زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} l = \frac{RSS_j}{RSS} &= \frac{\tilde{\mathbf{y}}'_j\tilde{\mathbf{y}}_j - \tilde{\mathbf{y}}'_j\mathbf{X}_j(\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}'_j\tilde{\mathbf{y}}_j}{\tilde{\mathbf{y}}'_j\tilde{\mathbf{y}}_j - \tilde{\mathbf{y}}'_j\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\tilde{\mathbf{y}}_j} \\ &= \frac{\tilde{\mathbf{y}}'_j\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}_j(\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}'_j\right]\tilde{\mathbf{y}}_j}{\tilde{\mathbf{y}}'_j\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\right]\tilde{\mathbf{y}}_j} \end{aligned} \qquad (74)$$

این نسبت نمی‌تواند کوچکتر از ۱ شود، زیرا همواره $RSS_j \geq RSS$ می‌باشد. برای تخمین γ_j، ابتدا $\tilde{\mathbf{y}}_j$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\tilde{\mathbf{y}}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{Y}_j\gamma_j = [\mathbf{y}_j \quad \mathbf{Y}_j]\begin{bmatrix}1\\ -\gamma_j\end{bmatrix} = \mathbf{Y}^\circ_j\gamma^\circ_j \qquad (75)$$

$$\mathbf{Y}^{\circ\prime}_j = [\mathbf{y}_j \quad \mathbf{Y}_j] \quad , \quad \gamma^\circ_j = \begin{bmatrix}1\\ -\gamma_j\end{bmatrix}$$

بدین‌ترتیب با جایگذاری به‌جای $\tilde{\mathbf{y}}_j$، نسبت l را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$l = \frac{\gamma^{\circ\prime}_j\mathbf{Y}^{\prime\circ}_j\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}_j(\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}_j\right]\mathbf{Y}^\circ_j\gamma^\circ_j}{\gamma^{\circ\prime}_j\mathbf{Y}^{\prime\circ}_j\left[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}\right]\mathbf{Y}^\circ_j\gamma^\circ_j} = \frac{\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}^\circ_j\gamma^\circ_j}{\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j} \qquad (76)$$

$\mathbf{W}^\circ_j$ و $\mathbf{W}_j$ عبارتند از:

$$\mathbf{W}^\circ_j = \mathbf{Y}^{\prime\circ}_j[\mathbf{I} - \mathbf{X}_j(\mathbf{X}'_j\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}_j]\mathbf{Y}^\circ_j = \mathbf{Y}^{\prime\circ}_j\mathbf{H}_j\mathbf{Y}^\circ_j \qquad (77)$$

$$\mathbf{W}_j = \mathbf{Y}^{\prime\circ}_j[\mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}]\mathbf{Y}^\circ_j = \mathbf{Y}^{\prime\circ}_j\mathbf{H}\mathbf{Y}^\circ_j$$

عبارت‌های داخل کروشه با $\mathbf{H}_j$ و $\mathbf{H}$ نشان داده شده‌اند.

تخمین‌زننده حداقل نسبت واریانس برای γ°_j برابر با آن مقدار از γ_j است که نسبت l را حداقل کند. بنابراین با حداقل نمودن l نسبت به γ°_j خواهیم داشت:

$$\frac{\partial l}{\partial\gamma^\circ_j} = \frac{2\mathbf{W}^\circ_j\gamma^\circ_j(\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j) - 2(\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}^\circ_j\gamma^\circ_j)(\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j)}{(\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j)^2} = 0$$

با ساده کردن عبارت فوق، خواهیم داشت:

$$\mathbf{W}^\circ_j\gamma^\circ_j - \frac{\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}^\circ_j\gamma^\circ_j}{\gamma^{\prime\circ}_j\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j}\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j = 0$$

و یا

$$\mathbf{W}^\circ_j\gamma^\circ_j - l\mathbf{W}_j\gamma^\circ_j = 0 \Rightarrow (\mathbf{W}^\circ_j - l\mathbf{W}_j)\gamma^\circ_j = 0$$

اگر رتبه ماتریس $\mathbf{W}^\circ_j - l\mathbf{W}_j$ کامل باشد، آنگاه $\left|\mathbf{W}^\circ_j - l\mathbf{W}_j\right| \neq 0$ بوده و لذا $\gamma^\circ_j = 0$ می‌باشد. لذا برای به‌دست آوردن جواب‌های غیرصفر، بایستی رتبه ماتریس $\mathbf{W}^\circ_j - l\mathbf{W}_j$ کوچکتر از

M_j+1 باشد (توجه شود که ابعاد این ماتریس $(M_j+1)\times(M_j+1)$ است. بنابراین، شرط حداقل شدن نسبت l، معادل است با:

$$|\mathbf{W}_j^{\circ}-l\mathbf{W}_j|=0 \qquad (۷۸)$$

از آنجا که عناصر $\mathbf{W}_j^{\circ}$ و $\mathbf{W}_j$ از مشاهدات نمونه (یعنی Xها و Yها) تعیین می‌شود، لذا دترمینان مذکور یک چندجمله‌ای درجه M_j+1 از l می‌باشد. بدیهی است که مسئله (۷۸) معادل با تعیین مقادیر ویژه است که با حل آن، M_j+1 مقدار ویژه برای l به‌دست می‌آید. از آنجا که می‌خواهیم l تا حد ممکن به ۱ نزدیک باشد و از طرف دیگر تمام مقادیر ویژهٔ این معادله بزرگتر از ۱ هستند (چون نسبت l بزرگتر از ۱ است)، لذا مقدار ویژهٔ مناسب برای حداقل شدن (۷۶) برابر با کوچکترین مقدار ویژه است. اگر l^* کوچکترین مقدار ویژه باشد، با قرار دادن آن در معادله، خواهیم داشت:

$$(\mathbf{W}_j^{\circ}-l\mathbf{W}_j)\gamma_j^{\circ}=0 \qquad (۷۹)$$

M_j+1 معادله داریم که چون دترمینان $\mathbf{W}_j-l^*\mathbf{W}_j$ برابر صفر است، لذا فقط M_j معادلهٔ مستقل باقی می‌ماند که با حل آنها می‌توان M_j مجهول را به‌دست آورد. توجه داریم که γ_j° شامل M_j+1 پارامتر است که بایستی تعیین شوند، اما چون $\gamma_j^{\circ}=\begin{bmatrix}1\\-\gamma_j\end{bmatrix}$ است، لذا فقط نیاز به تعیین γ_j داریم که شامل M_j پارامتر می‌باشد. با توجه به تعداد معادلات مستقل که برابر با M_j است، می‌توان از حل آنها، γ_j را تعیین نمود که با $\hat{\gamma}_{j,\text{LIML}}$ نشان می‌دهیم. بدین ترتیب $\tilde{\mathbf{y}}_j$ برابر است با:

$$\tilde{\mathbf{y}}_j=\mathbf{y}_j-\mathbf{Y}_j\hat{\gamma}_j \qquad (۸۰)$$

با جایگذاری از (۸۰) به‌جای $\tilde{\mathbf{y}}_j$ در (۶۹)، تخمین β_j برابر است با:

$$\hat{\beta}_{j,\text{LIML}}=(\mathbf{X}_j'\mathbf{X}_j)^{-1}\mathbf{X}_j'(\mathbf{y}_j-\mathbf{Y}_j\hat{\gamma}_{j,\text{LIML}}) \qquad (۸۱)$$

۲-۴ روش‌های سیستمی

الف) روش 3SLS

در بخش قبلی، معادله jام به‌صورت زیر معرفی شد:

$$\mathbf{y}_j=\mathbf{Z}_j\delta_j+\mathbf{u}_j \quad , \quad \mathbf{Z}_j=[\mathbf{Y}_j \quad \mathbf{X}_j] \quad , \quad \delta_j=\begin{bmatrix}\gamma_j\\ \beta_j\end{bmatrix} \qquad (۸۲)$$

ابعاد این بردارها و ماتریس‌ها عبارتند از:

$\mathbf{y}_j$: بردار $T\times 1$

$\mathbf{Y}_j$: ماتریس $T\times M_j$

$\mathbf{X}_j$: ماتریس $T\times K_j$

$\mathbf{Z}_j$: ماتریس $T\times(M_j+K_j)$

γ_j : بردار $M_j\times 1$

β_j : بردار $K_j\times 1$

δ_j : بردار $(M_j+K_j)\times 1$

معادله (۷۱) را برای کل سیستم معادلات را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{y}_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Z}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{Z}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Z}_M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_M\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \vdots\\ \mathbf{u}_M\end{bmatrix}$$

و یا

$$\mathbf{y}=\mathbf{Z}\delta+\mathbf{u} \qquad (۸۳)$$

ابعاد ماتریس‌ها و بردارها عبارت است از:

$\mathbf{y}$: بردار $TM\times 1$

$\mathbf{Z}$: $TM\times\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j)$

δ : $\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j)\times 1$

$\mathbf{u}$: $TM\times 1$

برای جملهٔ خطا، شرایط زیر برقرار است:

$$E(\mathbf{u}|\mathbf{X})=0$$

$$E(\mathbf{uu}'|\mathbf{X})=\overline{\Sigma}=\Sigma\otimes\mathbf{I}_T=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\mathbf{I}_T & \sigma_{12}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{1M}\mathbf{I}_T\\ \sigma_{21}\mathbf{I}_T & \sigma_{22}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{2M}\mathbf{I}_T\\ \vdots & \vdots & & \\ \sigma_{M1}\mathbf{I}_T & \sigma_{M2}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{MM}\mathbf{I}_T\end{bmatrix} \qquad (۸۴)$$

$$E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1M} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} & \cdots & \sigma_{MM} \end{bmatrix} \qquad (۸۵)$$

$\overline{\Sigma}$ یک ماتریس $TM\times TM$ و $\mathbf{\Sigma}$ نیز یک ماتریس $M\times M$ است. $\mathbf{\Sigma}$ بیانگر ماتریس واریانس–کوواریانس جملات خطای معادلات ۱ تا M برای سال t است.

تخمین‌زنندهٔ OLS که هر معادله را جداگانه تخمین می‌زند عبارت است از:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{OLS} = (\mathbf{Z}'\mathbf{Z})^{-1}\mathbf{Z}'\mathbf{y} \qquad (۸۶)$$

که یک تخمین‌زنندهٔ ناسازگار است. حتی اگر OLS یک تخمین‌زنندهٔ سازگار باشد، با توجه به بحث معادلات به‌ظاهر نامرتبط[1]، یک تخمین‌زنندهٔ ناکارا در مقایسه با تخمین‌زننده‌ای است که همبستگی جملات خطای معادلات را در نظر می‌گیرد. برای حل مشکل اول (ناسازگاری) از روش متغیرهای ابزاری استفاده می‌کنیم و برای حل مشکل دوم (ناکارایی) از روش GLS استفاده می‌کنیم. بنابراین فرض می‌کنیم که $\overline{\mathbf{W}}$ شرایط یک تخمین‌زنندهٔ IV را دارد، به‌گونه‌ای که یک تخمین‌زنندهٔ سازگار (هر چند ناکارا) ارائه خواهد داد:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{IV} = (\overline{\mathbf{W}}'\mathbf{Z})^{-1}\overline{\mathbf{W}}'\mathbf{y} \qquad (۸۷)$$

حال برای حل مشکل دوم می‌توان از روش GLS استفاده نمود. این روش مبتنی بر حداقل مربعات وزنی است و لذا براساس ماتریس $\overline{\Sigma}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\delta}}_{IV,GLS} &= \left[\overline{\mathbf{W}}'(\overline{\Sigma})^{-1}\mathbf{Z}\right]^{-1}\overline{\mathbf{W}}'(\overline{\Sigma})^{-1}\mathbf{y} \\ &= \left[\overline{\mathbf{W}}'(\Sigma^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{Z}\right]^{-1}\overline{\mathbf{W}}'(\Sigma^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{y}\end{aligned} \qquad (۸۸)$$

اگر عناصر ماتریس $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ را با σ^{ij} نشان دهیم و اگر $\mathbf{W}_j$ مجموعه متغیرهای ابزاری برای معادله jام باشد، آنگاه خواهیم داشت:

۱– فصل هجدهم را ببینید.

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_{IV,GLS} = \begin{bmatrix} \sigma^{11}\mathbf{W}_1'\mathbf{Z}_1 & \sigma^{12}\mathbf{W}_1'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \sigma^{1M}\mathbf{W}_1'\mathbf{Z}_M \\ \sigma^{21}\mathbf{W}_2'\mathbf{Z}_1 & \sigma^{22}\mathbf{W}_2'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \sigma^{2M}\mathbf{W}_2'\mathbf{Z}_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma^{M1}\mathbf{W}_M'\mathbf{Z}_1 & \sigma^{M2}\mathbf{W}_M'\mathbf{Z}_2 & \cdots & \sigma^{MM}\mathbf{W}_M'\mathbf{Z}_M \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{M}\sigma^{1j}\mathbf{W}_1'\mathbf{Y}_j \\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{2j}\mathbf{W}_2'\mathbf{Y}_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{M}\sigma^{Mj}\mathbf{W}_M'\mathbf{Y}_j \end{bmatrix} \qquad (۸۹)$$

ابعاد بردارها و ماتریس‌ها عبارتند از:

$\overline{\mathbf{W}}$: $\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j)\times\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j)$

$\overline{\Sigma}$: $TM\times TM$

$\mathbf{y}$: $TM\times 1$

$\mathbf{W}_j$: $T\times(M_j+K_j)$

$\mathbf{Z}$: $TM\times\sum_{i=1}^{M}(M_j+K_j)$

$\mathbf{Z}_j$: $T\times(M_j+K_j)$

σ^{ij} : 1×1

$\sum_{j=1}^{M}\sigma^{ij}\mathbf{W}_i'\mathbf{y}_j$: $(M_j+K_j)\times 1$ و $i=1,\dots,M$

$\sigma^{ij}\mathbf{W}_i'\mathbf{Z}_j$: $(M_i+K_i)\times(M_j+K_j)$ ، $i,j=1,\dots,M$

$\hat{\boldsymbol{\delta}}$: $\sum_{j=1}^{M}(M_j+K_j)\times 1$

در سیستم معادلات (۸۷)، عبارت $\overline{\mathbf{W}}'(\Sigma^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{Z}$ برابر است با:

$$\overline{\mathbf{W}}'(\Sigma^{-1}\otimes\mathbf{I})\mathbf{Z} = \left[\mathbf{W}_1' \quad \mathbf{W}_2' \quad \cdots \quad \mathbf{W}_M'\right]\begin{bmatrix} \sigma^{11}\mathbf{I} & \sigma^{12}\mathbf{I} & \cdots & \sigma^{1M}\mathbf{I} \\ \sigma^{21}\mathbf{I} & \sigma^{22}\mathbf{I} & \cdots & \sigma^{2M}\mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma^{M1}\mathbf{I} & \sigma^{M2}\mathbf{I} & \cdots & \sigma^{MM}\mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Z}_M \end{bmatrix} \qquad (۹۰)$$

$$\overline{\mathbf{W}}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}'_1\\ \mathbf{W}'_2\\ \vdots\\ \mathbf{W}'_M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{21} & \cdots & \mathbf{W}_{T1}\\ \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{22} & \cdots & \mathbf{W}_{T2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{W}_{1M} & \mathbf{W}_{2M} & \cdots & \mathbf{W}_{TM}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}'_j=[\mathbf{W}_{1j}\quad \mathbf{W}_{2j}\quad \cdots \quad \mathbf{W}_{Tj}]$ سطر jام ماتریس $\overline{\mathbf{W}}$

حال برای تخمین‌زنندهٔ 3SLS، ابتدا $\overline{\mathbf{W}}$ را معادل با $\hat{\mathbf{Z}}$ تعریف می‌کنیم:

$$\overline{\mathbf{W}}=\hat{\mathbf{Z}}=\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{Z}}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{\mathbf{Z}}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\mathbf{Z}}_M\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_M\end{bmatrix} \quad (۹۱)$$

توجه شود که $\hat{\mathbf{Z}}_j$ برابر است با:

$$\mathbf{Z}_j=[\mathbf{Y}_j\quad \mathbf{X}_j] \Rightarrow \hat{\mathbf{Z}}_j=\mathbf{X}\hat{\Pi} \Rightarrow \hat{\mathbf{Z}}_j=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_j \quad (۹۲)$$

در واقع $\hat{\mathbf{Z}}_j$ از یک تخمین‌زنندهٔ 2SLS به‌دست می‌آید که طبق آن $\hat{\mathbf{Z}}_j$ روی تمام متغیرهای برون‌زا برازش می‌شود. به عبارت دیگر اجزای $\mathbf{Z}_j$ یعنی $\mathbf{Y}_j$ و $\mathbf{X}_j$ هر یک روی $\mathbf{X}$ برازش می‌شود که برای آنها به‌ترتیب $\hat{\mathbf{Y}}_j=\mathbf{X}\hat{\Pi}_j$ و $\hat{\mathbf{X}}_j=\mathbf{X}\hat{\underline{\Pi}}_j=\mathbf{X}_j$ به‌دست می‌آید و لذا $\hat{\mathbf{Z}}_j$ برابر است با:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Z}}_j&=[\hat{\mathbf{Y}}_j\quad \hat{\mathbf{X}}_j]=[\mathbf{X}\hat{\Pi}_j\quad \mathbf{X}\hat{\underline{\Pi}}_j]\\ &=[\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_j\quad \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_j]\\ &=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'[\mathbf{Y}_j\quad \mathbf{X}_j]=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}_j\end{aligned} \quad (۹۳)$$

توجه شود که $\hat{\Pi}_j=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}_j$ و $\hat{\underline{\Pi}}_j=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_j$ می‌باشد.

حال تخمین‌زنندهٔ IV عبارت است از:

$$\hat{\delta}_{IV}=(\hat{\mathbf{Z}}'\hat{\mathbf{Z}})^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{y} \quad (۹۴)$$

با توجه به $\hat{\mathbf{Z}}$ و نحوه تعیین آن، تخمین‌زنندهٔ فوق یک تخمین‌زنندهٔ 2SLS می‌باشد. اگر همبستگی بین جملات خطای معادلات را در نظر بگیریم آنگاه بایستی از یک تخمین‌زنندهٔ GLS نیز استفاده کنیم که بر مبنای ماتریس $\overline{\Sigma}=\Sigma\otimes \mathbf{I}_T$ می‌باشد. این تخمین‌زننده را تخمین‌زنندهٔ 3SLS می‌گویند:

$$\hat{\delta}_{3SLS}=[\hat{\mathbf{Z}}'(\Sigma^{-1}\otimes \mathbf{I})\mathbf{Z}]^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'(\Sigma^{-1}\otimes \mathbf{I})\mathbf{y} \quad (۹۵)$$

ماتریس واریانس-کوواریانس مجانبی این تخمین‌زننده عبارت است از:

$$\text{plim}\hat{\delta}_{3SLS}=[\overline{\mathbf{Z}}'(\Sigma^{-1}\otimes \mathbf{I})]^{-1} \quad (۹۶)$$

که $\overline{\mathbf{Z}}$ معادل با ماتریس قطری است که مشابه $\hat{\mathbf{Z}}$ بوده که هر عنصر قطری آن به‌صورت ماتریس $[\mathbf{Y}_j\quad \mathbf{X}_j]$ می‌باشد.

بدین ترتیب روش 3SLS دارای ۳ مرحله است:

۱- برآورد $\mathbf{Y}_j=\mathbf{X}\Pi_j+\mathbf{V}_j$ برای هر معادله با استفاده از روش OLS.

۲- برآورد $\hat{\delta}_{j,2SLS}$ برای هر معادله و سپس محاسبه $\hat{\sigma}_{ij}$:

$$\sigma^{ij}=\frac{(\mathbf{y}_i-\mathbf{Z}_i\hat{\delta}_{i,2SLS})'(\mathbf{y}_j-\mathbf{Z}_j\hat{\delta}_{j,2SLS})}{T} \quad (۹۷)$$

۳- محاسبهٔ $\hat{\delta}$ با استفاده از روش GLS مطابق با فرمول (۹۵).

ب) روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML)

روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل از کل سیستم معادلات استفاده می‌کند. اگر توزیع جملات خطا، نرمال باشد روش FIML کاراتر از هر تخمین‌زنندهٔ دیگری است. تخمین‌زنندهٔ FIML تمام معادلات و پارامترها را به‌صورت یکجا در نظر می‌گیرد. ابتدا فرم خلاصه‌شده سیستم معادلات را برای سال t در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t=\mathbf{x}'_t\Pi+\mathbf{v}_t \quad , \quad t=1,\ldots,T \quad , \quad \Pi=-\mathbf{B}\Gamma^{-1} \quad , \quad \mathbf{v}_t=-\Gamma^{-1}\mathbf{u}_t \quad (۹۸)$$

فرض می‌شود که $\mathbf{v}_t$ توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس Ω داشته باشند:

$$E(\mathbf{v}_t\mathbf{v}_t'|\mathbf{X})=\Omega=(\Gamma^{-1})'\Sigma\Gamma^{-1} \quad , \quad \Omega^{-1}=\Gamma\Sigma^{-1}\Gamma' \quad , \quad \Sigma=E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t'|\mathbf{X}) \qquad (۹۹)$$

بدین‌ترتیب تابع درستنمایی برای $\mathbf{v}_t$ یا $\mathbf{y}_t$ عبارت است از:

$$\mathbf{y}_t|\mathbf{x}_t \sim N(\mathbf{x}_t'\Pi , \Omega)$$

$$L_t=\frac{۱}{(۲\pi)^{\frac{M}{۲}}|\Omega|^{\frac{۱}{۲}}}e^{-\frac{۱}{۲}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi)'\Omega^{-۱}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi)} \qquad (۱۰۰)$$

لگاریتم تابع درستنمایی را برای سال t به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\ln L_t=-\frac{M}{۲}\ln(۲\pi)-\frac{۱}{۲}\ln|\Omega|-\frac{۱}{۲}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi)'\Omega^{-۱}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi) \qquad (۱۰۱)$$

لگاریتم تابع درستنمایی برای کل مشاهدات (از ۱ تا T) عبارت است از:

$$\ln L=\sum_{t=۱}^{T}\ln L_t=-\frac{TM}{۲}\ln(۲\pi)-\frac{T}{۲}\ln|\Omega|-\frac{۱}{۲}\sum_{t=۱}^{T}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi)'\Omega^{-۱}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi) \qquad (۱۰۲)$$

در (۱۰۲) جمله سوم را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\sum_{t=۱}^{T}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t'\Pi)'\Omega^{-۱}(\mathbf{y}_t-\mathbf{x}_t\Pi)&=\sum_{t=۱}^{T}\mathbf{v}_t'\Omega^{-۱}\mathbf{v}_t=\operatorname{tr}(\mathbf{V}'\Omega^{-۱}\mathbf{V})\\&=\operatorname{tr}\left[\Omega^{-۱}\mathbf{V}'\mathbf{V}\right]=\operatorname{tr}\left[\Gamma\Sigma^{-۱}\Gamma'\mathbf{V}'\mathbf{V}\right]\\&=\operatorname{tr}\left[\Gamma\Sigma^{-۱}\Gamma'(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma^{-۱})'(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma)\right]\end{aligned} \qquad (۱۰۳)$$

توجه شود که $\mathbf{V}$ ماتریس قطری با عناصر $\mathbf{v}_t$ است. بدین‌ترتیب با جایگذاری (۱۰۳) در (۱۰۲)، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L=-\frac{T}{۲}\ln(۲\pi)-\frac{T}{۲}\ln\left|(\Gamma^{-۱})'\Sigma\Gamma^{-۱}\right|-\frac{T}{۲}\operatorname{tr}\left[\Gamma\Sigma^{-۱}\Gamma'(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma)'(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma^{-۱})\right] \qquad (۱۰۴)$$

ابتدا جمله دوم (۱۰۴) را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}-\frac{T}{۲}\ln\left|(\Gamma^{-۱})'\Sigma\Gamma^{-۱}\right|&=-\frac{T}{۲}\ln\left|(\Gamma^{-۱})'\right|-\frac{T}{۲}\ln|\Sigma|-\frac{T}{۲}\ln\left|\Gamma^{-۱}\right|\\&=T\ln|\Gamma|-\frac{T}{۲}\ln|\Sigma|\end{aligned} \qquad (۱۰۵)$$

زیرا $\left|\Gamma^{-۱}\right|=\left|(\Gamma^{-۱})'\right|$ است.

حال برای جمله سوم (۱۰۴)، نیاز به برخی ساده‌سازیها داریم. بدین منظور ابتدا عبارت زیر را ساده می‌کنیم:

$$\Gamma'(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma^{-۱})'=\Gamma'\mathbf{Y}'+\mathbf{B}'\mathbf{X}'=(\mathbf{Y}\Gamma+\mathbf{XB})'$$

حال Γ را در (۱۰۳) از ابتدای عبارت به آخر عبارت برده و در پرانتز دوم ضرب می‌کنیم که نتیجه آن عبارت است از[۱]:

$$(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma^{-۱})\Gamma=(\mathbf{Y}\Gamma+\mathbf{XB})$$

با جایگذاری نتایج فوق در لگاریتم تابع درستنمایی، $\ln L$ به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}\ln L=&-\frac{T}{۲}\ln(۲\pi)+T\ln(\Gamma)-\frac{T}{۲}\ln|\Sigma|\\&-\frac{۱}{۲}\operatorname{tr}\left[\Sigma^{-۱}(\mathbf{Y}\Gamma+\mathbf{XB})'(\mathbf{Y}\Gamma+\mathbf{XB})\right]\end{aligned} \qquad (۱۰۶)$$

حال عبارت فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\ln L=-\frac{T}{۲}\left[M\ln(۲\pi)-۲\ln|\Gamma|+\operatorname{tr}(\Sigma^{-۱}\mathbf{S})+\ln|\Sigma|\right] \qquad (۱۰۷)$$

که در آن، $\mathbf{S}$ عبارت است از:

$$\mathbf{S}=(\mathbf{Y}\Gamma+\mathbf{XB})'(\mathbf{Y}\Gamma+\mathbf{XB}) \qquad (۱۰۸)$$

$$s_{ij}=\frac{۱}{T}(\mathbf{Y}\Gamma_i+\mathbf{XB}_i)'(\mathbf{Y}\Gamma_j+\mathbf{XB}_j) \qquad (۱۰۹)$$

s_{ij} مشابه $\hat{\sigma}_{ij}$ در (۹۷) است. Γ_j و $\mathbf{B}_j$ به‌ترتیب ستون jاُم ماتریس‌های Γ و $\mathbf{B}$ هستند. برای حداکثر نمودن $\ln L$ لازم است تمام محدودیت‌هایی را که بر روی ساختار سیستم معادلات وجود دارد در نظر بگیریم. بدین منظور عبارت $\operatorname{tr}(\Sigma^{-۱}\mathbf{S})$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

۱- توجه شود که رابطه زیر برقرار است:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{ABCD})=\operatorname{tr}(\mathbf{BCDA})$$

اگر $\mathbf{A}=\Gamma$، $\mathbf{B}=\Sigma^{-۱}$، $\mathbf{C}=\Gamma'(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma)'$ و $\mathbf{D}=(\mathbf{Y}+\mathbf{XB}\Gamma^{-۱})$ را تعریف کنیم، آنگاه نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

$$tr(\Sigma^{-1}S) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\sigma^{ij}(\mathbf{y}_i - \mathbf{Y}_i\gamma_i - \mathbf{X}_i\beta_i)'(\mathbf{y}_j - \mathbf{Y}_j\gamma_j - \mathbf{X}_j\beta_j) \quad (۱۱۰)$$
$$= \sum_i\sum_j \sigma^{ij}(\mathbf{y}_i - \mathbf{Z}_i\delta_i)'(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j\hat{\delta}_j)'$$

به‌طوری که $\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix}\beta_j \\ \beta_j^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_j \\ 0\end{bmatrix}$ و $\Gamma_j = \begin{bmatrix}1 \\ -\gamma_j \\ -\gamma_j^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 \\ -\gamma_j \\ 0\end{bmatrix}$ ، $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_j \quad \mathbf{X}_j^*]$ ، $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}_j \quad \mathbf{Y}_j \quad \mathbf{Y}_j^*]$ است که هر یک از آنها قبلاً معرفی شده‌اند. σ^{ij} عناصر ماتریس Σ^{-1} را نشان می‌دهد. همچنین $\mathbf{Z}_j = [\mathbf{y}_j \quad \mathbf{Y}_j]$ و $\delta_j = \begin{bmatrix}\gamma_j \\ \beta_j\end{bmatrix}$ است.

ملاحظه می‌شود که رابطه (۱۱۰) معادل با یک میانگین وزنی از خطاها برای کل مشاهدات و معادلات است. وزنها برابر با σ^{ij} هستند که عناصر ماتریس Σ^{-1} را تشکیل می‌دهند. با حداکثر نمودن تابع درستنمایی نسبت به δ، تخمین‌زنندهٔ FIML به‌دست می‌آید. ثابت می‌شود که تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای δ برابر با یک نقطه ثابت در معادله زیر است[1]:

$$\hat{\delta}_{FIML} = \left[\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\delta})'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{Z}\right]^{-1}\left[\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\delta})'(\hat{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I})\mathbf{y}\right] = (\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{Z})^{-1}\hat{\mathbf{Z}}'\mathbf{y} \quad (۱۱۱)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}(\hat{\delta})'(\Sigma^{-1} \otimes \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}^{11}\hat{\mathbf{Z}}_1 & \hat{\sigma}^{12}\hat{\mathbf{Z}}_1 & \cdots & \hat{\sigma}^{1M}\hat{\mathbf{Z}}_1 \\ \hat{\sigma}^{12}\hat{\mathbf{Z}}_2 & \hat{\sigma}^{22}\hat{\mathbf{Z}}_2 & \cdots & \hat{\sigma}^{2M}\hat{\mathbf{Z}}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\sigma}^{1M}\hat{\mathbf{Z}}_M & \hat{\sigma}^{2M}\hat{\mathbf{Z}}_M & \cdots & \hat{\sigma}^{MM}\hat{\mathbf{Z}}_M \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Z}}' \quad (۱۱۲)$$

$$\hat{\mathbf{Z}}_j = \left[\mathbf{X}\hat{\Pi}_j \quad \mathbf{X}_j\right]$$

که $\hat{\Pi}_j$ معادل با M_j ستون از ماتریس $-\hat{\mathbf{B}}\hat{\Gamma}^{-1}$ است. همچنین $\hat{\sigma}_{ij}$ عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}(\mathbf{y}_i - \mathbf{Z}_i\hat{\delta}_i)'(\mathbf{y}_j - \mathbf{Z}_j\hat{\delta}_j) \quad (۱۱۳)$$

و σ^{ij} برابر با عنصر ijام ماتریس $\hat{\Sigma}^{-1}$ است.

1- Green, 2003, p.408

ملاحظه می‌شود که تخمین‌زنندهٔ FIML یک نوع تخمین‌زنندهٔ IV است. همچنین قبلاً نشان دادیم که تخمین‌زننده 3SLS نیز یک تخمین‌زنندهٔ IV است که از سازگاری برخوردار است. همچنین می‌توان نشان داد که تخمین‌زنندهٔ 3SLS به‌طور مجانبی کارا است و اگر جملات خطا دارای توزیع نرمال باشند تخمین‌زنندهٔ 3SLS توزیع مجانبی یکسانی با تخمین‌زننده FIML خواهد داشت.

مسائل

۱-۱۹ اگر معادلات همزمان پویا به شکل زیر باشد فرم خلاصه‌شده معادلات ساختاری را بنویسید.

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \phi_{11}Y_{1t-1} + \phi_{12}Y_{2t-1} + \gamma_1 Y_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_2 + \phi_{21}Y_{1t-1} + \phi_{22}Y_{2t-1} + \gamma_2 Y_{1t} + u_{2t}$$

۲-۱۹ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = \beta_0 + \beta_1 C_{t-1} + \beta_2 Y_t + u_{1t}$$
$$I_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \alpha_3 R_t + u_{2t}$$

C، I، Y و r به‌ترتیب هزینه‌های مصرفی خانوارها، سرمایه‌گذاری، درآمد ملی و نرخ بهره می‌باشند. جملات اختلال مستقل از یکدیگر بوده و با R_t وابستگی ندارند.

الف) آیا معادلات مدل فوق قابل شناسایی هستند؟

ب) چگونه می‌شود ضرایب آنها را برآورد کرد؟

۳-۱۹ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_t^2 + \gamma_1 Y_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_t + \gamma_2 Y_{1t} + u_{2t}$$

X_t متغیر برونزا بوده و u_{1t} و u_{2t} فروض اساسی رگرسیون را برآورد می‌کند.

الف) آیا هر دو معادله مشخص‌اند؟

ب) معادلات فرم خلاصه‌شده را استخراج کنید.

ج) نحوه برآورد معادله اول را از روش 2SLS تشریح کنید.

۴-۱۹ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$Y_{1t} = \beta_{11} Y_{2t} + u_{1t}$
$Y_{2t} = \gamma_1 X_t + \beta_{21} Y_{1t} + u_{2t}$

تخمین‌های متغیر ابزاری و 2SLS را به‌دست آورده و آنها را با یکدیگر مقایسه کنید؟

۱۹-۵ معادله رگرسیون دو متغیره $Y_t = \alpha + \beta X_t + u_t$ مفروض است. فرض کنید که متغیر Z_t به‌عنوان متغیر ابزاری به جای X_t استفاده شده است:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum z_t y_t}{\sum z_t x_t}$$

نشان دهید که $\hat{\beta}$ ناسازگار است. شرایطی را که سازگاری $\hat{\beta}$ را تضمین می‌کند مشخص کنید؟

۱۹-۶ آیا تخمین‌های OLS از پارامترهای معادله iام از فرم ساختاری که در زیر با $\delta_{i,OLS}$ نشان داده شده است سازگار می‌باشد؟

$$\delta_{i,OLS} = (X_i' X_i)^{-1} X_i Y_i \quad , \quad X_i = [Y \quad Z] L_i$$

۱۹-۷ در سیستم معادلات زیر، Y_tها درون‌زا و X_tها برون‌زا هستند. هر یک از معادلات را شناسایی کنید.

$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 Y_{3t} + \alpha_3 X_{1t} + \alpha_4 X_{2t} + u_{1t}$
$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{3t} + \beta_2 X_{1t} + u_{2t}$
$Y_{3t} = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{1t} + u_{3t}$

۱۹-۸ با توجه به مدل زیر، هر یک از معادلات را بر اساس شرط درجه‌ای شناسایی نمایید.

$Y_{1t} + a_{11} X_{1t} = u_{1t}$
$b_{21} Y_{1t} + Y_{2t} + a_{21} X_{1t} = u_{2t}$
$b_{32} Y_{1t} + Y_{3t} + a_{31} X_{1t} + a_{32} X_{2t} = u_{3t}$

۱۹-۹ مدل زیر را در نظر بگیرید:

$Q_t^d = a_1 + b_1 P_t + c_1 I_t + u_{1t}$
$Q_t^s = a_2 + b_2 P_t + u_{2t}$
$Q_t^d = Q_t^s = Q_t$

الف) فرم خلاصه شدهٔ سیستم معادلات فوق را بنویسید؟

ب) آیا جواب سیستم معادلات منحصر به فرد است؟

ج) فرض لازم برای منحصر به‌فرد بودن جواب سیستم معادلات را بنویسید؟

۱۹-۱۰ معادلات همزمان زیر را در نظر بگیرید:

$R_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 M_t + u_{1t}$
$Y_t = \alpha_1 + \alpha_2 R_t + u_{2t}$

M متغیر برونزا است.

الف) آیا معادلات مشخص هستند؟

ب) از چه روشی برای تخمین استفاده می‌کنید؟

۱۹-۱۱ سیستم معادلات همزمان زیر را در نظر بگیرید:

$C_t = \alpha + \beta Y_t + u_t$
$Y_t = C_t + I_t$

داده‌های زیر بر حسب انحراف از میانگین مفروض می‌باشند:

	c_t	y_t	i_t
c_t	۲/۷۹۶۲۲	۳/۵۷۱۵۵	۰/۷۷۵۳۲
y_t		۴/۸۷۱۶۲	۱/۳۰۰۰۷
i_t			۰/۵۲۴۷۳

الف) فرم حل شده را برای سیستم معادلات فوق بنویسید؟

ب) β را با استفاده از روش حداقل مربعات غیرمستقیم (ILS) برآورد نمایید؟

ج) β را با استفاده از روش متغیرهای کمکی یا ابزاری (IV) برآورد نمایید؟

د) β را با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی (OLS) برآورد نمایید؟

ح) در مورد نتایج حاصل از برآورد β به سه روش مذکور بحث نمایید؟

۱۹-۱۲ در معادلات همزمان چه موقع از روش 2SLS استفاده می‌شود؟

۱۹-۱۳ مدل عرضه و تقاضای زیر داده شده است:

تقاضا: $Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + u_{1t}$

عرضه: $Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 I_t + u_{2t}$

اگر معادله عرضه را با OLS برآورد کنیم، ثابت کنید که $\hat{\alpha}_1$ بااریب است که مقدار اریب آن برابر با $-\frac{(\alpha_1 - \beta_1)\sigma_1^2}{\beta_2^2 \sigma_I^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ است (σ_1^2، σ_2^2 و σ_I^2 به‌ترتیب واریانس u_{1t}، u_{2t} و I_t می‌باشد).

۱۹-۱۴ مدل اقتصاد کلان کینزی را در نظر بگیرید:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + u_t$$
$$I_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 Y_{t-1} + v_t$$

الف) فرم حل‌شده را به‌دست آورید.

ب) از مقایسه فرم حل‌شده و فرم ساختاری، تعیین کنید که کدامیک از معادلات قابل شناسایی هستند.

ج) معادلات را شناسایی کنید.

د) اگر معادله‌ای بیش از حد مشخص باشد، روش تخمین آن و مراحل آن را توضیح دهید.

۱۹–۱۵ سیستم معادلات زیر مفروض است:

$$Y_t = C_t + I_t$$
$$C_t = \alpha_1 + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 Y_{t-1} + u_t$$
$$I_t = \beta_1 + \beta_2 R_t + v_t$$

الف) متغیرهای درون‌زا و برون‌زا را مشخص کنید.

ب) فرم حل‌شده را به‌دست آورید.

ج) معادله مصرف و سرمایه‌گذاری را شناسایی کنید.

۱۹–۱۶ سیستم معادلات زیر مفروض است:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \gamma_{12} Y_{2t} + \gamma_{14} Y_{4t} + \beta_{11} X_{1t} + \beta_{12} X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \alpha_2 + \gamma_{23} Y_{3t} + \gamma_{24} Y_{4t} + \beta_{21} X_{1t} + \beta_{22} X_{2t} + u_{2t}$$
$$Y_{3t} = \alpha_3 + \gamma_{31} Y_{1t} + \gamma_{32} Y_{2t} + u_{3t}$$
$$Y_{4t} = \alpha_4 + \gamma_{41} Y_{1t} + \gamma_{42} Y_{2t} + u_{4t}$$

هر یک از معادلات فوق را شناسایی کنید.

۱۹–۱۷ سیستم معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{1t} = \alpha_1 + \alpha_2 Y_{2t} + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_{1t}$$
$$Y_{2t} = \gamma_1 + \gamma_2 Y_{1t} + u_{2t}$$

الف) نشان دهید که معادله دوم، بیش از حد مشخص است.

ب) مراحل روش 2SLS را برای معادله دوم بنویسید.

ج) آیا واریانس $\hat{\gamma}_2$ در روش 2SLS بیانگر واریانس واقعی آن است؟ اگر چنین نیست، چه تعدیلی بر روی آن باید انجام داد؟

ضمیمه فصل نوزدهم: برآورد معادلات همزمان در Stata

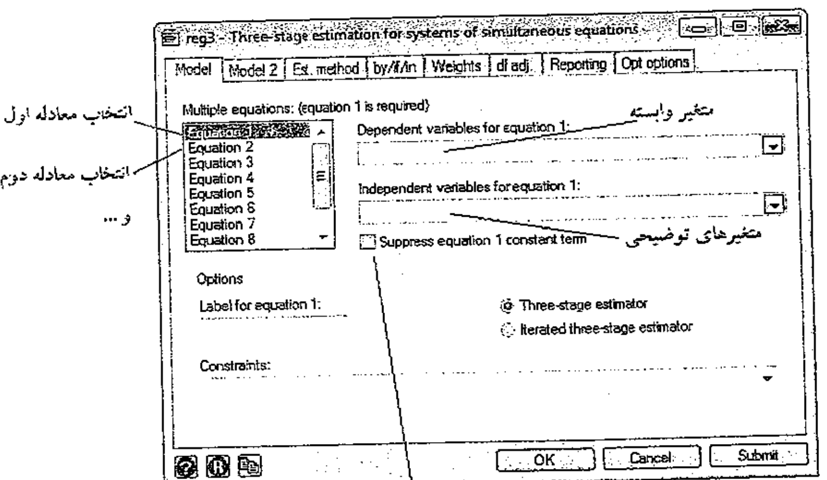
برآورد معادلات همزمان در Stata

فایل data5

در اینجا سه روش معادلات همزمان یعنی روش معادلات به ظاهر نامرتبط، روش حداقل مربعات دومرحله ای (2SLS) و روش حداقل مربعات سه مرحله‌ای (3SLS) را بحث می کنیم. اما روش 2SLS که نوعی از روش متغیرهای ابزاری است در فصل هشتم بحث شد. همچنین روش معادلات به ظاهر نامرتبط در فصل شانزدهم بررسی شد. در اینجا روش سوم یعنی 3SLS را بررسی خواهیم کرد.

برای استفاده از روش 3SLS مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Statistics ⟶ Linear models and related ⟶ multi-equation models ⟶ three-stage least squares



نتایج عبارت است از:

```
. reg3 (y1 = y2 y3 l.y1) (y2 = x2) (y3 = x1 l.y3, noconstant)

Three-stage least-squares regression
```

Equation	Obs	Parms	RMSE	"R-sq"	chi2	P
y1	31	3	.051567	0.9700	1006.47	0.0000
y2	31	1	.0154432	0.9963	9937.14	0.0000
y3	31	2	.0148652	1.0000	2.80e+07	0.0000

		Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf. Interval]	
y1							
	y2	.3130423	.1224077	2.56	0.011	.0731276	.5529571
	y3	-.0175109	.153728	-0.11	0.909	-.3188123	.2837905
	y1 L1.	.8214874	.0853638	9.62	0.000	.6541774	.9887973
	_cons	-.526432	.7034225	-0.75	0.454	-1.905115	.8522507
y2							
	x2	.0284486	.0002854	99.69	0.000	.0278893	.029008
	_cons	8.689245	.0098101	885.75	0.000	8.670017	8.708472
y3							
	x1	.1244014	.00925	13.45	0.000	.1062719	.142531
	y3 L1.	.8999966	.0076322	117.92	0.000	.8850377	.9149555

Endogenous variables: y1 y2 y3
Exogenous variables: L.y1 x2 x1 L.y3

فصل بیستم

مدل‌های خودرگرسیون برداری (VAR)[1]

۲۰-۱ مقدمه

مدل‌های معادلات همزمان که در فصل نوزدهم بررسی شد مبتنی بر رویکردی است که طبق آن، برخی متغیرها را درون‌زا و برخی را برون‌زا فرض می‌کند. تعیین متغیرها به دو دستهٔ درون‌زا و برون‌زا ممکن است پشتوانه نظری داشته باشد یا ممکن است سلیقه‌ای باشد. حتی زمانی که پشتوانه نظری دارد، در خصوص آن تردیدهایی مطرح می‌شود و ممکن است نتایج تجربی با مبانی نظری در تناقض باشد. به هر حال در شرایطی که مطمئن نیستیم چه متغیرهایی درون‌زا و چه متغیرهایی برون‌زا هستند، از رویکرد دیگری در مدل‌سازی معادلات همزمان استفاده می‌شود که معروف به مدل‌های خودرگرسیون برداری (VAR) هستند. این رویکرد بر این نکته تأکید دارد که بایستی در مدل‌سازی و به‌ویژه در تعیین متغیرهای درون‌زا و برون‌زا، از اعمال سلیقه‌های فردی پرهیز شود و لذا همهٔ متغیرها را درون‌زا در نظر می‌گیرد. مشابه معادلات همزمان، در روش خودرگرسیون برداری، ابتدا یک مدل معادلات همزمان طراحی می‌شود که در آن همهٔ متغیرها تابعی از مقادیر جاری و گذشتهٔ یکدیگر می‌باشند. این مدل، معروف به مدل VARساختاری (SVAR)[2] می‌باشد. از طرف دیگر، با حل مدل SVAR برای متغیرهای موردنظر، فرم حل‌شدهٔ VAR به‌دست می‌آید که معروف به VARاستاندارد است. در این مدل، هریک از متغیرها تابعی از مقادیر گذشتهٔ همهٔ متغیرهای موجود در مدل هستند. از آنجا که VARاستاندارد تابعی از مقادیر گذشتهٔ متغیرها است، با روش OLS قابل تخمین است، اما برای مدل SVAR چنین شرایطی برقرار نیست. یکی از موضوعات اصلی در این مدل‌ها، قابلیت شناسایی مدل SVAR است. بدین‌معنی که با تخمین مدل

1- vector auto-regressive
2- structural VAR

VAR استاندارد بایستی بتوانیم به ضرایب مدل SVAR برسیم. بنابراین، شناسایی یکی از موضوعات مهم در این مدل‌ها است.

در تحلیل مدل‌های VAR و استفاده از نتایج آن، معمولاً از تجزیه واریانس و توابع واکنش استفاده می‌شود و توجه کمتری به معیارهایی مانند معنی‌دار بودن ضرایب با استفاده از آمارهٔ t می‌شود. زیرا در مدل‌های VAR متغیرهای توضیحی معمولاً همخطی شدیدی دارند و لذا آمارهٔ t نمی‌تواند معیار مطمئنی برای مناسب بودن یا نبودن متغیرها باشد. همچنین گفته می‌شود که اگر متغیرها نامانا باشند، نباید از تفاضل آنها استفاده نمود، زیرا در مدل VAR، هدف تعیین روابط متقابل میان متغیرها است نه برآورد پارامترها. از طرف دیگر، تفاضل‌گیری موجب از بین رفتن اطلاعات مربوط به هم‌انباشتگی (روابط تعادلی) بین متغیرها می‌شود. علاوه بر این، استدلال می‌شود که نیازی به روندزدایی از متغیرهای موجود در مدل VAR نیست، زیرا یک مدل VAR که دارای ریشه واحد (نامانا) بوده و در آن جزء ثابت (عرض از مبدأ) را وارد کرده باشیم، می‌تواند تقریب خوبی از متغیرهایی باشد که دارای روند هستند.[1] در واقع، روند تصادفی را می‌توان جایگزین روند قطعی نمود.[2]

در این فصل، ابتدا به معرفی مدل SVAR و VAR می‌پردازیم و سپس موضوع شناسایی در این مدل‌ها را بررسی خواهیم کرد. در ادامه، روش برآورد حداکثر درستنمایی را در مدل‌های VAR تشریح می‌کنیم. سپس به دو کاربرد مهم مدل VAR، یعنی توابع واکنش آنی و تجزیه واریانس، خواهیم پرداخت.

۲۰-۲ استخراج مدل VAR

مدل VAR یک مدل آماری است و نه اقتصادی. لذا این مدل بر پایه تئوری آماری و فروض آماری قرار دارد. بدین منظور از نتایجی که در ابتدای فصل سیزدهم بخش ۳-۱۳ به‌دست آمد، استفاده می‌کنیم. در فصل سیزدهم مدل AR(p) را بر اساس فروض آماری استخراج کردیم که در اینجا نیز از همان اصول برای استخراج مدل VAR(p) استفاده می‌کنیم.

فرض کنید که $\mathbf{y}_t$ بردار سری زمانی شامل m متغیر باشد:

۱- اندرس، ترجمه صادقی و سؤال پور، ۱۳۸۶، ص ۷۰-۶۹.

۲- در خصوص روند تصادفی و روند قطعی به فصل چهاردهم مراجعه شود.

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{mt} \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

ماتریس مشاهدات عبارت است از:

$$\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{21} & \cdots & Y_{m1} \\ Y_{12} & Y_{22} & \cdots & Y_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Y_{1T} & Y_{2T} & \cdots & Y_{mT} \end{bmatrix}_{T\times m} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}'_1 \\ \mathbf{y}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}'_T \end{bmatrix}$$

احتمال مشترک بردارهای تصادفی $\mathbf{y}_1$، $\mathbf{y}_2$، ... و $\mathbf{y}_T$ عبارت است از:

$$P(\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_T|\boldsymbol{\theta})$$

مشابه رابطه (۱۴-۱۱) در فصل سیزدهم، تابع احتمال مشترک را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$P(\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_T;\boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^{T} P(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{t-1},\mathbf{y}_{t-2},\ldots\mathbf{y}_1;\boldsymbol{\theta}) \qquad (۲۰-۱)$$

فرض کنید که بردار $\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{t-1},\mathbf{y}_{t-2},\ldots,\mathbf{y}_1$ توزیع نرمال دارد. بدین منظور، بردار $\mathbf{y}_t$ را با $\mathbf{x}_1$ و ماتریس $[\mathbf{y}_{t-1}\ \ \mathbf{y}_{t-2}\ \cdots\ \mathbf{y}_1]$ را با $\mathbf{X}_2$ نشان می‌دهیم. مشابه رابطه (۱۵-۱۱)، توزیع شرطی $\mathbf{x}_1|\mathbf{X}_2$ را که همان توزیع شرطی $\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{t-1},\mathbf{y}_{t-2},\ldots,\mathbf{y}_1$ است، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{x}_1|\mathbf{X}_2 \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}_{1.2},\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}) \quad \text{یا} \quad \mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{t-1},\mathbf{y}_{t-2},\ldots\mathbf{y}_1 \sim \mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}_{1.2},\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}) \qquad (۲۰-۲)$$

$\boldsymbol{\mu}_{1.2}$ میانگین شرطی $\mathbf{y}_t$ است که مشروط به مقادیر قبلی آن (یعنی $\mathbf{y}_{t-1}$، ... و $\mathbf{y}_1$) است. $\boldsymbol{\Sigma}_{11.2}$ نیز واریانس شرطی $\mathbf{y}_t$ می‌باشد.

برای استخراج مدل VAR(p)، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا بردار $\mathbf{x}_1$ و ماتریس‌های $\mathbf{X}_2$ و $\mathbf{Z}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_t : m\times 1 \quad , \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_1 \end{bmatrix}_{m(t-1)\times 1} \quad , \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}_{mt\times 1}$$

۲- میانگین بردار $\mathbf{x}_1$ و ماتریس‌های $\mathbf{X}_2$ و $\mathbf{Z}$، عبارتند از (فرض می‌کنیم که میانگین Y_{it} برای هر i در همهٔ زمان‌ها، ثابت و یکسان است):

$$E(\mathbf{x}_1)=\boldsymbol{\mu}_1=E(\mathbf{y}_t)=\begin{bmatrix}E(Y_{1t})\\E(Y_{2t})\\\vdots\\E(Y_{mt})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_{10}\\\mu_{20}\\\vdots\\\mu_{m0}\end{bmatrix}_{m\times1}=\boldsymbol{\mu}_0$$

$$E(\mathbf{X}_2)=\begin{bmatrix}E(\mathbf{y}_{t-1})\\E(\mathbf{y}_{t-2})\\\vdots\\E(\mathbf{y}_1)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\mu}_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_0\\\boldsymbol{\mu}_0\\\vdots\\\boldsymbol{\mu}_0\end{bmatrix}_{m(t-1)\times1}$$

$$E(\mathbf{Z})=\begin{bmatrix}E(\mathbf{x}_1)\\E(\mathbf{X}_2)\end{bmatrix}=\boldsymbol{\mu}_z=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_1\\\boldsymbol{\mu}_2\end{bmatrix}_{mt\times1}$$

۳- واریانس بردار $\mathbf{x}_1$ و ماتریس‌های $\mathbf{X}_2$ و $\mathbf{Z}$ را حساب می‌کنیم:

الف) Σ_{11} واریانس $\mathbf{x}_1$ (یا $\mathbf{y}_t$) است که عبارت است از:[1]

$$\Sigma_{11}=\text{var}(\mathbf{x}_1)=E(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)(\mathbf{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1)'$$

$$=E(\mathbf{y}_t-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_t-\boldsymbol{\mu}_0)'=\begin{bmatrix}\gamma_{11,0}&\gamma_{12,0}&\cdots&\gamma_{1m,0}\\\gamma_{21,0}&\gamma_{22,0}&\cdots&\gamma_{2m,0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{m1,0}&\gamma_{m2,0}&\cdots&\gamma_{mm,0}\end{bmatrix}_{m\times m}=\mathbf{G}_0 \qquad (۲۰-۳)$$

۱- ماتریس Σ_{11} به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\Sigma_{11}=E(\mathbf{y}_t-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_t-\boldsymbol{\mu}_0)'=E\begin{bmatrix}Y_{1t}-\mu_{10}\\Y_{2t}-\mu_{20}\\\vdots\\Y_{mt}-\mu_{m0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{1t}-\mu_{10}&Y_{2t}-\mu_{20}&\cdots&Y_{mt}-\mu_{m0}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(Y_{1t}-\mu_{10})^2&(Y_{1t}-\mu_{10})(Y_{2t}-\mu_{20})&\cdots&(Y_{1t}-\mu_{10})(Y_{mt}-\mu_{m0})\\(Y_{2t}-\mu_{20})(Y_{1t}-\mu_{10})&(Y_{2t}-\mu_{20})^2&\cdots&(Y_{2t}-\mu_{20})(Y_{mt}-\mu_{m0})\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(Y_{mt}-\mu_{m0})(Y_{1t}-\mu_{10})&(Y_{mt}-\mu_{m0})(Y_{2t}-\mu_{20})&\cdots&(Y_{mt}-\mu_{m0})^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_{11,0}&\gamma_{12,0}&\cdots&\gamma_{1m,0}\\\gamma_{21,0}&\gamma_{22,0}&\cdots&\gamma_{2m,0}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{m1,0}&\gamma_{m2,0}&\cdots&\gamma_{mm,0}\end{bmatrix}_{m\times m}=\mathbf{G}_0=[\gamma_{ij,0}]$$

$\mathbf{G}_0$ ماتریس واریانس- کوواریانس $\mathbf{y}_t$ است. اندیس ۰ بیانگر این است که وقفهٔ زمانی وجود ندارد و فرض می‌کنیم که ساختار کوواریانس بین Y_{it}ها در همهٔ زمان‌ها، یکسان و ثابت است.

ب) Σ_{22} ماتریس واریانس- کوواریانس $\mathbf{X}_2$ است که معادل با ماتریس واریانس-کوواریانس بردار $[\mathbf{y}_{t-1},\dots,\mathbf{y}_1]$ می‌باشد.[1]

۱- ماتریس Σ_{22} به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\Sigma_{22}=E(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)(\mathbf{X}_2-\boldsymbol{\mu}_2)'=E\begin{bmatrix}(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)\\(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)\\\vdots\\(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)'&(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)'&\cdots&(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)'\end{bmatrix}$$

$$=E\begin{bmatrix}(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)'&(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)'&\cdots&(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)'\\(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)'&(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)'&\cdots&(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)'\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-1}-\boldsymbol{\mu}_0)'&(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-2}-\boldsymbol{\mu}_0)'&\cdots&(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_1-\boldsymbol{\mu}_0)'\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_0&\mathbf{G}_1&\cdots&\mathbf{G}_{t-2}\\\mathbf{G}_1'&\mathbf{G}_0&\cdots&\mathbf{G}_{t-3}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\mathbf{G}_{t-2}'&\mathbf{G}_{t-3}'&\cdots&\mathbf{G}_0\end{bmatrix}_{m(t-1)\times m(t-1)}$$

$\mathbf{G}_s$ ماتریس واریانس-کوواریانس بین بردار $\mathbf{y}_t$ و بردار $\mathbf{y}_{t-s}$ است. یا $\mathbf{G}_{k-r}$ بیانگر ماتریس واریانس- کوواریانس بین $\mathbf{y}_{t-k}$ و $\mathbf{y}_{t-r}$ می‌باشد که تفاوت دو اندیس برابر با $s=(t-k)-(t-r)=|k-r|$ است:

$$\mathbf{G}_{k-r}=E(\mathbf{y}_{t-k}-\boldsymbol{\mu}_0)(\mathbf{y}_{t-r}-\boldsymbol{\mu}_0)'=E\begin{bmatrix}Y_{1t-k}-\mu_{10}\\Y_{2t-k}-\mu_{20}\\\vdots\\Y_{mt-k}-\mu_{m0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{1t-r}-\mu_{10}&Y_{2t-r}-\mu_{20}&\cdots&Y_{mt-r}-\mu_{m0}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(Y_{1t-k}-\mu_{10})(Y_{1t-r}-\mu_{10})&(Y_{1t-k}-\mu_{10})(Y_{2t-r}-\mu_{20})&\cdots&(Y_{1t-k}-\mu_{10})(Y_{mt-r}-\mu_{m0})\\(Y_{2t-k}-\mu_{20})(Y_{1t-r}-\mu_{10})&(Y_{2t-k}-\mu_{20})(Y_{2t-r}-\mu_{20})&\cdots&(Y_{2t-k}-\mu_{20})(Y_{mt-r}-\mu_{m0})\\\vdots&\vdots&&\vdots\\(Y_{mt-k}-\mu_{m0})(Y_{1t-r}-\mu_{10})&(Y_{mt-k}-\mu_{m0})(Y_{2t-r}-\mu_{20})&\cdots&(Y_{mt-k}-\mu_{m0})(Y_{mt-r}-\mu_{m0})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\gamma_{11,k-r}&\gamma_{12,k-r}&\cdots&\gamma_{1m,k-r}\\\gamma_{21,k-r}&\gamma_{22,k-r}&\cdots&\gamma_{2m,k-r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{m1,k-r}&\gamma_{m2,k-r}&\cdots&\gamma_{mm,k-r}\end{bmatrix}_{m\times m}=[\gamma_{ij,k-r}]$$

$$\Sigma_{22}=E(\mathbf{X}_2-\mu_2)(\mathbf{X}_2-\mu_2)'=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_0 & \mathbf{G}_1 & \cdots & \mathbf{G}_{t-2}\\ \mathbf{G}_1' & \mathbf{G}_0 & \cdots & \mathbf{G}_{t-3}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{G}_{t-2}' & \mathbf{G}_{t-3}' & \cdots & \mathbf{G}_0\end{bmatrix}_{m(t-1)\times m(t-1)} \qquad (۲۰-۴)$$

$\mathbf{G}_s$ ماتریس واریانس-کوواریانس بین بردار $\mathbf{y}_t$ و بردار $\mathbf{y}_{t-s}$ را نشان می‌دهد. همچنین $\mathbf{G}_{k-r}$ بیانگر ماتریس واریانس-کوواریانس بین $\mathbf{y}_{t-k}$ و $\mathbf{y}_{t-r}$ می‌باشد که تفاوت اندیس آنها برابر با $s=(t-k)-(t-r)=|k-r|$ است.

ج) ماتریس Σ_{12} بیانگر کوواریانس $\mathbf{x}_1$ و $\mathbf{X}_2$ است که معادل با کوواریانس $\mathbf{y}_t$ و بردار $[\mathbf{y}_{t-1} \;\; \mathbf{y}_{t-2} \; \cdots \; \mathbf{y}_1]$ می‌باشد.[1]

$$\text{cov}(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2)=E(\mathbf{x}_1-\mu_1)(\mathbf{X}_2-\mu_2)'=\Sigma_{12}=[\mathbf{G}_1 \;\; \mathbf{G}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{G}_{t-1}]_{m\times m(t-1)} \qquad (۲۰-۵)$$

د) ماتریس واریانس- کوواریانس $\mathbf{Z}$ عبارت است از:

$$\text{var}(\mathbf{Z})=E(\mathbf{Z}-\mu_z)(\mathbf{Z}-\mu_z)'=E\begin{bmatrix}(\mathbf{x}_1-\mu_1)\\(\mathbf{X}_2-\mu_2)\end{bmatrix}[(\mathbf{x}_1-\mu_1)' \;\; (\mathbf{X}_2-\mu_2)']$$
$$=\begin{bmatrix}(\mathbf{x}_1-\mu_1)(\mathbf{x}_1-\mu_1)' & (\mathbf{x}_1-\mu_1)(\mathbf{X}_2-\mu_2)'\\(\mathbf{X}_2-\mu_2)(\mathbf{x}_1-\mu_1)' & (\mathbf{X}_2-\mu_2)(\mathbf{X}_2-\mu_2)'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{bmatrix}_{mt\times mt} \qquad (۲۰-۶)$$

توجه شود که $\Sigma_{21}=\Sigma_{12}'$ است.

۴- امید ریاضی و واریانس شرطی $\mathbf{x}_1|\mathbf{X}_2$ (که همان $\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_{t-1},\mathbf{y}_{t-2},\ldots,\mathbf{y}_1$ است) را مشابه آنچه که در فصل سیزدهم بدست آوردیم، به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mu_{1.2}=\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\mathbf{X}_2-\mu_2) \qquad (۲۰-۷)$$

$$\Sigma_{11.2}=\Sigma_{11}+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \qquad (۲۰-۸)$$

۵- برای استخراج مدل VAR، امید ریاضی شرطی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mu_{1.2}=\mathbf{A}_0+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mathbf{X}_2 \;\; , \;\; \mathbf{A}_0=\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\mu_2 \qquad (۲۰-۹)$$

$\mathbf{A}_0$ بردار $m\times 1$ است.

۱- بردار Σ_{12} به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\Sigma_{12}=\text{cov}(\mathbf{x}_1,\mathbf{X}_2)=E(\mathbf{x}_1-\mu_1)(\mathbf{X}_2-\mu_2)'$$
$$=E[(\mathbf{y}_t-\mu_0)][(\mathbf{y}_{t-1}-\mu_0)' \;\; (\mathbf{y}_{t-2}-\mu_0)' \;\; \cdots \;\; (\mathbf{y}_1-\mu_0)']$$
$$=E[(\mathbf{y}_t-\mu_0)(\mathbf{y}_{t-1}-\mu_0)' \;\; (\mathbf{y}_t-\mu_0)(\mathbf{y}_{t-2}-\mu_0)' \;\; \cdots \;\; (\mathbf{y}_t-\mu_0)(\mathbf{y}_1-\mu_0)']$$
$$=[\mathbf{G}_1 \;\; \mathbf{G}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{G}_{t-1}]_{m\times m(t-1)}$$

از آنجا که $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ یک ماتریس $m\times m(t-1)$ می‌باشد لذا آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}=[\mathbf{A}_1 \;\; \mathbf{A}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}_p \;\; \mathbf{A}_{p+1} \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}_{m(t-1)}]$$

$\mathbf{A}_i$ ماتریس $m\times m$ می‌باشد. با جایگذاری به جای $\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$ و $\mathbf{X}_2$ خواهیم داشت:

$$\mu_{1.2}=\mathbf{A}_0+[\mathbf{A}_1 \;\; \mathbf{A}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}_p \;\; \mathbf{A}_{p+1} \;\; \cdots \;\; \mathbf{A}_{m(t-1)}]\begin{bmatrix}\mathbf{y}_{t-1}\\ \mathbf{y}_{t-2}\\ \vdots\\ \mathbf{y}_{t-p}\\ \mathbf{y}_{t-p-1}\\ \vdots\\ \mathbf{y}_1\end{bmatrix}$$
$$=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2}+\cdots+\mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p}+\mathbf{A}_{p+1}\mathbf{y}_{t-p-1}+\cdots+\mathbf{A}_{m(t-1)}\mathbf{y}_1$$

با این فرض که $\mathbf{A}_{p+1}=\cdots=\mathbf{A}_{m(t-1)}=\mathbf{0}$ باشد، خواهیم داشت (یعنی وقفه‌های بالاتر از p بی‌تأثیرند):

$$\mu_{1.2}=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2}+\cdots+\mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p}$$

از طرف دیگر Y_t برابر با امید ریاضی شرطی به‌علاوهٔ جملهٔ خطا است:

$$\mathbf{y}_t=\mu_{1.2}+\mathbf{u}_t$$
$$=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2}+\cdots+\mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p}+\mathbf{u}_t \qquad (۲۰-۱۰)$$

مدل فوق معروف به خودرگرسیون برداری مرتبهٔ p است که با VAR(p) نشان داده می‌شود.

۲۰-۳ فرم ساختاری VAR یا SVAR[1]

فرم ساختاری VAR مشابه معادلات همزمان است که در آن علاوه بر مقادیر زمان‌های گذشته $(\mathbf{y}_{t-i})$، مقادیر جاری متغیرها $(\mathbf{y}_t)$ نیز در هر یک از معادلات وارد می‌شود:

$$\theta\mathbf{y}_t=\Gamma_0+\Gamma_1\mathbf{y}_{t-1}+\Gamma_2\mathbf{y}_{t-2}+\ldots+\Gamma_p\mathbf{y}_{t-p}+\mathbf{u}_t \qquad (۲۰-۱۱)$$

هر یک از اجزای این معادله عبارتند از:

1- structural VAR

$$\mathbf{y}_t=\begin{bmatrix}Y_{1t}\\Y_{2t}\\\vdots\\Y_{mt}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}1&-\theta_{12}&\cdots&-\theta_{1m}\\-\theta_{21}&1&\cdots&-\theta_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-\theta_{m1}&-\theta_{m2}&\cdots&1\end{bmatrix}\tag{۲۰-۱۲}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_0=\begin{bmatrix}\gamma_{10}\\\gamma_{20}\\\vdots\\\gamma_{m0}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Gamma}_j=\begin{bmatrix}\gamma_{11,j}&\gamma_{12,j}&\cdots&\gamma_{1m,j}\\\gamma_{21,j}&\gamma_{22,j}&\cdots&\gamma_{2m,j}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\gamma_{m1,j}&\gamma_{m2,j}&\cdots&\gamma_{mm,j}\end{bmatrix}\quad j=1,\dots,m$$

بنابراین، معادله iام را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_{it}-\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{m}\theta_{ik}Y_{kt}=\gamma_{i0}+\sum_{j=1}^{p}\gamma_{i1,j}Y_{1t-j}+\sum_{j=1}^{p}\gamma_{i2,j}Y_{2t-j}+\dots+\sum_{j=1}^{p}\gamma_{im,j}Y_{mt-j}+u_{it}\;;\quad i=1,\dots,m\tag{۲۰-۱۳}$$

u_{it} میانگین صفر و واریانس $\sigma^2_{u_i}$ دارد. علاوه بر این، u_{it} خود همبستگی ندارد و همچنین جزء خطای یک معادله با معادله دیگر، همبستگی ندارد. ماتریس واریانس-کوواریانس $\mathbf{u}_t$ را با $\boldsymbol{\Sigma}$ نشان می‌دهیم که عبارت است از:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\mathrm{var}(\mathbf{u}_t)=E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t')=\begin{bmatrix}\sigma^2_{u_1}&0&\cdots&0\\0&\sigma^2_{u_2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\sigma^2_{u_m}\end{bmatrix}$$

۲۰-٤ فرم استاندارد (فرم حل‌شده) VAR

در فرم استاندارد یا فرم حل‌شدهٔ VAR، مقادیر جاری یک متغیر برحسب مقادیر گذشتهٔ آن متغیر و سایر متغیرها نوشته می‌شود. بدین منظور می‌توان با ضرب طرفین معادله (۲۰-۱۱) در $\boldsymbol{\theta}^{-1}$، فرم حل‌شدهٔ VAR را به‌دست آورد:

$$\mathbf{y}_t=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2}+\dots+\mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p}+\boldsymbol{\varepsilon}_t\tag{۲۰-۱۴}$$

$$\mathbf{A}_0=\boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0=\begin{bmatrix}a_{10}\\a_{20}\\\vdots\\a_{m0}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_j=\boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_j=\begin{bmatrix}a_{11,j}&a_{12,j}&\cdots&a_{1m,j}\\a_{21,j}&a_{22,j}&\cdots&a_{2m,j}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1,j}&a_{m2,j}&\cdots&a_{mm,j}\end{bmatrix}\quad j=1,\dots,m$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t$$

معادله iام عبارت است از:

$$Y_{it}=a_{i0}+\sum_{j=1}^{p}a_{i1,j}Y_{1t-j}+\sum_{j=1}^{p}a_{i2,j}Y_{2t-j}+\dots+\sum_{j=1}^{p}a_{im,j}Y_{mt-j}+\varepsilon_{it}\;;\quad i=1,\dots,m\tag{۲۰-۱۵}$$

در سیستم معادلات (۲۰-۱۴) یا (۲۰-۱۵) هر یک از جملات خطا، ترکیب خطی از جملات خطای VARساختاری (u_t) است. بنابراین در حالی که u_{it}ها با یکدیگر همبستگی ندارند، ولی ε_{it}ها همبستگی دارند. ماتریس واریانس-کوواریانس $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)=E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')=\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}E(\varepsilon^2_{1t})&E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t})&\cdots&E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{mt})\\E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1t})&E(\varepsilon^2_{2t})&\cdots&E(\varepsilon_{2t}\varepsilon_{mt})\\\vdots&\vdots&&\vdots\\E(\varepsilon_{mt}\varepsilon_{1t})&E(\varepsilon_{mt}\varepsilon_{2t})&\cdots&E(\varepsilon^2_{mt})\end{bmatrix}\tag{۲۰-۱۶}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma^2_1&\sigma_{12}&\cdots&\sigma_{1m}\\\sigma_{21}&\sigma^2_2&\cdots&\sigma_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\sigma_{m1}&\sigma_{m2}&\cdots&\sigma^2_m\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس واریانس $\mathbf{u}_t$ را با $\boldsymbol{\Sigma}$ نشان دهیم، با توجه‌به $\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}&=\mathrm{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)=E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')\\&=E\left[(\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t)(\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t)'\right]\\&=(\boldsymbol{\theta}^{-1})E(\mathbf{u}_t'\mathbf{u}_t)(\boldsymbol{\theta}^{-1})'=(\boldsymbol{\theta}^{-1})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}^{-1})'\end{aligned}\tag{۲۰-۱۷}$$

و یا

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\theta}'$$

مثال ۱-۲۰: مدل VAR(۱) را با دو متغیر در نظر بگیرید. فرم ساختاری VAR(۱) عبارت است از:

$$\boldsymbol{\theta}\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \quad (20\text{-}18)$$

فرم حل‌شدهٔ VAR(۱) عبارت است از:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

با ساده نمودن مدل فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad (20\text{-}19)$$

جملات خطای فرم حل‌شده تابع خطی از جملات خطای فرم ساختاری می‌باشند:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{u_{1t} + \theta_{12}u_{2t}}{1-\theta_{12}\theta_{21}} \\ \dfrac{\theta_{21}u_{1t} + u_{2t}}{1-\theta_{12}\theta_{21}} \end{bmatrix} \quad (20\text{-}20)$$

از آنجا که ε_{1t} و ε_{2t} تابعی از u_{1t} و u_{2t} هستند، لذا هر شوک تصادفی که به هر یک از متغیرها وارد شود، بر دیگری نیز تأثیر می‌گذارد. به‌عنوان مثال شوکی که به Y_{1t} از طریق u_{1t} وارد می‌شود، در فرم حل‌شده می‌توان اثر آن را به واسطهٔ ε_{1t} و ε_{2t} بر Y_{1t} و Y_{2t} ملاحظه نمود. در اینجا $\mathbf{\Omega}$ و عناصر آن عبارتند از:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (20\text{-}21)$$

$$E(\varepsilon_{1t}^2) = \sigma_1^2 = \frac{\sigma_{u_1}^2 + \theta_{12}^2\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2} \quad (20\text{-}22)$$

$$E(\varepsilon_{2t}^2) = \sigma_2^2 = \frac{\theta_{21}^2\sigma_{u_1}^2 + \sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}$$

$$\sigma_{12} = E(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}) = E\left[\frac{(u_{1t} + \theta_{12}u_{2t})(\theta_{21}u_{1t} + u_{2t})}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}\right] = \frac{\theta_{21}\sigma_{u_1}^2 + \theta_{12}\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}$$

σ_{12} نشان‌دهندهٔ همبستگی ε_{1t} و ε_{2t} است. بدیهی است که اگر $\theta_{12} = \theta_{21} = 0$ باشد، آنگاه $\sigma_{12} = 0$ خواهد بود.

۵-۲۰ VAR مقید و نامقید

اگر روی ضرایب مدل VAR هیچ محدودیتی اعمال نشده باشد، آن را VAR نامقید می‌گویند. به‌عنوان مثال مدل (۱۱-۲۰) و (۱۸-۲۰) نامقید هستند. حال اگر روی برخی از ضرایب، محدودیت‌هایی اعمال شود، آن را مدل VAR مقید می‌گویند. به‌عنوان مثال اگر در مدل (۱۹-۲۰) قید $\theta_{12} = 0$ را اعمال کنیم، آنگاه تبدیل به یک مدل مقید خواهد شد و لذا در مدل (۱۹-۲۰)، Y_{2t} از معادله اول حذف می‌شود. همچنین اگر ضرایب برخی از وقفه‌ها در برخی از معادلات برابر صفر قرار داده شود، تبدیل به VAR مقید می‌شود.

۶-۲۰ انتخاب طول وقفه در مدل‌های VAR

یکی از راه‌های تعیین طول وقفه در مدل‌های VAR استفاده از نسبت درستنمایی است.[1] در این روش می‌توان دو مدل VAR با وقفه‌های متفاوت را مقایسه نمود. در واقع، این روش مبتنی بر مقایسه دو رگرسیون مقید و نامقید است. در اینجا، مدلی که وقفه‌های بیشتری دارد، مدل نامقید و مدلی که وقفه‌های کمتری دارد، مدل مقید می‌باشد. به‌عنوان مثال اگر مدل نامقید دارای p وقفه و

۱- به فصل نهم مراجعه شود.

مدل مقید دارای $q < p$ وقفه باشد، در این صورت تعداد محدودیت‌های اعمال شده برای هر معادله برابر با تعداد متغیرها ضربدر تفاوت وقفه‌های دو مدل، است. لذا تعداد محدودیت‌ها برای هر معادله برابر با $(p-q)m$ و برای کل سیستم برابر با $(p-q)m^{۲}$ می‌باشد. اگر دو معادله داشته باشیم که در آن، مدل نامقید ۸ وقفه و مدل مقید ۵ وقفه داشته باشد، در این صورت برای هر معادله ۶ = ۲×۳ محدودیت و برای کل سیستم ۱۲ = ۲×۶ محدودیت خواهیم داشت.

برای مقایسه دو مدل مقید و نامقید از نسبت درستنمایی استفاده می‌کنیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:[1]

$$LR = T\left(\log|\hat{\Omega}_R| - \log|\hat{\Omega}_{UR}|\right) \qquad (۲۰-۲۳)$$

$\hat{\Omega}$ ماتریس واریانس-کوواریانس جملات خطا است. Ω_R و Ω_{UR} به ترتیب مربوط به مدل مقید و نامقید می‌باشند. اگر مدل نامقید که وقفهٔ p دارد، تفاوتی با مدل مقید که وقفهٔ $q < p$ دارد، نداشته باشد آنگاه LR کوچک خواهد بود. در این صورت می‌توان از مدلی که وقفه‌های کمتری دارد استفاده نمود، زیرا قدرت توضیح‌دهندگی آن تفاوتی با مدل نامقید که وقفه‌های طولانی دارد، نخواهد داشت. توجه شود که LR دارای توزیع $\chi^{۲}$ است که درجه آزادی آن معادل با تعداد محدودیت‌ها است.

علاوه‌بر نسبت درستنمایی می‌توان از معیارهای اطلاعات مانند آکائیک (AIC)، شوارتز-بیزین (SIC) و حنان-کویین ($HQIC$) استفاده نمود که عبارتند از:

$$AIC = \log|\hat{\Omega}| + \frac{۲K'}{T} \qquad (۲۰-۲۴)$$

$$SIC = \log|\hat{\Omega}| + \frac{K'}{T}\log(T) \qquad (۲۰-۲۵)$$

$$HQIC = \log|\hat{\Omega}| + \frac{۲K'}{T}\log(\log(T)) \qquad (۲۰-۲۶)$$

$\hat{\Omega}$ ماتریس واریانس-کوواریانس جملات خطا، T تعداد کل مشاهدات و K' تعداد کل متغیرهای توضیحی در تمامی معادلات است که برابر با $m^{۲}p+m$ می‌باشد. استفاده از معیارهای اطلاعات، مشابه با تعیین مرتبه مدل‌های ARMA(p,q) است که در فصل سیزدهم در مورد آن و به‌ویژه نحوهٔ استفاده از نرم‌افزارها توضیح داده شده است.

[1]- فصل نهم را ببینید.

۲۰-۷ شناسایی معادلات VAR

مسئله شناسایی در مدل VAR در خصوص استفاده از مدل VAR ساختاری به‌منظور بررسی اثر شوک‌های وارده بر هر متغیر می‌باشد، زیرا شوک‌های وارده بر هر متغیر از طریق جملات خطای ساختاری (یعنی u_{it}ها) مشخص می‌شوند. این در حالی است که جملات خطای استاندارد (یعنی ε_{it}ها) تابع خطی از u_{it}ها هستند. اگر مدل VAR قابل شناسایی نباشد، آنگاه هر تغییری که در جملات خطای استاندارد ایجاد شود، نمی‌توان منشأ آن را مشخص نمود. به‌عنوان مثال اگر شوکی از طریق جملهٔ خطای معادله استاندارد اول ($\varepsilon_{۱t}$) وارد کنیم، به‌ظاهر بیانگر شوکی است که به $Y_{۱t}$ وارد شده است، ولی واقعاً چنین نیست، زیرا منشأ این شوک ناشناخته است. اگر تغییرات $\varepsilon_{۱t}$ فقط ناشی از تغییر $u_{۱t}$ باشد، آنگاه می‌توان آن را شوک وارده به $Y_{۱t}$ دانست. این در حالی است که تغییر $\varepsilon_{۱t}$ می‌تواند ناشی از $u_{۱t}$، $u_{۲t}$،... و u_{mt} باشد. بنابراین، مسئله شناسایی VAR می‌تواند به شناسایی منشأ شوک‌ها کمک نماید.

به‌طورکلی برای شناسایی مدل VAR نیاز به تحمیل قیود بر ضرایب مدل SVAR به‌ویژه بر ضرایب ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ داریم. از طرف دیگر شیوه منحصربه‌فردی برای اعمال چنین قیودی وجود ندارد و تحمیل قیود مختلف منجر به نتایج متفاوت می‌شود. اگر این قیود، سلیقه‌ای باشند، آنگاه با ایراد سیمز[1] مبنی بر وارد نمودن قیود نامعتبر در مدل‌های همزمان، تناقض دارد.

در این بخش ابتدا ماهیت شناسایی را در مدل SVAR بررسی می‌کنیم و سپس به معرفی روش‌های شناسایی خواهیم پرداخت.

۲۰-۷-۱ شناسایی مدل VAR ساختاری

مدل (۲۰-۱۱) فرم ساختاری VAR و مدل (۲۰-۱۴) نیز شکل استاندارد یا حل‌شدهٔ VAR می‌باشد. فرم حل‌شده صرفاً شامل متغیرهای از قبل تعیین‌شده می‌باشد و هیچ بازخوردی در این مدل وجود ندارد و لذا می‌توان آن را با روش OLS برآورد نمود.

[1]- Sims

فرم ساختاری VAR (مانند مدل‌های ۱۱-۲۰، ۱۳-۲۰ و یا ۱۸-۲۰) قابل شناسایی نیست، زیرا متغیرهای تأخیری از پیش‌تعیین‌شده‌ای که در سمت راست هر دو معادله وجود دارند، یکسان هستند و علاوه‌بر این، همهٔ متغیرهای بدون تأخیر نیز در همهٔ معادلات وجود دارند. بنابراین، امکان شناسایی و تخمین آنها وجود ندارد.

فرم حل‌شدهٔ VAR که به‌صورت (۱۴-۲۰) تعریف شد، این مشکل را ندارد و می‌توان آن را با OLS تخمین زد، زیرا جملات خطا با متغیرهای سمت راست (که همهٔ آنها «از قبل تعیین شده» هستند) همبستگی ندارند. بنابراین، در اینجا با مسئله شناسایی مدل SVAR مواجه‌ایم. مسئله شناسایی مدل SVAR بدین معنی است که چگونه می‌توان از ضرایب فرم استاندارد به ضرایب ساختاری رسید و بر اساس آن، تحلیل‌های مورد نظر را انجام داد.

مثال ۲-۲۰: مدل VAR(۱) را با دو متغیر در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{\theta}\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Gamma}_0 + \boldsymbol{\Gamma}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

این مدل را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \theta_{12} \\ \theta_{21} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}$$

مدل فوق را نمی‌توان با OLS برآورد نمود زیرا در معادله اول، Y_{2t} با u_{1t} و در معادله دوم Y_{1t} با u_{2t} همبستگی دارد. بدین دلیل که در معادله اول، $\theta_{12} \neq 0$ و در معادله دوم، $\theta_{21} \neq 0$ است. از طرف دیگر توجه شود که در این مدل ۱۰ ضریب را بایستی برآورد کنیم که شامل ۸ ضریب موجود در $\boldsymbol{\theta}$، $\boldsymbol{\Gamma}_0$، $\boldsymbol{\Gamma}_1$ و دو واریانس برای u_1 و u_2 می‌باشد.

فرم حل‌شدهٔ مدل VAR(۱) دو متغیره، عبارت است از:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

با برآورد مدل فوق، ۹ ضریب به‌دست می‌آید که شامل شش ضریب a_{10}، a_{20}، a_{11}، a_{12}، a_{21} و a_{22}؛ و دو واریانس شامل σ_1^2 و σ_2^2؛ و یک کوواریانس σ_{12} می‌باشد. بنابراین، ملاحظه می‌شود که مدل ساختاری دارای ۱۰ ضریب و مدل استاندارد دارای ۹ ضریب می‌باشد. بدیهی است که اگر یکی از ضرایب فرم ساختاری را مقید کنیم، آنگاه مدل ساختاری VAR(۱) دومتغیره، دقیقاً قابل تشخیص خواهد بود. اگر بیش از یک ضریب را مقید کنیم، آنگاه بیش از حد قابل تشخیص خواهد شد. به‌عنوان مثال با اعمال قید $\theta_{12} = 0$، ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ به‌صورت $\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}$ می‌باشد و لذا Y_{2t} از معادله اول حذف می‌شود. طبق روابط زیر می‌توان با تخمین ضرایب فرم حل‌شده، یعنی $\hat{\mathbf{A}}_0$، $\hat{\mathbf{A}}_1$ و $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$، ضرایب فرم ساختاری را به‌دست آورد:

$$\hat{\mathbf{A}}_0 = \boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a}_{10} \\ \hat{a}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} = (\boldsymbol{\theta}^{-1})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}^{-1})' \Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u_2}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\theta_{21} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

در سمت چپ، ۹ ضریب فرم حل‌شده و در سمت راست نیز ۹ ضریب فرم ساختاری وجود دارد که با حل این معادلات می‌توان ضرایب فرم ساختاری را به‌دست آورد.

به‌طور کلی رابطه بین ضرایب فرم حل‌شده و ضرایب ساختاری عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_0 = \boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_0 \\ &\mathbf{A}_j = \boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}_j \; ; \quad j = 1,\dots,m \\ &\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\theta}^{-1})\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}^{-1})' \end{aligned} \qquad (20\text{-}27)$$

ابعاد این بردارها و ماتریس‌ها عبارتند از:

فرم حل‌شده:

$\mathbf{A}_0$: بردار ستونی $m\times 1$ است که شامل m ضریب می‌باشد.

$\mathbf{A}_j$: ماتریس $m\times m$ که با توجه به $j = 1,\dots,p$ شامل m^2p ضریب است.

Ω: ماتریس $m\times m$ و متقارن است که شامل $\frac{m^2+m}{2}$ ضریب می‌باشد.

فرم ساختاری:

Γ_0: بردار ستونی $m\times 1$ است که شامل m ضریب می‌باشد.

Γ_j: ماتریس $m\times m$ است که با توجه به $j=1,\dots,p$ شامل m^2p ضریب می‌باشد.

θ: ماتریس $m\times m$ است که قطر اصلی آن ۱ می‌باشد و لذا شامل m^2-m یا $m(m-1)$ ضریب است.

Σ: ماتریس قطری $m\times m$ است که عناصر قطری آن واریانس‌های u می‌باشد و لذا شامل m ضریب است.

بدین‌ترتیب، تعداد ضرایب فرم حل‌شده برابر با $m^2p+\frac{m^2+m}{2}+m$ و تعداد ضرایب فرم ساختاری برابر با m^2p+m^2+m است. بنابراین، تفاوت تعداد ضرایب فرم ساختاری و فرم حل‌شده برابر با $\frac{m(m-1)}{2}$ است. به‌عنوان مثال در مدل VAR با دو متغیر $(m=2)$ و یک وقفه $(p=1)$، تفاوت تعداد ضرایب فرم ساختاری و فرم حل‌شده برابر با $1=\frac{2(2-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$ است. در این مدل اگر در حالت کلی، تعداد وقفه‌ها برابر با p باشد، تعداد ضرایب فرم ساختاری یکی بیشتر از تعداد ضرایب فرم حل‌شده خواهد بود $(\frac{m(m-1)}{2}=1)$. لذا اگر تعداد وقفه‌ها برای همهٔ معادلات یکسان باشد، هیچ نقشی در شناسایی معادلات نخواهد داشت.

نکته در خور توجه آن است که تفاوت تعداد ضرایب ماتریس‌های Ω و Σ برابر با $\frac{m(m-1)}{2}$ است که بیانگر اطلاعات اضافی ما است. از طرف دیگر، ماتریس θ شامل $m(m-1)$ ضریب است که در مقابل آن، هیچ اطلاعاتی در فرم ساختاری نداریم. تفاوت این دو برابر با $\frac{m(m-1)}{2}=\frac{m(m-1)}{2}-m(m-1)$ است. لذا شناسایی مدل VAR (در صورتی که تعداد وقفه‌های معادلات با هم یکسان باشد) صرفاً وابسته به ضرایب θ، Σ و Ω است. رابطه این ضرایب به‌صورت $\Omega=\theta^{-1}\Sigma\theta'^{-1}$ است. با داشتن Ω، ضرایب سمت چپ را بایستی تعیین کنیم. Ω دارای $\frac{m^2+m}{2}$ ضریب و مجموع ضرایب مجهول برابر با مجموع ضرایب ماتریس‌های Σ و θ است که معادل با m^2 ضریب است. چون $m^2>\frac{m^2+m}{2}$ است، لذا نمی‌توان با داشتن Ω، ضرایب ساختاری

را تعیین نمود. بنابراین، نیاز به داشتن اطلاعات اضافی داریم که معمولاً به‌صورت اعمال قیود اضافی می‌باشد. این قیدها بایستی روی ضرایب ماتریس‌های Σ و θ اعمال شود. Σ یک ماتریس قطری است که معمولاً امکان اعمال قید بر روی آن، کمتر است مگر آنکه با داشتن برخی اطلاعات اضافی، بتوان واریانس برخی از u_{it}ها را تعیین نمود. بنابراین، با اعمال قید روی ضرایب θ، می‌توان مدل VARساختاری را به یک مدل قابل تشخیص، تبدیل نمود. همان‌طور که اشاره شد، θ دارای $m(m-1)$ ضریب است. برای شناسایی معادلات لازم است که نصف ضرایب آن (یعنی $\frac{m(m-1)}{2}$) را مقید کنیم. به‌عنوان مثال در یک مدل دو متغیره، θ دارای ۲ ضریب است که یکی از آنها را باید مقید نمود. در یک مدل ۳ متغیره، θ دارای ۶ ضریب است که ۳ ضریب را باید مقید نمود. در اینجا می‌توان ضرایب θ را به‌گونه‌ای مقید نمود که آن را تبدیل به یک سیستم معادلات مثلثی نماید. به‌عنوان مثال می‌توان θ را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$\theta=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta_{31} & -\theta_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\theta_{m1} & -\theta_{m2} & -\theta_{m3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۲۸)$$

این مدل را می‌توان مشابه یک سیستم معادلات همزمان عطفی، با روش OLS برآورد نمود (فصل نوزدهم).

۲۰-۷-۲ روش‌های شناسایی مدل SVAR

همان‌طور که اشاره شد، شناسایی مدل SVAR بدان معنا است که بایستی قیودی را بر ماتریس‌های Σ و θ اعمال نمود تا از این طریق بتوان ضرایب ساختاری را به‌دست آورد و سپس بر اساس آن، نتایج را تحلیل کرد. در اینجا چهار روش معروف را بررسی می‌کنیم که شامل تجزیه چولسکی؛ تجزیه سیمز و برنانکی؛ تجزیه بلانچارد-کوآ و تجزیه پسران- شین می‌باشند. تجزیه چولسکی بیش از بقیه مورد استفاده می‌باشد. در واقع تجزیه چولسکی از حداقل فروض ممکن برای تشخیص یک مدل ساختاری استفاده می‌کند.

الف) تجزیه چولسکی[1]

تجزیه چولسکی یکی از روش‌های شناسایی مدل VARساختاری است که مبنای تئوری ندارد. همان‌طور که خواهیم دید، تجزیه چولسکی یک نوع روش رتبه‌بندی است. به‌عنوان مثال اگر دو متغیر Y_{1t} و Y_{2t} داشته باشیم، رتبه‌بندی شوک‌ها بدین صورت است که اولویت را به شوک‌های وارده به Y_{1t} و یا اولویت را به شوک‌های Y_{2t} می‌دهد. به‌طورکلی، این روش حداقل قیدها را برای شناسایی مدل VAR ساختاری اعمال می‌کند که صرفاً برخی از ضرایب ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ را برابر با صفر قرار می‌دهد که دقیقاً به‌صورت (۲۰-۲۸) می‌باشد.

جزئیات تجزیه چولسکی را با مدل VAR دو متغیره بررسی می‌کنیم. همان‌طور که دیدیم ماتریس واریانس جملات خطا در مدل VARاستاندارد با $\boldsymbol{\Omega}$ و ماتریس واریانس جملات خطای ساختاری با $\boldsymbol{\Sigma}$ نشان دادیم. رابطه این دو ماتریس با توجه به $\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t$ به‌صورت زیر به‌دست آمد:

$$\boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\theta}'^{-1}=\boldsymbol{\Omega} \qquad (۲۰-۲۹)$$

که این ماتریس‌ها عبارتند از:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_{u_1}^2 & 0\\ 0 & \sigma_{u_2}^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}1 & -\theta_{12}\\ -\theta_{21} & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

با جایگذاری در (۲۰-۲۹)، خواهیم داشت:

$$\frac{\sigma_{u_1}^2+\theta_{12}^2\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}=\sigma_1^2$$
$$\frac{\theta_{21}^2\sigma_{u_1}^2+\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}=\sigma_2^2 \qquad (۲۰-۳۰)$$
$$\frac{\theta_{21}\sigma_{u_1}^2+\theta_{12}\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}=\sigma_{12}$$

در سمت چپ، چهار ضریب شامل $\sigma_{u_1}^2$، $\sigma_{u_2}^2$، θ_{12} و θ_{21} داریم که مقدار آنها مجهول است، ولی برای تعیین آنها فقط سه معادله داریم. بنابراین بایستی یک قید اعمال کنیم. تجزیهٔ چولسکی می‌گوید که در ماتریس $\boldsymbol{\theta}$، بالای قطر اصلی را صفر کنید.

$$\theta=\begin{bmatrix}1 & -\theta_{12}\\ -\theta_{21} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\theta_{21} & 1\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۳۱)$$

1- Choleski decomposition

توجه شود که در اینجا یک سیستم معادلات داریم که ابتدا Y_{1t} و سپس Y_{2t} را نوشته‌ایم، لذا وقتی عناصر بالای قطر اصلی $\boldsymbol{\theta}$ را صفر می‌کنیم به معنی $\theta_{12}=0$ است که نشان می‌دهد ضریب Y_{2t} در معادله اول (یعنی در معادلهٔ مربوط به Y_{1t}) صفر شده است. یعنی Y_{2t} مستقیماً روی Y_{1t} تأثیر ندارد ولی Y_{1t} مستقیماً در معادله Y_{2t} وجود دارد که ضریب آن θ_{21} است. به‌هرحال با اعمال قید $\theta_{12}=0$ و جایگذاری در (۲۰-۳۰)، خواهیم داشت:

$$\sigma_{u_1}^2=\sigma_1^2$$
$$\sigma_{u_2}^2=\sigma_2^2-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}=\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2) \qquad (۲۰-۳۲)$$
$$\theta_{21}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho_{12}$$

ρ_{12} ضریب همبستگی ε_{1t} و ε_{2t} است. اگر $\rho_{12}=0$ باشد آنگاه $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{I}$ و $\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{\Omega}$ خواهد بود. در این حالت، تفاوتی بین VAR استاندارد و ساختاری وجود ندارد و لذا موضوع شناسایی نیز اهمیتی نخواهد داشت.

از طرف دیگر با توجه به رابطه $\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t\Rightarrow\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\theta_{12}\\ -\theta_{21} & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۳۳)$$

و یا

$$\frac{u_{1t}+\theta_{12}u_{2t}}{1-\theta_{12}\theta_{21}}=\varepsilon_{1t} \qquad (۲۰-۳۴)$$
$$\frac{\theta_{21}u_{1t}+u_{2t}}{1-\theta_{12}\theta_{21}}=\varepsilon_{2t}$$

با اعمال قید $\theta_{12}=0$ و با جایگذاری از (۲۰-۳۲) به‌جای θ_{21}، روابط زیر به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{1t}=u_{1t} \qquad (۲۰-۳۵)$$
$$\varepsilon_{2t}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}u_{1t}+u_{2t}$$

با حل این معادلات برای u_{1t} و u_{2t}، خواهیم داشت:

$$u_{1t}=\varepsilon_{1t} \qquad (۲۰-۳۶)$$
$$u_{2t}=-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\varepsilon_{1t}+\varepsilon_{2t}$$

معادلات فوق نشان می‌دهد که u_{1t} (شوک وارده به Y_{1t}) مستقیماً بر Y_{1t} و Y_{2t} تأثیر دارد ولی u_{2t} (شوک وارده به Y_{2t}) مستقیماً تأثیری بر Y_{1t} ندارد. در واقع اولویت را به شوک‌های Y_{1t} داده‌ایم. در اینجا شوک وارده به Y_{2t} با یک تأخیر می‌تواند تأثیر بگذارد.

این امر بدان معنا است که یک رتبه‌بندی را انجام داده‌ایم و اولویت را به شوک‌های Y_{1t} داده‌ایم. بدیهی است که می‌توان این رتبه‌بندی را تغییر داد و جای Y_{1t} و Y_{2t} را عوض کرد. این معادل با آن است که به‌جای θ_{12}، اکنون θ_{21} را مقید کنیم.

اگر قید $\theta_{21}=0$ را اعمال کنیم، نتایج با استفاده از (۲۰-۳۰) عبارت است از:

$$\sigma_{u_1}^2=\sigma_1^2-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_2^2}=\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)$$

$$\sigma_{u_2}^2=\sigma_2^2 \qquad (۲۰-۳۷)$$

$$\theta_{12}=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho_{12}$$

با استفاده از (۲۰-۳۴) و اعمال قید $\theta_{21}=0$، خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{1t}=u_{1t}+\theta_{12}u_{2t}=u_{1t}+\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}u_{2t} \qquad (۲۰-۳۸)$$

$$\varepsilon_{2t}=u_{2t}$$

با حل این معادلات برای u_{1t} و u_{2t}، (یعنی باقیمانده‌ها یاشوک‌های ساختاری) به‌دست می‌آید:

$$u_{1t}=\varepsilon_{1t}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}\varepsilon_{2t} \qquad (۲۰-۳۹)$$

$$u_{2t}=\varepsilon_{2t}$$

معادلات (۲۰-۳۸) نشان می‌دهند که شوک‌های وارد به Y_{2t} اولویت دارند. در این مدل، u_{2t} اثر مستقیم بر Y_{1t} و Y_{2t} دارد، ولی u_{1t} تأثیر مستقیم بر Y_{2t} ندارد.

بنابراین، تجزیهٔ چولسکی یکی از روش‌های شناسایی مدل VAR است که در آن ترتیب وارد نمودن متغیرها، اهمیت زیادی دارد. به‌طور کلی رتبه‌بندی متغیرها و نتایج حاصل از آن بستگی به ضریب همبستگی جملات خطای استاندارد (ρ_{12}) دارد. اگر $\rho_{12}=0$ باشد، آنگاه رتبه‌بندی هیچ اهمیتی نخواهد داشت.

مثال ۳-۲۰: به منظور بررسی تجزیه چولسکی و نتایج حاصل از آن، مدل VAR(1) با دو متغیر را در نظر بگیرید:[1]

$$\begin{bmatrix}Y_{1t}\\Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۲/۳۵\\۹/۲۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰/۳۲ & ۰/۲۸\\۰/۲ & ۰/۴۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{1t-1}\\Y_{2t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\\varepsilon_{2t}\end{bmatrix}$$

مقادیر خطاها مدل فوق، در جدول زیر ارائه شده است.

جدول ۱-۲۰: خطاهای فرم استاندارد

سال	ε_{1t}	ε_{2t}
۱۳۶۱	-۰/۱۴۰۵	-۰/۱۰۰۲
۱۳۶۲	-۰/۲۰۸۶	۰/۷۶۷۲
۱۳۶۳	-۰/۴۴۶۰	-۱/۰۸۵۶
۱۳۶۴	۱/۵۷۵۹	-۰/۹۸۷۲
۱۳۶۵	۰/۵۸۲۵	۱/۵۶۰۲
۱۳۶۶	-۱/۳۵۰۹	-۱/۸۴۳۶
۱۳۶۷	-۱/۰۱۱۸	-۰/۹۵۴۳
۱۳۶۸	۰/۵۶۴۲	۱/۱۸۸۸
۱۳۶۹	-۰/۷۹۹۴	-۰/۲۹۱۱
۱۳۷۰	-۰/۵۵۹۴	-۰/۱۲۹۳
۱۳۷۱	۲/۲۶۴۷	۱/۰۴۹۷
۱۳۷۲	۰/۱۸۲۵	-۲/۰۰۹۵
۱۳۷۳	-۱/۵۸۷۳	-۰/۰۶۵۳
۱۳۷۴	۰/۴۴۹۳	۱/۵۰۴۴
۱۳۷۵	-۰/۶۶۸۲	۰/۰۱۰۷
۱۳۷۶	۰/۰۷۸۲	۰/۶۹۵۳
۱۳۷۷	۰/۵۹۴۷	۰/۳۶۹۵
۱۳۷۸	-۱/۸۱۸۵	-۰/۲۷۶۱
۱۳۷۹	۰/۹۷۹۲	۰/۰۶۹۵
۱۳۸۰	۱/۳۱۹۶	۰/۵۲۶۹

با استفاده از جدول فوق، واریانس و کوواریانس ε_{1t} و ε_{2t} عبارت است از:

$$var(\varepsilon_{1t})=\hat{\sigma}_1^2=\frac{\sum\varepsilon_{1t}^2}{n-k}=\frac{۲۱/۹}{۲۰-۳}=۱/۲۸۸$$

$$var(\varepsilon_{2t})=\hat{\sigma}_2^2=\frac{\sum\varepsilon_{2t}^2}{n-k}=\frac{۱۹/۳۹۶}{۲۰-۳}=۱/۱۴۱$$

$$cov(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})=\hat{\sigma}_{12}=\frac{\sum\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}}{n-k}=\frac{۸/۴۴۵}{۲۰-۳}=۰/۴۹۷$$

با توجه به مقادیر فوق، واریانس جملات خطای ساختاری عبارتند از (با استفاده از روابط ۲۰-۳۰):

۱- این نتایج با استفاده از فایل data26 به‌دست آمده است.

$$\frac{\sigma_{u_1}^2+\theta_{12}^2\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}=۱/۲۸۸۳$$

$$\frac{\theta_{21}^2\sigma_{u_1}^2+\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}=۱/۱۴۰۹۷$$

$$\frac{\theta_{21}\sigma_{u_1}^2+\sigma_{u_2}^2}{(1-\theta_{12}\theta_{21})^2}=۰/۴۹۶۸$$

بدیهی است که با سه معادله نمی‌توان چهار ضریب ($\sigma_{u_1}^2$ ، $\sigma_{u_2}^2$ ، θ_{12} و θ_{21}) را تعیین کرد و لذا بایستی حداقل یک قید را اعمال کنیم. اگر از تجزیهٔ چولسکی استفاده کنیم، می‌توان قید $\theta_{12}=0$ را اعمال نمود که در این صورت خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}_{u_1}^2=\hat{\sigma}_1^2=۱/۲۸۸۳$$

$$\hat{\sigma}_{u_2}^2=\hat{\sigma}_2^2-\frac{\hat{\sigma}_{12}^2}{\hat{\sigma}_1^2}=۰/۹۴۹۴$$

$$\hat{\theta}_{21}=\frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1^2}=۰/۳۸۵۶$$

اگر هیچ شوکی وجود نداشته باشد، در این صورت متغیرها در تعادل قرار دارند. به‌عبارت دیگر در بلندمدت که اثر شوک‌ها حذف می‌شود $Y_{1t}=Y_{1t-1}=Y_1^*$ و $Y_{2t}=Y_{2t-1}=Y_2^*$ خواهد بود. بنابراین، در تعادل بلندمدت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}Y_1^*\\Y_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲۲/۳۵\\۹/۲۲\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰/۳۲ & ۰/۲۸\\۰/۲ & ۰/۴۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_1^*\\Y_2^*\end{bmatrix}$$

با حل معادلات فوق، مقادیر تعادلی به‌دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix}Y_1^*\\Y_2^*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱-۰/۳۲ & -۰/۲۸\\-۰/۲ & ۱-۰/۴۴\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}۲۲/۳۵\\۹/۲۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱/۷۱۹۴ & ۰/۸۵۷۵\\۰/۵۹۴۳ & ۲/۰۷۱۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲۲/۳۵\\۹/۲۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴۶/۳۵۴\\۳۲/۳۹۲\end{bmatrix}$$

هر شوکی که به این متغیرها وارد شود، آنها را از تعادل خارج کرده و مجدداً به تعادل برمی‌گردند.

در اینجا می‌خواهیم واکنش متغیرها را به شوک‌های تصادفی، بررسی کنیم. بدین‌منظور لازم است شوکی به یکی از متغیرها (به‌عنوان مثال Y_{1t}) وارد کنیم و اثر آن را بر هر دو متغیر بررسی نماییم. اما برای شناسایی تأثیر شوک‌ها، لازم است که ابتدا موضوع شناسایی مدل VAR را بررسی کنیم. همان‌طور که دیدیم، مسئله شناسایی مستلزم اعمال قیوی بر

ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ است. طبق تجزیهٔ چولسکی، $\theta_{12}=0$ را اعمال می‌کنیم. در این صورت رابطهٔ بین جملات خطای ساختاری ($\mathbf{u}_t$) و فرم حل شده ($\boldsymbol{\varepsilon}_t$) عبارت است از:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t\Rightarrow\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\\varepsilon_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\-۰/۳۸۶ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1t}\\u_{2t}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_{1t}=u_{1t}\\\varepsilon_{2t}=۰/۳۸۶u_{1t}+u_{2t}\end{cases}$$

معادلات فوق را برای u_{1t} و u_{2t} حل کرده و به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$u_{1t}=\varepsilon_{1t}$$
$$u_{2t}=-۰/۳۸۶\varepsilon_{1t}+\varepsilon_{2t}$$

بنابراین، با تخمین مدل VAR استاندارد و محاسبه خطاهای آن (ε_{it}ها) می‌توان خطاهای مدل VAR ساختاری (u_{it}ها) را با استفاده از روابط فوق حساب کرد. نتیجه این محاسبات در جدول ۲–۲۰ ارائه شده است.

جدول ۲–۲۰: جملات خطای فرم ساختاری

سال	u_{1t}	u_{2t}
۱۳۶۱	-۰/۱۴۰۵	-۰/۰۴۶۰
۱۳۶۲	-۰/۲۰۸۶	۰/۸۴۷۷
۱۳۶۳	-۰/۴۴۶۰	-/۹۱۳۴
۱۳۶۴	۱/۵۷۵۹	-۱/۵۹۵۵
۱۳۶۵	۰/۵۸۲۵	۱/۳۳۵۳
۱۳۶۶	-۱/۳۵۰۹	-۱/۳۲۲۱
۱۳۶۷	-۱/۰۱۱۸	-۰/۵۶۳۸
۱۳۶۸	۰/۵۶۴۲	۰/۹۷۱۰
۱۳۶۹	-۰/۷۹۹۴	۰/۰۱۷۵
۱۳۷۰	-۰/۵۵۹۴	۰/۰۸۶۶
۱۳۷۱	۲/۲۶۴۷	۰/۱۷۵۵
۱۳۷۲	۰/۱۸۲۵	-۲/۰۷۹۹
۱۳۷۳	-۱/۵۸۷۳	۰/۵۴۷۴
۱۳۷۴	۰/۴۴۹۳	۱/۳۲۱۰
۱۳۷۵	-۰/۶۶۸۲	۰/۲۶۸۶
۱۳۷۶	۰/۰۷۸۲	۰/۶۶۵۱
۱۳۷۷	۰/۵۹۴۷	۰/۱۴۰۰
۱۳۷۸	-۱/۸۱۸۵	۰/۴۲۵۸
۱۳۷۹	۰/۹۷۹۲	-۰/۳۰۸۴
۱۳۸۰	۱/۳۱۹۶	۰/۰۱۷۶

واریانس جملات خطای فرم ساختاری با استفاده از جدول فوق عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_{u_1}^2=\frac{\sum_t u_{1t}^2}{n-k}=\frac{۲۱/۹۰۰۶}{۲۰-۳}=۱/۲۸۸۳$$

$$\hat{\sigma}_{u_2}^2=\frac{\sum_t u_{2t}}{n-k}=\frac{۱۶/۱۳۹۶}{۲۰-۳}=۰/۹۴۹۴$$

این نتایج، مشابه نتایج قبلی است که با استفاده از روابط (۳۲-۲۰) به‌دست آمد.

حال به بررسی اثر شوک‌های وارد به Y_{1t} می‌پردازیم. به‌عنوان مثال می‌توان اثر یک شوک یک واحدی به Y_{1t} را بررسی نمود که در این حالت $\Delta u_{1t}=۱$ و $\Delta u_{2t}=۰$ خواهد بود. اما معمولاً متداول است که اثر شوکی معادل با یک انحراف معیار را بررسی می‌کنند. در این صورت، $\Delta u_{1t}=\hat{\sigma}_{u_1}=۱/۱۳۵۰۳$ می‌باشد که مقادیر خطاهای استاندارد نیز برابر است با:

$$\Delta\varepsilon_{1t}=\Delta u_{1t}=۱/۱۳۵۰۳$$

$$\Delta\varepsilon_{2t}=۰/۳۸۵۶\Delta u_{1t}+\Delta u_{2t}=۰/۳۸۶(۱/۱۳۵۰۳)+۰=۰/۴۳۷۷$$

فرض کنید که تا زمان $t=۰$ هیچ شوکی وجود نداشته باشد و لذا Y_{1t} و Y_{2t} در تعادل هستند. حال فرض کنید که در زمان $t=۱$ شوکی معادل با یک انحراف معیار به Y_{1t} وارد شود ($\Delta u_{1t}=\hat{\sigma}_{u_1}=۱/۱۳۵۰۲$). با توجه به اینکه در زمان $t=۰$ متغیرها هیچ تغییری نداشته‌اند، خواهیم داشت:

$$t=۱\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta\varepsilon_{1t}=۱/۱۳۵۰۳\\ \Delta\varepsilon_{2t}=۰/۴۳۷۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱/۱۳۵۰۳\\ ۰/۴۳۷۷\end{bmatrix}$$

در دوره‌های بعدی، تغییرات برابر است با:

$$t=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱/۱۳۵\\ ۰/۴۳۷۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۴۸۵۷\\ ۰/۴۱۲۲\end{bmatrix}$$

$$t=۳\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۴۸۵۷\\ ۰/۴۱۲۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۲۷۲۲\\ ۰/۲۷۴۷\end{bmatrix}$$

$$t=۴\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۲۷۲۲\\ ۰/۲۷۴۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۶۴۶\\ ۰/۱۷۲۹\end{bmatrix}$$

$$t=۵\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۱۶۴۶\\ ۰/۱۷۲۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۰۱۴\\ ۰/۱۰۷۵\end{bmatrix}$$

بدین‌ترتیب بعد از گذشت چند دوره، اثر شوک وارده بر Y_{1t} از بین می‌رود و متغیرها، مجدداً به تعادل برمی‌گردند. اثر شوک وارده به Y_{1t} برای ده دوره در جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۳-۲۰: اثر شوک‌های وارده به Y_{1t} بر Y_{1t} و Y_{2t} (با فرض $\theta_{12}=۰$)

	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰
Y_{1t}	۱/۱۳۵	۰/۴۸۵۷	۰/۲۷۲۲	۰/۱۶۴۶	۰/۱۰۱۴	۰/۰۰۹۲
Y_{2t}	۰/۴۳۷۷	۰/۴۱۲۲	۰/۲۷۴۷	۰/۱۷۲۹	۰/۱۰۷۵	۰/۰۰۹۸

حال اگر شوکی معادل با یک انحراف معیار به Y_{2t} وارد شود، در این صورت با توجه به اینکه $\hat{\sigma}^2_{u_2}=۰/۹۴۹۴$ است، لذا $\Delta u_{2t}=\hat{\sigma}_{u_2}=۰/۹۷۴۴$ خواهد بود. از طرف دیگر، تغییرات جملات خطای ساختاری، طبق (۲۷-۲۰) عبارت است از:

$$\Delta\varepsilon_{1t}=\Delta u_{1t}=۰$$

$$\Delta\varepsilon_{2t}=۰/۳۸۵۶\Delta u_{1t}+\Delta u_{2t}=۰/۳۸۵۶(۰)+۰/۹۷۴۴=۰/۹۷۴۴$$

تغییرات متغیرها در زمان‌های مختلف برابر است با:

$$t=۱\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰\\ ۰/۹۷۴۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰\\ ۰/۹۷۴۴\end{bmatrix}$$

$$t=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰/۹۷۴۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۲۷۳۸\\ ۰/۴۲۴۸\end{bmatrix}$$

$$t=۳\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۲۷۳۸\\ ۰/۴۲۴۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۲۰۷۳\\ ۰/۲۳۸۶\end{bmatrix}$$

$$t=۴\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۲۰۷۳\\ ۰/۲۳۸۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۳۳۶\\ ۰/۱۴۴۵\end{bmatrix}$$

$$t=۵\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۱۳۳۶\\ ۰/۱۴۴۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۰۸۳۵\\ ۰/۰۸۹۰\end{bmatrix}$$

جدول ۴-۲۰: اثر شوک‌های وارده به Y_{2t} بر Y_{1t} و Y_{2t} (با فرض $\theta_{12}=۰$)

	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰
ΔY_{1t}	۰	۰/۲۷۳۸	۰/۲۰۷۳	۰/۱۳۳۶	۰/۰۸۳۵	۰/۰۰۷۷
ΔY_{2t}	۰/۹۷۴۴	۰/۴۲۴۸	۰/۲۳۸۶	۰/۱۴۴۵	۰/۰۸۹۰	۰/۰۰۸۱

نتایج فوق نشان می‌دهد که Y_{1t} با یک تأخیر به شوک‌های Y_{2t} واکنش نشان می‌دهد. این درحالی است که جدول (۳-۲۰) نشان می‌دهد که Y_{2t} در همان زمان t به شوک‌های Y_{1t} واکنش نشان می‌دهد.

حال تجزیهٔ چولسکی را براساس $\theta_{21}=۰$ در نظر بگیرید. در این صورت، رابطه جملات خطا به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t\Rightarrow\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱ & -\theta_{12}\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_{1t}=u_{1t}+\theta_{12}u_{1t}\\ \varepsilon_{2t}=u_{2t}\end{cases}$$

از طرف دیگر، رابطه بین واریانس جملات خطای فرم ساختاری و استاندارد، عبارت است از:

$$\theta\Sigma\theta^{-1}=\Omega$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & -\theta_{۱۲}\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}\sigma^{۲}_{u_۱} & ۰\\ ۰ & \sigma^{۲}_{u_۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -\theta_{۱۲} & ۱\end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix}\sigma^{۲}_{۱} & \sigma_{۱۲}\\ \sigma_{۱۲} & \sigma^{۲}_{۲}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}۱ & \theta_{۱۲}\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma^{۲}_{u_۱} & ۰\\ ۰ & \sigma^{۲}_{u_۲}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ \theta_{۱۲} & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma^{۲}_{۱} & \sigma_{۱۲}\\ \sigma_{۱۲} & \sigma^{۲}_{۲}\end{bmatrix}$$

با مرتب‌سازی معادلات فوق و جایگذاری به‌جای $\sigma^{۲}_{۱}$، $\sigma^{۲}_{۲}$ و $\sigma_{۱۲}$، خواهیم داشت:

$$\sigma^{۲}_{u_۱}+\theta^{۲}_{۱۲}\sigma^{۲}_{u_۲}=\sigma^{۲}_{۱}=۱/۲۸۸۳$$

$$\sigma^{۲}_{u_۲}=\sigma^{۲}_{۲}=۱/۱۴۰۹۷$$

$$\theta_{۱۲}\sigma^{۲}_{u_۲}=\sigma_{۱۲}=۰/۴۹۶۸$$

با حل معادلات فوق، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}^{۲}_{u_۱}=\hat{\sigma}^{۲}_{۱}-\hat{\theta}_{۱۲}\hat{\sigma}^{۲}_{۲}=۱/۰۷۲۰$$

$$\hat{\sigma}^{۲}_{u_۲}=\hat{\sigma}^{۲}_{۲}=۱/۱۴۰۹۷$$

$$\hat{\theta}_{۱۲}=\frac{\hat{\sigma}_{۱۲}}{\hat{\sigma}^{۲}_{۲}}=\frac{۰/۴۹۶۸}{۱/۱۴۰۹۷}=۰/۳۵۴$$

حال برای بررسی اثر شوک‌های تصادفی، ابتدا اثر شوکی به اندازهٔ یک انحراف معیار به $Y_{۱t}$ را بررسی می‌کنیم که مقدار این شوک برابر با $\Delta u_{۱t}=\hat{\sigma}_{۱t}=۱/۰۳۵۳$ می‌باشد. براین اساس، تغییر در جملات خطای ساختاری برابر است با:

$$\Delta\varepsilon_{۱t}=\Delta u_{۱t}+۰/۳۵۴\Delta u_{۲t}=۱/۰۳۵۳+۰/۳۵۴(۰)=۱/۰۳۵۳$$

$$\Delta\varepsilon_{۲t}=\Delta u_{۲t}=۰$$

فرض کنید که تا زمان $t=۰$ هیچ شوکی وجود نداشته است، اما در زمان $t=۱$ شوکی به اندازه یک انحراف معیار به $Y_{۱t}$ وارد می‌شود. نتیجهٔ این تغییرات عبارت است از:

$$t=۱\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱/۰۳۵۳\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱/۰۳۵۳\\ ۰\end{bmatrix}$$

در بقیه زمان‌ها، تغییرات $Y_{۱t}$ و $Y_{۲t}$ عبارت است از:

$$t=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱/۰۳۵۳\\ ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۳۲۵\\ ۰/۲۰۱۷\end{bmatrix}$$

$$t=۳\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۳۳۲۵\\ ۰/۲۰۱۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۶۳۵\\ ۰/۱۵۲۸\end{bmatrix}$$

$$t=۴\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۱۶۳۵\\ ۰/۱۵۲۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۰۹۵۵\\ ۰/۰۹۸۵\end{bmatrix}$$

$$t=۵\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۰۹۵۵\\ ۰/۰۹۸۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۰۵۸۴\\ ۰/۰۶۱۶\end{bmatrix}$$

جدول ۵-۲۰: اثر شوک‌های وارده به $Y_{۱t}$ بر $Y_{۱t}$ و $Y_{۲t}$ (با فرض $\theta_{۲۱}=۰$)

	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰
$\Delta Y_{۱t}$	۱/۰۳۵۳	۰/۳۳۲۵	۰/۱۶۳۵	۰/۰۹۵۵	۰/۰۵۸۴	۰/۰۰۵۳
$\Delta Y_{۲t}$	۰	۰/۲۰۱۷	۰/۱۵۲۸	۰/۰۹۸۵	۰/۰۶۱۶	۰/۰۰۵۶

حال اثر شوکی معادل یک انحراف معیار را به $Y_{۲t}$ بررسی می‌کنیم. مقدار این شوک برابر با $\Delta u_{۲t}=\hat{\sigma}_{u_۲}=۱/۰۳۸۱۶$ می‌باشد. بنابراین، تغییر در جملات خطای فرم ساختاری برابر است با:

$$\Delta\varepsilon_{۱t}=\Delta u_{۱t}+۰/۳۵۴\Delta u_{۲t}=۰+۰/۳۵۴(۱/۰۶۸۱۶)=۰/۳۷۸۱$$

$$\Delta\varepsilon_{۲t}=\Delta u_{۲t}=۱/۰۶۸۱۶$$

مشابه آنچه که برای $\Delta u_{۱t}$ بررسی کردیم، خواهیم داشت:

$$t=۱\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰\\ ۰\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰/۳۷۸۱\\ ۱/۰۶۸۱۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۷۸۱\\ ۱/۰۶۸۱۶\end{bmatrix}$$

برای سایر زمان‌ها خواهیم داشت:

$$t=۲\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۳۷۸۱\\ ۱/۰۶۸۱۶\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۴۲۱۶\\ ۰/۵۳۹۹\end{bmatrix}$$

$$t=۳\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۴۲۱۶\\ ۰/۵۳۹۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۲۸۷۲\\ ۰/۳۱۷۸\end{bmatrix}$$

$$t=۴\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۲۸۷۲\\ ۰/۳۱۷۸\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۸۱۵\\ ۰/۱۹۴۷\end{bmatrix}$$

$$t=۵\Rightarrow\begin{bmatrix}\Delta Y_{۱t}\\ \Delta Y_{۲t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۳۲۱ & ۰/۲۸۱\\ ۰/۱۹۵ & ۰/۴۳۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰/۱۸۱۵\\ ۰/۱۹۴۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰/۱۱۳۰\\ ۰/۱۲۰۳\end{bmatrix}$$

جدول ۶–۲۰: اثر شوک‌های وارده به Y_{2t} بر Y_{1t} و Y_{2t} (با فرض $\theta_{21}=0$)

	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰
ΔY_{1t}	۰/۳۷۸۱	۰/۴۲۱۶	۰/۲۸۷۲	۰/۱۸۱۵	۰/۱۱۳۰	۰/۰۱۰۳
ΔY_{2t}	۰/۰۶۸۱	۰/۵۳۹۹	۰/۳۱۷۸	۰/۱۹۴۷	۰/۱۲۰۳	۰/۰۱۱۰

مقایسه نتایجی که تاکنون به‌دست آورده‌ایم نشان می‌دهد که اعمال هر نوع قید برای شناسایی مدل VARساختاری منجر به نتایج متفاوتی در خصوص تأثیر شوک‌ها می‌شود. در تجزیه چولسکی دو نوع قید به‌کار بردیم و اثر شوکی معادل با یک انحراف معیار را بررسی کردیم و به نتایج متفاوتی رسیدیم.

این تفاوت‌ها از اینجا ناشی می‌شود که محاسبه خطاهای فرم ساختاری با فرض $\theta_{12}=0$ متفاوت از حالتی است که از فرض $\theta_{21}=0$ استفاده می‌کنیم. به‌همین دلیل u_{it} بستگی‌به ترتیب متغیرها دارد. این امر باعث می‌شود که $\sigma^2_{u_1}$ و $\sigma^2_{u_2}$ وابسته به قید اعمال شده، باشد. دیدیم که به ازای قید $\theta_{21}=0$، مقادیر $\sigma^2_{u_1}=۱/۰۷۲$ و $\sigma^2_{u_2}=۱/۱۴۰۹۷$ به‌دست آمد. این تفاوت‌ها باعث می‌شود که شوک‌هایی که به اندازه یک انحراف معیار وارد می‌کنیم، متفاوت باشد. این تفاوت‌ها در جدول (۷–۲۰) و (۸–۲۰) نشان داده شده است.

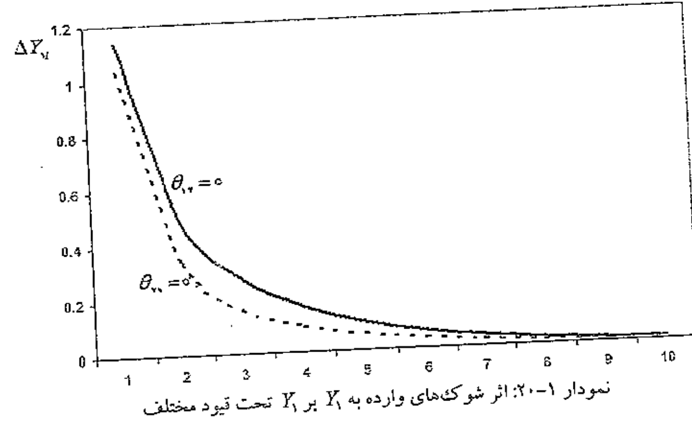
جدول ۷–۲۰: مقدار شوک وارده به Y_{1t} (معادل با یک انحراف معیار تغییر در u_{1t})
براساس تجزیهٔ چولسکی

قید	$\sigma^2_{u_1}$	$\Delta u_{1t}=\sigma_{u_1}$	$\Delta\varepsilon_{1t}$	$\Delta\varepsilon_{2t}$
$\theta_{12}=0$	۱/۲۸۸۳	۱/۱۳۵۰	۱/۱۳۵۰	۰/۴۳۷۷
$\theta_{21}=0$	۱/۰۷۲۰	۱/۰۳۵۳	۰/۰۳۵۳	۰

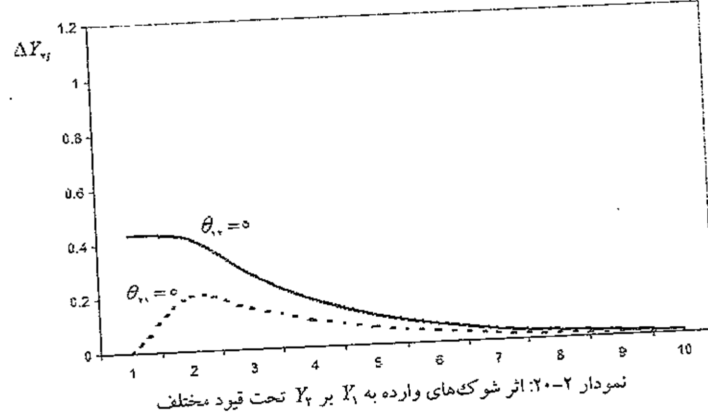
جدول ۸–۲۰: مقدار شوک وارده به Y_{2t} (معادل با یک انحراف معیار تغییر در u_{2t})
براساس تجزیه چولسکی

قید	$\sigma^2_{u_2}$	$\Delta u_{2t}=\sigma_{u_2}$	$\Delta\varepsilon_{1t}$	$\Delta\varepsilon_{2t}$
$\theta_{12}=0$	۰/۹۴۹۴	۰/۹۷۴۴	۰	۰/۹۷۴۴
$\theta_{21}=0$	۱۴۰۹۷	۱/۰۶۸۱۶	۰/۳۷۸۱	۱/۰۶۸۱۶

به‌عنوان نمونه، نمودارهای ۱–۲۰ و ۲–۲۰ اثر شوکی معادل یک انحراف معیار به Y_{1t} را بر Y_{1t} و Y_{2t} در هر یک از دو حالت $\theta_{12}=0$ و $\theta_{21}=0$ نشان می‌دهد.



نمودار ۱–۲۰: اثر شوک‌های وارده به Y_1 بر Y_1 تحت قیود مختلف



نمودار ۲–۲۰: اثر شوک‌های وارده به Y_1 بر Y_2 تحت قیود مختلف

ب) تجزیهٔ سیمز - برنانکی

سیمز (۱۹۸۶) و برنانکی[1] (۱۹۸۶) روشی را براساس نظریه‌های اقتصادی پیشنهاد نمودند. از آنجا که مسئله شناسایی، مربوط به شناسایی و محاسبه اجزای خطای ساختاری با استفاده از اجزای خطای استاندارد است $(\mathbf{u}_t=\mathbf{\theta}\varepsilon_t)$، لذا آنها می‌گویند که بایستی براساس نظریه‌های اقتصادی ساختار ماتریس θرا مشخص کنیم. در این صورت می‌توان واریانس u_{it}ها را به‌طور مشخص،

1- Bernanke

تعیین نمود. همان‌طور که گفته شد، نیاز به اعمال $\frac{m(m-1)}{2}$ قید داریم. تجزیه چولسکی یک ساختار مثلثی را برای اعمال قیود، به‌کار می‌گیرد. اما تجزیه سیمز- برنانکی روش دیگری را به کار می‌گیرد که به‌عنوان مثال برای یک مدل VAR سه متغیره، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_{13} \\ \theta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & \theta_{32} & 1 \end{bmatrix} \qquad (20-40)$$

در اینجا $\frac{m(m-1)}{2}=3$ می‌باشد، لذا سه قید به‌صورت $\theta_{12}=\theta_{23}=\theta_{31}=0$ اعمال شده است. این در حالی است که در تجزیه چولسکی، $\boldsymbol{\theta}$ به‌صورت زیر مقید می‌شود:

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta_{21} & 1 & 0 \\ \theta_{31} & \theta_{32} & 1 \end{bmatrix} \qquad (20-41)$$

بنابراین در تجزیه سیمز-برنانکی، رابطهٔ اجزاء خطای ساختاری (u_{it}) و استاندارد (ε_{it})، عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ u_{3t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_{13} \\ \theta_{21} & 1 & 0 \\ 0 & \theta_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix} \qquad (20-42)$$

با ساده نمودن معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u_{1t} &= \varepsilon_{1t} + u_{13}\varepsilon_{3t} \\ u_{2t} &= \theta_{21}\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{2t} \\ u_{3t} &= \theta_{32}\varepsilon_{2t} + \varepsilon_{3t} \end{aligned} \qquad (20-43)$$

روابط فوق نشان می‌دهد که هر یک از خطاهای ساختاری تابعی از خطای استاندارد متغیر موردنظر و یکی از دو متغیر دیگر می‌باشد. بدین‌ترتیب می‌توان واریانس $\mathbf{u}_t$ و $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\boldsymbol{\theta}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\theta}'=\boldsymbol{\Sigma} \qquad (20-44)$$

با داشتن ضرایب ماتریس $\boldsymbol{\Sigma}$، می‌توان عناصر ماتریس $\boldsymbol{\Omega}$ (یعنی σ^2_{ii}ها) و عناصر ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ (یعنی θ_{ij}ها) را تعیین نمود. ماتریس $\boldsymbol{\Sigma}$ دارای $\frac{m(m-1)}{2}=6$ ضریب شامل واریانس σ^2_1، σ^2_2 و σ^2_3

و سه کوواریانس σ_{12}، σ_{13} و σ_{23} می‌باشد که با تخمین VAR استاندارد، به‌دست می‌آیند. اما در سمت چپ، عناصر $\boldsymbol{\theta}$ برابر با $m(m-1)=6$ و عناصر $\boldsymbol{\Omega}$ نیز برابر با $m=3$ می‌باشد. بنابراین، ۹ ضرایب داریم که برای محاسبه آنها نیاز به اعمال سه قید داریم که طبق تجزیه سیمز- برنانکی روی ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ اعمال شده‌اند (رابطه ۴۲-۲۰). با حل معادلات (۴۳-۲۰) بقیهٔ ضرایب ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ و واریانس u_{it}ها به‌دست می‌آیند.

توجه شود که براساس نظریه‌های اقتصادی می‌توان هر قید منطقی را بر $\boldsymbol{\theta}$ اعمال نمود. به‌عنوان مثال ممکن است براساس یک تئوری، به این نتیجه برسیم که بایستی $\theta_{12}=-1$ باشد. به هر حال اعمال هر یک از قیود، می‌تواند منجر به ساختار جداگانه‌ای برای شناسایی مدل VAR ساختاری شود.

ج) تجزیه بلانچارد-کوآ[1]

این روش به‌دنبال تجزیه یک متغیر (مثلاً Y_{1t}) به اجزای موقتی و دائمی است. دلیل این امر آن است که هر متغیر ممکن است متأثر از دو نوع شوک باشد: یکی شوک‌هایی که اثرشان موقتی است و دیگری شوک‌هایی که اثرشان دائمی است. بنابراین بایستی Y_{1t} به‌گونه‌ای تجزیه شود که بتوان اثر این دو نوع شوک را لحاظ نمود. برای اینکه Y_{1t} دارای اجزاء موقتی و دائمی باشد، لازم است که نامانا، یعنی $I(1)$، باشد. بلانچارد-کوآ (۱۹۸۹) مطالعه خود را در مورد تولید ناخالص داخلی(Y_{1t}) و بیکاری(Y_{2t}) انجام دادند و اثر دو نوع شوک را بررسی نمودند: یکی شوک‌های عرضه که اثر دائمی بر متغیرهای حقیقی دارند و دیگری شوک‌های تقاضا که اثرشان بر متغیرهای حقیقی، موقتی است. آنها در مطالعه خود، مدل VAR دومتغیره را به‌صورت زیر معرفی می‌کنند که در آن، Y_{1t} (تولید ناخالص داخلی) نامانا و Y_{2t} (بیکاری) مانا است. در این مدل، بردار متغیرها را با $\mathbf{x}_t$ نشان می‌دهیم که شامل دو متغیر می‌باشد: اولی X_{1t} است که معادل با ΔY_{1t} و دومی X_{2t} است که معادل با Y_{2t} می‌باشد. فرم استاندارد مدل VAR عبارت است از:

$$\mathbf{x}_t=\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{t-1}+\cdots+\mathbf{A}_p\mathbf{x}_{t-p}+\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (20-45)$$

1- Blanchard and Quah

فرم ساختاری این مدل عبارت ست از:

$$\theta \mathbf{x}_t = \Gamma \mathbf{x}_{t-1} + \cdots + \Gamma_p \mathbf{x}_{t-p} + \mathbf{u}_t \qquad (۲۰-۴۶)$$

u_{1t} و u_{2t} مستقل هستند. واریانس u_{1t} و u_{2t} را استاندارد می‌کنیم:

$$\text{var}(\mathbf{u}_t) = \Omega = \begin{bmatrix} \sigma^2_{u_1} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۴۷)$$

بین جملات خطای (۲۰-۴۵) و (۲۰-۴۶) رابطهٔ $\varepsilon_t = \theta^{-1}\mathbf{u}_t$ برقراراست که θ^{-1} را با $\mathbf{B}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}(L)\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t \qquad (۲۰-۴۸)$$

$\mathbf{A}(L)$ یک ماتریس ۲×۲ است که شامل چندجمله‌ای $\mathbf{A}(L) = \mathbf{A}_1 L + \mathbf{A}_2 L^2 + \cdots + \mathbf{A}_p L^p$ می‌باشد. حال (۲۰-۴۵) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم که $\mathbf{x}_t$ برحسب جملات خطای ساختاری بیان شده است:

$$\mathbf{x}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{A}(L)]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_t = \mathbf{C}(L)\mathbf{u}_t \;\; ; \;\; \mathbf{C}(L) = [\mathbf{I} - \mathbf{A}(L)]^{-1}\mathbf{B} \qquad (۲۰-۴۹)$$

از طرف دیگر، فرم حل‌شده را نیز به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}(L)\mathbf{x}_t + \varepsilon_t \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_t = [\mathbf{I} - \mathbf{A}(L)]^{-1}\varepsilon_t = \mathbf{D}(L)\varepsilon_t \qquad (۲۰-۵۰)$$

برای به‌دست آوردن ضرایب موجود در $\mathbf{A}(L)$ و $\mathbf{B}$ بایستی قیودی را بر $\mathbf{D}(L)$ تحمیل کنیم. توجه شود که با برآورد فرم استاندارد، ضرایب $\mathbf{D}(L)$ را داریم. مقایسه $\mathbf{D}(L)$ و $\mathbf{C}(L)$ نشان می‌دهد که تعداد ضرایب $\mathbf{C}(L)$ بیشتر از تعداد ضرایب $\mathbf{D}(L)$ است، که تفاوت تعداد ضرایب آنها برابر با $\frac{m(m-1)}{2}$ می‌باشد که در اینجا برابر با ۱ است.

$\mathbf{C}(L)$ یک ماتریس ۲×۲ است که هر یک از جملات آن شامل یک چندجمله‌ای است:

$$\mathbf{C}(L) = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۵۱)$$

هریک از عناصر ماتریس $\mathbf{C}(L)$ به‌صورت حاصل‌جمع عملگرهای وقفه می‌باشند. به‌عنوان مثال $C_{11}(L)$ عبارت است از:

$$C_{11}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{11,i} L^i$$

حال (۲۰-۴۹) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۵۲)$$

حال فرض می‌کنیم که شوک‌های وارد به تولید ناخالص داخلی(Y_{1t}) شوک‌های تقاضا و شوک‌های وارد به بیکاری(Y_{2t}) شوک‌های عرضه می‌باشند. در این صورت می‌توان فرض نمود که شوک‌های تولید ناخالص داخلی، اثر دائمی بر آن ندارند، یعنی در بلندمدت اثر آنها صفر است که معادل با شرط زیر است:

$$C_{11}(L)u_{1t} = 0 \quad \text{یا} \quad \sum_{i=0}^{\infty} c_{11,i} u_{1t-i} = 0 \qquad (۲۰-۵۳)$$

رابطه فوق برای هر شوک وارده در هر زمان t بایستی برقرار باشد. یعنی هر شوکی که در یک زمان معین (مانند t) وارد شود، مجموع اثرات آن در طول وقفه‌های مختلف برابر با صفر است. بنابراین، برای شوک وارده در هر سال، بایستی شرط زیر برقرار باشد:

$$C_{11}(L) = 0 \quad \text{یا} \quad \sum_{i=0}^{\infty} c_{11,i} = 0 \qquad (۲۰-۵۴)$$

اما مشکل اصلی این است که شوک‌های عرضه و تقاضا را نمی‌توان تفکیک نمود و آنها را تشخیص داد. لذا مسئلهٔ شناسایی این است که چگونه این شوک‌ها را از مدل VAR استاندارد، استخراج کنیم. بدین‌منظور مدل VAR استاندارد (۲۰-۵۰) را صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(L) & A_{12}(L) \\ A_{21}(L) & A_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1t} \\ X_{2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۵۵)$$

هریک از جملات ماتریس $\mathbf{A}(L)$ به‌صورت حاصل‌جمع عملگرهای وقفه است. به‌عنوان مثال $A_{11}(L)$ عبارت است از:

$$A_{11}(L) = \sum_{i=1}^{p} a_{11,i} L^i \qquad (۲۰-۵۶)$$

و یا

$$A_{11}(L)X_{1t} = \sum_{i=1}^{p} a_{11,i} X_{1t-i} = a_{11,1}X_{1t-1} + a_{11,2}X_{1t-2} + \cdots + a_{11,p}X_{1t-p} \qquad (۲۰-۵۷)$$

در مدل VAR استاندارد، جملهٔ خطای معادلهٔ اول عبارت است از:

$$\varepsilon_{1t} = X_{1t} - E_{t-1}(X_{1t}) \qquad (۲۰-۵۸)$$

ε_{1t} بیانگر خطای پیش‌بینی یک دورهٔ آینده است (یعنی در سال $t-1$ برای سال t پیش‌بینی می‌کنیم).

از طرف دیگر، در مدل VAR ساختاری که به‌شکل $\mathbf{x}_t=\mathbf{C}(L)u_t$ می‌باشد، X_{1t} برابر است با:

$$X_{1t}=C_{11}(L)u_{1t}+C_{12}(L)u_{2t} \qquad (۲۰-۵۹)$$
$$=\sum_{i=0}^{\infty}c_{11,i}u_{1t-i}+\sum_{i=0}^{\infty}c_{12,i}u_{2t-i}$$

امید ریاضی X_{1t} برابر است با:

$$E_{t-1}(X_{1t})=\sum_{i=0}^{\infty}c_{11,i}E_{t-1}(u_{1t-i})+\sum_{i=0}^{\infty}c_{12,i}E_{t-1}(u_{2t-i}) \qquad (۲۰-۶۰)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}c_{11,i}u_{1t-i}+\sum_{i=1}^{\infty}c_{12,i}u_{2t-i}$$

توجه شود که امید ریاضی u_{1t} به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$E_{t-k}(u_{t-i})=\begin{cases}0 & i>k\\ u_{t-i} & i\le k\end{cases}$$

بنابراین، در اینجا فقط امید ریاضی u_{1t} و u_{2t} برابر صفر است. حال خطای پیش‌بینیِ یک دوره‌ای را حساب می‌کنیم که از تفاضل X_{1t} و $E_{t-1}(X_{1t})$ به‌دست می‌آید:

$$X_{1t}-E_{t-1}(X_{1t})=c_{11,0}u_{1t}+c_{12,0}u_{2t} \qquad (۲۰-۶۱)$$

از آنجا که خطای پیش‌بینی در معادلات (۲۰-۵۸) و (۲۰-۶۱) برابر است، لذا خواهیم داشت:

$$c_{11,0}u_{1t}+c_{12,0}u_{2t}=\varepsilon_{1t} \qquad (۲۰-۶۲)$$

با انجام این محاسبات برای X_{2t} نیز خواهیم داشت:

$$X_{2t}-E_{t-1}(X_{2t})=\varepsilon_{2t} \qquad (۲۰-۶۳)$$
$$X_{2t}-E_{t-1}(X_{2t})=c_{21,0}u_{1t}+c_{22,0}u_{2t} \qquad (۲۰-۶۴)$$

معادلات (۲۰-۶۳) و (۲۰-۶۴) را برابر قرار می‌دهیم:

$$c_{21,0}u_{1t}+c_{22,0}u_{2t}=\varepsilon_{2t} \qquad (۲۰-۶۵)$$

با ترکیب معادلات (۲۰-۶۲) و (۲۰-۶۵)، دو رابطه بین u_{it}ها و ε_{it}ها به‌دست می‌آید:

$$c_{11,0}u_{1t}+c_{12,0}u_{2t}=\varepsilon_{1t}$$
$$c_{21,0}u_{1t}+c_{22,0}u_{2t}=\varepsilon_{2t} \qquad (۲۰-۶۶)$$

با حل این دو معادله می‌توان جملات خطای ساختاری(u_{it}) را برحسب جملات خطای استاندارد(ε_{it}) نوشت، اما حل این معادلات مستلزم داشتن مقادیر $c_{ij,0}$ است. بدین‌منظور فرم ماتریسی معادلات (۲۰-۶۶) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}c_{11,0} & c_{12,0}\\ c_{21,0} & c_{22,0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۶۷)$$

شکل کلی رابطه فوق عبارت است از:

$$\mathbf{C}_0\mathbf{u}_t=\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰-۶۸)$$

حال برای رابطه فوق، واریانس را حساب می‌کنیم:

$$\text{var}(\mathbf{C}_0\mathbf{u}_t)=\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t)\ \Rightarrow\ E[(\mathbf{C}_0\mathbf{u}_t)(\mathbf{C}_0\mathbf{u}_t)']=E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')$$

با ساده نمودن نتایج، خواهیم داشت:

$$\mathbf{C}_0E(\mathbf{uu}_t')\mathbf{C}_0'=E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')\ \Rightarrow\ \mathbf{C}_0\boldsymbol{\Omega}\mathbf{C}_0'=\boldsymbol{\Sigma} \qquad (۲۰-۶۹)$$

که $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$ و $\boldsymbol{\Omega}=\begin{bmatrix}\sigma_{u_1}^2 & 0\\ 0 & \sigma_{u_2}^2\end{bmatrix}$ است. به‌جای $\boldsymbol{\Sigma}$ و $\boldsymbol{\Omega}$ در رابطهٔ (۲۰-۶۹) قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}c_{11,0} & c_{12,0}\\ c_{21,0} & c_{22,0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{u_1}^2 & 0\\ 0 & \sigma_{u_2}^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11,0} & c_{21,0}\\ c_{12,0} & c_{22,0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

با ساده نمودن معادلات فوق خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}c_{11,0}^2\sigma_{u_1}^2+c_{12,0}^2\sigma_{u_2}^2 & c_{11,0}c_{21,0}\sigma_{u_1}^2+c_{12,0}c_{22,0}\sigma_{u_2}^2\\ c_{11,0}c_{21,0}\sigma_{u_1}^2+c_{12,0}c_{22,0}\sigma_{u_2}^2 & c_{21,0}^2\sigma_{u_1}^2+c_{22,0}^2\sigma_{u_2}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

از آنجا که واریانس جملات خطای ساختاری را نرمال کرده‌ایم، لذا $\sigma_{u_1}^2=\sigma_{u_2}^2=1$ می‌باشد. بر این اساس، رابطهٔ فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}c_{11,0}^2+c_{12,0}^2 & c_{11,0}c_{21,0}+c_{12,0}c_{22,0}\\ c_{11,0}c_{21,0}+c_{12,0}c_{22,0} & c_{21,0}^2+c_{22,0}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

رابطه فوق بیانگر سه قید می‌باشد که عبارتند از:

$$c_{11,0}^{2}+c_{12,0}^{2}=\sigma_1^2 \qquad (۲۰-۷۰)$$

$$c_{21,0}^{2}+c_{22,0}^{2}=\sigma_2^2 \qquad (۲۰-۷۱)$$

$$c_{11,0}c_{21,0}+c_{12,0}c_{22,0}=\sigma_{12} \qquad (۲۰-۷۲)$$

برای حل این معادلات و تعیین چهار ضریب (یعنی $c_{ij,0}$ها)، نیاز به یک قید دیگر داریم. قید چهارم را از این فرض به‌دست می‌آوریم که u_{1t} اثر بلندمدت بر X_{1t} ندارد. بدین‌منظور مدل VAR استاندارد را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{x}_t=\mathbf{A}(L)\mathbf{x}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t \;\Rightarrow\; \mathbf{x}_t=[\mathbf{I}-\mathbf{A}(L)]^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰-۷۳)$$

ماتریس $\mathbf{I}-\mathbf{A}(L)$ برابر است با:

$$\mathbf{I}-\mathbf{A}(L)=\begin{bmatrix}1-A_{11}(L) & -A_{12}(L)\\ -A_{21}(L) & 1-A_{22}(L)\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۷۴)$$

معکوس ماتریس فوق را حساب می‌کنیم:

$$[\mathbf{I}-\mathbf{A}(L)]^{-1}=\frac{1}{b}\begin{bmatrix}1-A_{22}(L) & A_{12}(L)\\ A_{21}(L) & 1-A_{11}(L)\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۷۵)$$

b دترمینان ماتریس $I-A(L)$ است. از آنجا که $A_{ij}(L)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij,k}L^k$ است، با جایگذاری در (۲۰-۷۵)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}X_{1t}\\ X_{2t}\end{bmatrix}=\frac{1}{b}\begin{bmatrix}1-\sum_{k=1}^{\infty}a_{22,k}L^k & \sum_{k=1}^{\infty}a_{12,k}L^k\\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{21,k}L^k & 1-\sum_{k=1}^{\infty}a_{11,k}L^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۷۶)$$

X_{1t} برابر است با (توجه شود که X_{1t} معادل با ΔY_{1t} است):

$$X_{1t}=\Delta Y_{1t}=\frac{1}{b}\left[(1-\sum_{k=1}^{\infty}a_{22,k}L^k)\varepsilon_{1t}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{12,k}L^k\varepsilon_{2t}\right] \qquad (۲۰-۷۷)$$

از معادلات (۲۰-۶۲) و (۲۰-۶۵) به‌جای ε_{1t} و ε_{2t} قرار می‌دهیم:

$$X_{1t}=\Delta Y_{1t}=\frac{1}{b}\left[(1-\sum_{k=1}^{\infty}a_{22,k}L^k)(c_{11,0}u_{1t}+c_{12,0}u_{2t})+\sum_{k=1}^{\infty}a_{12,k}L^k(c_{21,0}u_{1t}+c_{22,0}u_{2t})\right] \qquad (۲۰-۷۸)$$

این فرض که u_{1t} تأثیر بلندمدت بر X_{1t} ندارد معادل با این است که مجموع ضرایب آن برابر با صفر باشد:

$$(1-\sum_{k=1}^{\infty}a_{22,k})c_{11,0}+(\sum_{k=1}^{\infty}a_{12,k})c_{21,0}=0 \qquad (۲۰-۷۹)$$

توجه شود که با تخمین مدل VAR استاندارد، ضرایب $a_{12,k}$ و $a_{22,k}$ به‌دست می‌آیند و لذا معادله (۲۰-۷۹) فقط دارای دو ضریب مجهول $c_{11,0}$ و $c_{21,0}$ است. بدین‌ترتیب با حل همزمان معادلات (۲۰-۷۰)، (۲۰-۷۱)، (۲۰-۷۲) و (۲۰-۷۹) می‌توان چهار ضریب $c_{ij,0}$ را به‌دست آورد و لذا مدل VAR ساختاری، دقیقاً قابل شناسایی خواهد بود.

د) تجزیه پسران- شین (توابع واکنش تعمیم‌یافته)

پسران و شین (۱۹۹۷) روشی را برای بررسی تأثیر شوک‌های ساختاری رائه نمودند که به توابع واکنش تعمیم‌یافته معروف شد. این روش به‌گونه‌ای است که ترتیب قرار گرفتن متغیرها، اهمیتی ندارد.

در بخش‌های قبلی دیدیم که رابطهٔ بین جملات خطای ساختاری (u_{it}) و استاندارد (ε_{it}) به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t \qquad (۲۰-۸۰)$$

$\boldsymbol{\theta}^{-1}$ را با $\mathbb{F}$ و عناصر آن را با f_{ij} نشان می‌دهیم. این رابطه برای VAR دومتغیره به‌صورت زیر است:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t=\mathbf{F}\mathbf{u}_t \Rightarrow \begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix}=\frac{1}{1-\theta_{12}\theta_{21}}\begin{bmatrix}1 & \theta_{21}\\ \theta_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_{11} & f_{12}\\ f_{21} & f_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1t}\\ u_{2t}\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۸۱)$$

و یا

$$\varepsilon_{1t}=f_{11}u_{1t}+f_{12}u_{2t}$$
$$\varepsilon_{2t}=f_{21}u_{1t}+f_{22}u_{2t} \qquad (۲۰-۸۲)$$

از طرف دیگر، ماتریس واریانس جملات خطای ساختاری و استاندارد عبارتند از:

$$\boldsymbol{\Omega}=E(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t')=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

$$\Sigma = E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t') = \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u_2}^2 \end{bmatrix}$$

و رابطه بین این دو، عبارت است از:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_t') = E[(\mathbf{F}\mathbf{u}_t)(\mathbf{F}\mathbf{u}_t)'] = \mathbf{F}E(\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t')\mathbf{F}' \Rightarrow \mathbf{\Omega} = \mathbf{F\Sigma F}'$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u_2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۸۳)$$

با ساده نمودن معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}^2\sigma_{u_1}^2 + f_{12}^2\sigma_{u_2}^2 & f_{11}f_{21}\sigma_{u_1}^2 + f_{12}f_{22}\sigma_{u_2}^2 \\ f_{11}f_{21}\sigma_{u_1}^2 + f_{12}f_{22}\sigma_{u_2}^2 & f_{21}^2\sigma_{u_1}^2 + f_{22}^2\sigma_{u_2}^2 \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۸۴)$$

در تجزیهٔ چولسکی، ترتیب قرار گرفتن متغیرها مهم است و دیدیم که فرض $\theta_{12}=0$ معادل با ترتیب Y_{1t} و Y_{2t} و فرض $\theta_{21}=0$ معادل با ترتیب Y_{2t} و Y_{1t} است. این دو فرض، به نتایج متفاوتی می‌رسند. تجزیهٔ پسران- شین از هر دو فرض استفاده کرده و نتایج آنها را با هم ادغام می‌کند و سپس جملات خطای استاندارد را به‌صورت ترکیب خطی از جملات خطای ساختاری به‌دست می‌آورد. بدین منظور مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- فرض $\theta_{12}=0$ را که معادل با $f_{12}=0$ است در معادلات (۲۰-۸۴) قرار داده و معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= f_{11}^2\sigma_{u_1}^2 \\ \sigma_{12} &= f_{11}f_{21}\sigma_{u_1}^2 \\ \sigma_2^2 &= f_{21}^2\sigma_{u_1}^2 + f_{22}^2\sigma_{u_2}^2 \end{aligned} \qquad (۲۰-۸۵)$$

از حل معادلات فوق، فقط مقادیر f_{11} و f_{21} را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f_{11} &= \frac{\sigma_1}{\sigma_{u_1}} = 1 \\ f_{21} &= \frac{\sigma_{12}}{f_{11}\sigma_{u_1}^2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2} \end{aligned} \qquad (۲۰-۸۶)$$

توجه شود که در تجزیهٔ چولسکی به‌ازای $\theta_{12}=0$، به تساوی $\varepsilon_{1t}=u_{1t}$ می‌رسیم که نتیجهٔ $\sigma_1^2=\sigma_{u_1}^2$ به‌دست می‌آید.

۲- فرض $\theta_{21}=0$ را که معادل با $f_{21}=0$ است را در معادلات (۲۰-۸۴) قرار داده و معادلات زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= f_{11}^2\sigma_{u_1}^2 + f_{12}^2\sigma_{u_2}^2 \\ \sigma_{12} &= f_{22}f_{12}\sigma_{u_2}^2 \\ \sigma_2^2 &= f_{22}^2\sigma_{u_2}^2 \end{aligned} \qquad (۲۰-۸۷)$$

از حل معادلات فوق، فقط مقادیر f_{22} و f_{12} را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} f_{22} &= \frac{\sigma_2}{\sigma_{u_2}} = 1 \\ f_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{f_{22}\sigma_{u_2}^2} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2} \end{aligned} \qquad (۲۰-۸۸)$$

توجه شود که در تجزیهٔ چولسکی به‌ازای $\theta_{21}=0$، به تساوی $\varepsilon_{2t}=u_{2t}$ می‌رسیم که نتیجهٔ $\sigma_2^2=\sigma_{u_2}^2$ به‌دست می‌آید.

۳- حال نتایج مراحل ۱ و ۲ را در معادلات (۲۰-۸۲) قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1t} &= u_{1t} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}u_{2t} \\ \varepsilon_{2t} &= \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}u_{1t} + u_{2t} \end{aligned} \qquad (۲۰-۸۹)$$

بدین ترتیب، جملات خطای استاندارد ترکیب خطی از جملات خطای ساختاری هستند. اما در تجزیهٔ چولسکی به‌ازای فرض‌های مختلف، نتایج متفاوتی به‌دست می‌آید که عبارتند از:

$$\theta_{12}=0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{1t} = u_{1t} \\ \varepsilon_{2t} = \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1^2}u_{1t} + u_{2t} \end{cases}$$

$$\theta_{21}=0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{1t} = u_{1t} + \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_2^2}u_{2t} \\ \varepsilon_{2t} = u_{2t} \end{cases} \qquad (۲۰-۹۰)$$

بنابراین، تجزیهٔ پسران- شین ترکیبی از فرض $\theta_{12}=0$ و فرض $\theta_{21}=0$ را به‌کار می‌گیرد.[1]

۱- در برخی کتاب‌ها، ابتدا واریانس جملات خطای ساختاری را برابر با یک فرض می‌کنند ($\sigma_{u_1}^2=\sigma_{u_2}^2=1$) و سپس روابط (۸۹-۱۸) را به‌دست می‌آورند. در این حالت نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\varepsilon_{1t} = \sigma_1 u_{1t} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_2}u_{2t}$$

$$\varepsilon_{2t} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}u_{1t} + \sigma_2 u_{2t}$$

تحلیل نتایج حاصله، تفاوتی نخواهد داشت هر چند که به‌ظاهر دارای تفاوت‌هایی هستند.

برای به‌دست آوردن خطاهای ساختاری، معادلات (۸۹–۲۰) را حل می‌کنیم:

$$u_{1t}=\frac{1}{1-\rho_{12}^{2}}\varepsilon_{1t}-\frac{\sigma_{12}}{(1-\rho_{12}^{2})\sigma_{2}^{2}}\varepsilon_{2t}$$

$$u_{2t}=\frac{\sigma_{12}}{(1-\rho_{12}^{2})\sigma_{1}^{2}}\varepsilon_{1t}+\frac{1}{1-\rho_{12}^{2}}\varepsilon_{2t} \qquad (۲۰–۹۱)$$

با استفاده از این روابط، واریانس خطاهای ساختاری عبارت است از:[1]

$$\sigma_{u_1}^{2}=\frac{1}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}}(\sigma_{1}^{2}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{2}^{2}})$$

$$\sigma_{u_2}^{2}=\frac{1}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}}(\sigma_{2}^{2}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{1}^{2}}) \qquad (۲۰–۹۲)$$

مثال ٤–۲۰: نتایج مثال ۳–۲۰ را در نظر بگیرید که خلاصهٔ آن عبارت است از:

$$\text{var}(\varepsilon_{1t})=\hat{\sigma}_{1}^{2}=۱/۲۸۸$$

$$\text{var}(\varepsilon_{2t})=\hat{\sigma}_{2}^{2}=۱/۱۴۱$$

$$\text{cov}(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})=\hat{\sigma}_{12}=۰/۴۹۷$$

با استفاده از نتایج فوق و فرمول‌های (۹۶–۲۰) و (۹۸–۲۰) مقادیر f_{21} و f_{12} را حساب می‌کنیم:

$$\hat{f}_{21}=\frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_{1}^{2}}=\frac{۰/۴۹۷}{۱/۲۸۸}=۰/۳۸۵۹$$

$$\hat{f}_{21}=\frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_{2}^{2}}=\frac{۰/۴۹۷}{۱/۱۴۱}=۰/۴۳۵۶$$

نتایج فوق را در فرمول (۹۲–۲۰) قرار می‌دهیم:

$$\varepsilon_{1t}=u_{1t}+۰/۴۳۵۶u_{2t}$$

$$\varepsilon_{2t}=۰/۳۸۵۹u_{1t}+u_{2t}$$

با حل معادلات فوق، جملات خطای ساختاری را بر حسب خطاهای استاندارد به‌دست می‌آوریم:

$$u_{1t}=۱/۲۰۲۱\varepsilon_{1t}-۰/۵۲۳۶\varepsilon_{2t}$$

$$u_{2t}=-۰/۴۶۳۹\varepsilon_{1t}+۱/۲۰۲۱\varepsilon_{2t}$$

۱– واریانس u_{1t} به‌صورت زیر حساب شده است:

$$\text{var}(u_{1t})=\frac{1}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}}\text{var}(\varepsilon_{1t})+\frac{\sigma_{12}^{2}}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}\sigma_{2}^{4}}\text{var}(\varepsilon_{2t})-2\frac{\sigma_{12}}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}\sigma_{2}^{2}}\text{cov}(\varepsilon_{1t},\varepsilon_{2t})$$

با استفاده از فرمول فوق و نتایج مثال ۳–۲۰، مقادیر خطاهای ساختاری به صورت جدول زیر به دست می‌آیند:

جدول ۹–۲۰: خطاهای ساختاری براساس تجزیه پسران- شین

سال	u_{1t}	u_{2t}
۱۳۶۱	−۰/۱۱۶۵	−۰/۰۵۵۳
۱۳۶۲	−۰/۶۵۲۵	۱/۰۱۹۰
۱۳۶۳	۰/۰۳۲۳	−۱/۰۹۸۰
۱۳۶۴	۲/۴۱۱۳	−۱/۹۱۷۸
۱۳۶۵	−۰/۱۱۶۸	۱/۶۰۵۳
۱۳۶۶	−۰/۶۵۸۵	−۱/۵۸۹۵
۱۳۶۷	−۰/۷۱۶۵	−۰/۶۷۷۸
۱۳۶۸	۰/۰۵۵۷	۱/۱۶۷۸
۱۳۶۹	−۰/۸۰۸۵	۰/۰۲۰۹
۱۳۷۰	−۰/۶۰۴۸	۰/۱۰۴۱
۱۳۷۱	۲/۱۷۲۷	۰/۲۱۱۳
۱۳۷۲	۱/۲۷۱۶	−۲/۵۰۰۲
۱۳۷۳	−۱/۸۷۳۸	۰/۶۵۷۸
۱۳۷۴	−۰/۲۴۷۴	۱/۶۰۰۰
۱۳۷۵	−۰/۸۰۸۸	۰/۳۲۲۸
۱۳۷۶	−۰/۲۷۰۱	۰/۷۹۹۵
۱۳۷۷	۰/۵۲۱۳	۰/۱۶۸۳
۱۳۷۸	−۲/۰۴۱۴	۰/۵۱۱۷
۱۳۷۹	۱/۱۴۰۶	−۰/۳۷۰۶
۱۳۸۰	۱/۳۱۰۳	۰/۰۲۱۳

واریانس و انحراف معیار u_{it} عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_{u_1}^{2}=\frac{\sum_t u_{1t}^{2}}{n-k}=\frac{۲۶/۳۳۳۵}{۲۰-۳}=۱/۵۴۹۰$$

$$\hat{\sigma}_{u_2}^{2}=\frac{\sum_t u_{2t}}{n-k}=\frac{۲۳/۳۲۲۵}{۲۰-۳}=۱/۳۷۱۹$$

و یا می توان از فرمول‌های (۹۲–۲۰) استفاده نمود:

$$\sigma_{u_1}^{2}=\frac{1}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}}(\sigma_{1}^{2}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{2}^{2}})=\frac{1}{(1-۰/۱۶۰۸)^{2}}(۱/۲۸۸-\frac{۰/۴۹۷^{2}}{۱/۱۴۱})=۱/۵۴۸$$

$$\sigma_{u_2}^{2}=\frac{1}{(1-\rho_{12}^{2})^{2}}(\sigma_{2}^{2}-\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{1}^{2}})=\frac{1}{(1-۰/۱۶۰۸)^{2}}(۱/۱۴۱-\frac{۰/۴۹۷^{2}}{۱/۲۸۸})=۱/۳۷۱$$

تفاوت‌های جزئی ناشی از گرد کردن ارقام است.

حال فرض کنید که شوکی معادل با یک انحراف معیار به Y_{1t} وارد شود. مقدار این شوک برابر با است با:

$$\hat{\sigma}_{u_1} = \sqrt{1/549} = 1/244$$

در مثال ۳-۲۰، مدل VAR(1) به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22/35 \\ 9/22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/32 & 0/28 \\ 0/2 & 0/44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

فرض کنید که تا زمان $t=0$ هیچ شوکی وجود نداشته باشد و لذا Y_{1t} و Y_{2t} در تعادل هستند. حال فرض کنید که در زمان $t=1$ شوکی معادل با یک انحراف معیار به Y_{1t} وارد شود ($\Delta u_{1t} = \hat{\sigma}_{u_1} = 1/244$). در این صورت، تغییرات خطاهای استاندارد عبارت است از:

$$\Delta\varepsilon_{1t} = \Delta u_{1t} = 1/244$$
$$\Delta\varepsilon_{2t} = 0/3859\Delta u_{1t} = 0/3859(1/244) = 0/480$$

با توجه به اینکه در زمان $t=0$، متغیرها هیچ تغییری نداشته‌اند، خواهیم داشت:

$$t=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/32 & 0/28 \\ 0/2 & 0/44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{1t} = 1/244 \\ \Delta\varepsilon_{2t} = 0/480 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/244 \\ 0/480 \end{bmatrix}$$

در دوره‌های بعدی، تغییرات برابر است با:

$$t=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/32 & 0/28 \\ 0/2 & 0/44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/244 \\ 0/480 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/532 \\ 0/460 \end{bmatrix}$$

$$t=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/32 & 0/28 \\ 0/2 & 0/44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/532 \\ 0/460 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/299 \\ 0/309 \end{bmatrix}$$

$$t=4 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/32 & 0/28 \\ 0/2 & 0/44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/299 \\ 0/309 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/182 \\ 0/196 \end{bmatrix}$$

$$t=5 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/32 & 0/28 \\ 0/2 & 0/44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0/182 \\ 0/196 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/113 \\ 0/123 \end{bmatrix}$$

نتایج فوق را با نتایج حاصل از تجزیهٔ چولسکی مقایسه می‌کنیم. خلاصهٔ نتایج در جداول زیر ارائه شده است:

جدول ۱۰-۲۰: مقایسه اثر شوک‌های Y_{1t} بر Y_{2t}

زمان	تجزیهٔ پسران- شین	تجزیهٔ چولسکی	
		با فرض $\theta_{12}=0$	با فرض $\theta_{21}=0$
$t=1$	۱/۲۴۴	۱/۱۳۵	۱/۰۳۵
$t=2$	۰/۵۳۲	۰/۴۸۸	۰/۳۲۲
$t=3$	۰/۲۹۹	۰/۲۷۲	۰/۱۶۳
$t=4$	۰/۱۸۲	۰/۱۶۵	۰/۰۹۵
$t=5$	۰/۱۱۳	۰/۱۰۲	۰/۰۵۸

جدول ۱۱-۲۰: مقایسه اثر شوک‌های Y_{1t} بر Y_{2t}

زمان	تجزیهٔ پسران- شین	تجزیهٔ چولسکی	
		با فرض $\theta_{12}=0$	با فرض $\theta_{21}=0$
$t=1$	۰/۴۸۰	۰/۴۳۸	۰
$t=2$	۰/۴۶۰	۰/۴۱۳	۰/۲۰۲
$t=3$	۰/۳۰۹	۰/۲۷۵	۰/۱۵۳
$t=4$	۰/۱۹۶	۰/۱۷۳	۰/۰۹۸
$t=5$	۰/۱۲۳	۰/۱۰۸	۰/۰۶۲

مقایسهٔ نتایج حاصل از تجزیه چولسکی و تجزیهٔ پسران- شین نشان می‌دهد که تفاوت‌های قابل توجهی بین آنها وجود دارد

۸-۲۰ تخمین حداکثر درستنمایی

فرم حل‌شدهٔ مدل VAR(p) را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \dots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{B}'\mathbf{Z}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰-۹۳)$$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} , \quad \mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{y}_{t-1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t-p} \end{bmatrix}$$

لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L(\mathbf{B},\boldsymbol{\Omega}) = -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln|\boldsymbol{\Omega}| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{\varepsilon}_t'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰-۹۴)$$
$$= -\frac{T}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln|\boldsymbol{\Omega}| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{y}_t - \mathbf{B}'\mathbf{Z}_t)'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_t - \mathbf{B}'\mathbf{Z}_t)$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\mathbf{B}$ خواهیم داشت[۱]:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{B}}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{\Omega}^{-1}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{y}_t\mathbf{Z}_t'-\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{B}'\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t'=\mathbf{0} \qquad (۲۰-۹۵)$$

با حل معادله فوق، $\hat{\mathbf{B}}'$ به‌دست می‌آید:

$$\hat{\mathbf{B}}'=\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{y}_t\mathbf{Z}_t'\right)\left(\sum_{t=1}^{T}\mathbf{Z}_t\mathbf{Z}_t'\right)^{-1} \qquad (۲۰-۹۶)$$

بنابراین، $\hat{\mathbf{B}}'$ مشابه تخمین‌زنندهٔ OLS است.

تخمین‌زنندهٔ $\mathbf{\Omega}$ نیز با مشتق‌گیری نسبت به $\mathbf{\Omega}$ به‌دست می‌آید[۲]:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{\Omega}}=-\frac{T}{2}\mathbf{\Omega}^{-1}+\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\varepsilon_t'\mathbf{\Omega}^{-2}=\mathbf{0} \Rightarrow \hat{\mathbf{\Omega}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\varepsilon_t' \qquad (۲۰-۹۷)$$

با جایگذاری به‌جای $\hat{\mathbf{B}}$ و $\hat{\mathbf{\Omega}}$ خواهیم داشت:

$$\ln L_{\max}=-\frac{T}{2}\ln(2\pi)-\frac{T}{2}\ln|\hat{\mathbf{\Omega}}|-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{y}_t-\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{Z}_t)'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}(\mathbf{y}_t-\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{Z}_t)$$

جملهٔ آخر برابر با $-\frac{T}{2}m$ است[۳] و لذا حداکثر تابع درستنمایی برابر است با:

۱- مشتق از تابع درستنمایی نسبت به $\mathbf{B}$ عبارت است از:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{B}}=\frac{\partial \ln L}{\partial \varepsilon_t}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \mathbf{B}}=-\frac{1}{2}\sum 2\mathbf{\Omega}^{-1}\varepsilon_t(-\mathbf{Z}_t')=0 \Rightarrow \Sigma\mathbf{\Omega}^{-1}(\mathbf{y}_t-\mathbf{B}'\mathbf{Z}_t)\mathbf{Z}_t'=0$$

۲- توجه شود که از قاعدهٔ $\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial \mathbf{A}}=\mathbf{X}'\mathbf{X}$ و $\frac{\partial \ln|\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}}=(\mathbf{A}^{-1})'$ استفاده شده است. برای محاسبه مشتق از $\mathbf{X}'\mathbf{B}^{-1}\mathbf{X}$ نسبت به $\mathbf{B}$، ابتدا آن را به صورت $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ و $\mathbf{A}=\mathbf{B}^{-1}$ نوشته و سپس مشتق آن را به صورت $\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial \mathbf{B}}=\frac{\partial(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{\partial \mathbf{A}}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})(-\mathbf{B}^{-2})$ حساب می‌کنیم.

۳- بدین منظور جمله آخر را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(\mathbf{y}_t-\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{Z}_t)'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}(\mathbf{y}_t-\hat{\mathbf{B}}'\mathbf{Z}_t)=\hat{\varepsilon}_t'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\varepsilon_t=\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_{1t} & \cdots & \hat{\varepsilon}_{mt}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ \Omega_{m1} & \cdots & \Omega_{mm}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\hat{\varepsilon}_{1t}\\ \vdots\\ \hat{\varepsilon}_{mt}\end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{tr}(\hat{\varepsilon}_t'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\hat{\varepsilon}_t)=\mathrm{tr}(\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1})$$

زیرا $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC})=\mathrm{tr}(\mathbf{CAB})$ است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\mathrm{tr}(\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t')=T\mathrm{tr}\left(\frac{1}{T}\sum_t\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_t'\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1}\right)=T\mathrm{tr}(\hat{\mathbf{\Omega}}\hat{\mathbf{\Omega}}^{-1})=T\mathrm{tr}(\mathbf{I}_m)=Tm$$

$$\ln L_{\max}=-\frac{T}{2}\ln|\hat{\mathbf{\Omega}}|+\left[-\frac{T}{2}\ln(2\pi)-\frac{T}{2}m\right] \qquad (۲۰-۹۸)$$

$$=-\frac{T}{2}\ln|\hat{\mathbf{\Omega}}|+c_1\ ;\ c_1=-\frac{T}{2}\ln(2\pi)-\frac{T}{2}m$$

و یا

$$L_{\max}=c|\hat{\mathbf{\Omega}}|^{-\frac{T}{2}}\ ;\ c=e^{c_1} \qquad (۲۰-۹۹)$$

هم‌چنین می‌توان تابع درستنمایی را به‌صورت زیر نوشت:

$$L_{\max}^{-\frac{2}{T}}=k|\hat{\mathbf{\Omega}}|\ ;\ k=c^{-\frac{2}{T}} \qquad (۲۰-۱۰۰)$$

۲۰-۹ آزمون روابط علّی

در مدل‌های VAR، تعیین طول وقفه‌ها و تعیین اینکه کدام متغیر بر متغیرهای دیگر اثر می‌گذارد و یا اثر می‌پذیرد، نسبتاً دشوار و زمان‌بر است. به‌همین دلیل از آزمون‌هایی استفاده می‌شود که تأثیر یک متغیر بر دیگری را به‌صورت یکجا انجام می‌دهد و نه بر حسب وقفه‌های مختلف. به‌عنوان مثال بررسی می‌شود که آیا Y_1 بر Y_2 تأثیر دارد یا نه. توجه داریم که اثر تمامی وقفه‌های Y_1 بر Y_2 توسط ضرایب $a_{21,j}$ نشان داده می‌شود. بدیهی است که اگر $\sum_{j=1}^{p}a_{21,j}$ تقریباً به صفر نزدیک باشد، در این صورت Y_1 بر Y_2 اثر ندارد. همچنین اگر $\sum_{j=1}^{p}a_{12,j}$ تقریباً صفر باشد، در این صورت Y_2 بر Y_1 تأثیر ندارد. برای آزمون فرضیه $\sum_{j=1}^{p}a_{12,j}=0$ می‌توان از مقایسه مدل‌های مقید و نامقید استفاده نمود که با آماره F قابل آزمون هستند. این روش مشابه آزمون علیّت گرانجر است (فصل هشتم). در آزمون علیّت گرانجر بررسی می‌شود که «آیا Y_2 سبب تغییر Y_1 می‌شود». اگر جواب مثبت باشد، آنگاه بایستی ضرایب وقفه‌های Y_2 در معادله Y_1 (یعنی $a_{12,j}$) معنادار بوده و $\sum a_{12,j}$ مخالف صفر باشد. همین استدلال را برای تأثیر Y_1 بر Y_2 براساس ضرایب $a_{21,j}$ می‌توان به‌کار برد. اگر هر دو $\sum a_{12,j}$ و $\sum a_{21,j}$ معنادار باشند، در این صورت گفته می‌شود که رابطه علّیِ دو طرفه برقرار است.

مشکل علیّت گرانجر آن است که رابطه علیّت را براساس رابطهٔ بین مقادیر جاری یک متغیر با مقادیر گذشتهٔ متغیر دیگر بررسی می‌کند. چنین رابطه‌ای لزوماً نشان نمی‌دهد که تغییرات یک متغیر دلیل تغییرات سایر متغیرها است.

در حالت کلی، فرم حل‌شده را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \mathbf{v}_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ \vdots \\ Y_{mt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} a_{11,j} & a_{12,j} & \cdots & a_{1m,j} \\ a_{21,j} & a_{22,j} & \cdots & a_{2m,j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1,j} & a_{m2,j} & \cdots & a_{mm,j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-j} \\ Y_{2t-j} \\ \vdots \\ Y_{mt-j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{1t} \\ v_{2t} \\ \vdots \\ v_{mt} \end{bmatrix} \qquad (20\text{-}101)$$

اگر $a_{12,j} = 0$ باشد، بدان معنا است که Y_2 تغییرات Y_1 را توضیح نمی‌دهد و به‌عبارت دیگر $\sum_{j=1}^{p} a_{12,j} = 0$ است. این آزمون را برای هر یک از متغیرها می‌توان به‌کار برد. توجه شود که این روش، عام‌تر از علیّت گرانجر است، زیرا علیّت گرانجر رابطهٔ علّی را برای متغیرها به‌صورت دو به دو انجام می‌دهد. ولی در اینجا می‌توان معنادار بودن تأثیرپذیری یک متغیر از چند متغیر را به‌طور همزمان انجام داد. به‌عنوان مثال، فرضیهٔ $\sum_{j=1}^{p} a_{12,j} = \sum_{j=1}^{p} a_{13,j} = \ldots = \sum_{j=1}^{p} a_{1m,j} = 0$ را می‌توان آزمون نمود. این فرضیه بدان معنا است که هیچ یک از متغیرهای موجود در مدل با هیچ وقفه‌ای، نمی‌توانند تغییرات Y_1 را توضیح دهند. این آزمون را برای هر گروهی از متغیرها می‌توان به‌کار برد که معروف به آزمون معنی‌دار بودن بلوکی است.

هر یک از فرضیه‌های فوق را می‌توان با استفاده از آماره F انجام داد. بدین منظور، مدل نامقید (۲۰-۱۰۱) را با OLS برآورد نموده و مجموع مجذور خطاهای معادله موردنظر را با RSS_{UR} نشان می‌دهیم که درجه آزادی آن برابر با $T - mp - 1$ است. T تعداد مشاهدات، m تعداد معادلات یا متغیرها و p تعداد وقفه‌ها است. توجه شود که در هر معادله، T مشاهده و m متغیر و p وقفه داریم و لذا تعداد ضرایب برابر با $mp+1$ می‌باشد. حال قیدهای موردنظر را روی معادله موردنظر اعمال کرده و آن را با OLS برآورد می‌کنیم و مجموع مجذور خطاهای آن را با RSS_R نشان می‌دهیم.

اگر k قید را اعمال کرده باشیم در این صورت درجه آزادی معادله مقید برابر با $T - mp - 1 - k$ خواهد بود. بنابراین، آماره F برای معادله موردنظر عبارت است از:

$$F_{k,T-mp-1} = \frac{\frac{RSS_R - RSS_{UR}}{k}}{\frac{RSS_{UR}}{T - mp - 1}} = \frac{T - mp - 1}{k} \frac{RSS_R - RSS_{UR}}{RSS_{UR}} \qquad (20\text{-}102)$$

$$= \frac{T - mp - 1}{k} \frac{R_{UR}^2 - R_R^2}{1 - R_{UR}^2}$$

همچنین می‌توان یک بلوک از ماتریس $\mathbf{A}_j$ را برابر صفر قرار داد و آن را با F یا نسبت درستنمایی، آزمون نمود. نسبت درستنمایی به‌صورت (۲۰-۲۳) معرفی گردید.

۲۰-۱۰ توابع واکنش

توابع واکنش بیانگر آن است که هر یک از متغیرهای مدل VAR چگونه به شوک‌ها عکس‌العمل نشان می‌دهند. شوک‌ها شامل تغییرات تصادفی است که از طریق u_{1t}، u_{2t}، ... و u_{mt} وارد مدل می‌شوند. هر شوکی که به یک متغیر وارد شود، سایر متغیرها را نیز تحت تأثیر قرار می‌دهد. فرم ساختاری (۲۰-۱۸) نشان می‌دهد که وقتی u_{1t} تغییر می‌کند (یعنی یک شوک تصادفی به Y_{1t} وارد شود) موجب تغییر Y_{1t} می‌شود. از طرف دیگر در فرم ساختاری، چون ε_{1t} و ε_{2t} تابعی از u_{1t} هستند، موجب تغییر Y_2 نیز می‌شود. این تغییرات پیاپی ادامه خواهد داشت. برای اندازه‌گیری اثر شوک‌ها می‌توان از فرم حل‌شده استفاده نمود. در این صورت ε_{1t} و ε_{2t} را می‌توان یک واحد تغییر داد و اثر آن را بررسی نمود (مثال ۲۰-۳). اما تغییر در ε_{1t} معلوم نیست که ناشی از شوک‌های وارد به Y_{1t} بوده (یعنی u_{1t}) یا به‌خاطر شوک‌های وارده به Y_{2t} بوده است (یعنی u_{2t}). بنابراین، لازم است که برای تحلیل اثر شوک‌ها بر حسب منشأ آنها، از فرم ساختاری استفاده کنیم. همان‌طور که اشاره شد برای استفاده از فرم ساختاری بایستی قیودی را روی ماتریس $\mathbf{\theta}$ اعمال کنیم تا مدل VARساختاری قابل شناسایی شود. از آنجا که این قیود، منحصر به‌فرد نیستند، لذا اعمال هر یک از قیود نوعی از عکس‌العمل را به‌دنبال دارد که متفاوت خواهد بود. این مسئله را در مبحث شناسایی مدل‌های VAR و تجزیهٔ چولسکی نشان دادیم که جزئیات آن در مثال ۲۰-۳ بررسی گردید. مفهوم توابع واکنش در مثال زیر ارائه شده است.

مثال ۵-۲۰: مدل VAR(1) را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

حال فرض کنید که در زمان $t<0$، Y_{1t} و Y_{2t} برابر صفر باشند که مقادیر تعادلی این متغیرها می‌باشد. همچنین با فرض اینکه در $t<0$ هیچ شوکی وارد نشده باشد، در این صورت $\varepsilon_{1t} = \varepsilon_{2t} = 0$ خواهد بود. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ t<0$$

فرض کنید که در زمان صفر، شوکی به اندازهٔ یک واحد از طریق ε_{1t}، به Y_{1t} وارد شود، بدین معنی که ε_{1t} که قبلاً صفر بوده، یک واحد افزایش یابد. توجه شود که فرض بر این است که این شوک فقط در زمان $t=0$ وارد می‌شود و بعد از آن وجود نخواهد داشت. بنابراین، ε_t عبارت است از:

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t=0$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0$$

توجه شود که در اینجا، شوک وارده را از طریق جملهٔ خطای ساختاری معادله اول وارد کرده‌ایم. فرض بر این است که ε_{1t} یک واحد تغییر کرده است و هیچ بحثی در خصوص منشأ آن نمی‌کنیم. منشأ این تغییر می‌تواند u_{1t} یا u_{2t} باشد. در اینجا هدف ما فقط تشریح واکنش متغیرها به شوک‌های تصادفی است. به هر حال، تغییر $\mathbf{y}_t$ برای سال $t=0$ عبارت است از:

$$\Delta \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \Delta Y_{10} \\ \Delta Y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t=0$$

از آنجا که به‌ازای $t<0$، $\mathbf{y}_t = \mathbf{0}$ و $\varepsilon_t = \mathbf{0}$ است، لذا $\Delta \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0 = \Delta \varepsilon_0 = \varepsilon_0$ می‌باشد.

برای سالهای $t \geq 1$ رابطه $\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \Delta \varepsilon_t$ برقرار است که با توجه $\Delta \varepsilon_t = \mathbf{0}$، رابطه $\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_{t-1}$ را داریم:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_{t-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t-1} \\ \Delta Y_{2t-1} \end{bmatrix}, \quad t \geq 1$$

$$t=1 \Rightarrow \Delta \mathbf{y}_1 = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$t=2 \Rightarrow \Delta \mathbf{y}_2 = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25+0.02 \\ 0.10+0.08 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.18 \end{bmatrix}$$

$$t=3 \Rightarrow \Delta \mathbf{y}_3 = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.27 \\ 0.18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.135+0.027 \\ 0.054+0.072 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.162 \\ 0.126 \end{bmatrix}$$

با ادامه این روش، برای $t=n$ خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{y}_n = \mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_{n-1} = \mathbf{A}(\mathbf{A} \Delta \mathbf{y}_{n-2}) = \dots = \mathbf{A}^n \Delta \mathbf{y}_0$$

بدین ترتیب اثر شوک وارده در زمان $t=0$ در هر زمان دلخواهی مانند t از رابطه $\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A}^t \Delta \mathbf{y}_0$ به‌دست می‌آید. چون $\Delta \mathbf{y}_0 = \Delta \varepsilon_0$ است، لذا $\Delta \mathbf{Y}_t = \mathbf{A}^t \Delta \varepsilon_0$ می‌باشد.

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A}^t \Delta \varepsilon_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

رابطه فوق، واکنش $\mathbf{y}_t$ به شوک‌های زمان ۰ را نشان می‌دهد. با استفاده از ریشه‌های مشخصه و بردارهای مشخصه می‌توان ماتریس $\mathbf{A}^t$ را به شکل ساده‌تری به‌دست آورد و سپس $\Delta \mathbf{Y}_t$ را به‌صورت زیر نوشت[1]:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\lambda_1^t + \lambda_2^t & \lambda_1^t - \lambda_2^t \\ 2\lambda_1^t - 2\lambda_2^t & \lambda_1^t + 2\lambda_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{10} \\ \Delta \varepsilon_{20} \end{bmatrix}$$

و یا

$$\Delta Y_{1t} = \frac{2\lambda_1^t + \lambda_2^t}{3} \Delta \varepsilon_{10} + \frac{\lambda_1^t - \lambda_2^t}{3} \Delta \varepsilon_{20}$$

$$\Delta Y_{2t} = \frac{2\lambda_1^t - 2\lambda_2^t}{3} \Delta \varepsilon_{10} + \frac{\lambda_1^t + 2\lambda_2^t}{3} \Delta \varepsilon_{20}$$

۱- ریشه‌های مشخصه ماتریس $\mathbf{A}$ عبارتند از:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.18 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.6, \ \lambda_2 = 0.3$$

بردارهای مشخصه نیز عبارتند از:

$$\lambda_1 = 0.6 \Rightarrow c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 0.3 \Rightarrow c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس حاصل از بردارهای مشخص به‌صورت $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ می‌باشد. از آنجا که رابطه $\mathbf{A} = \mathbf{C} \lambda \mathbf{C}^{-1}$ برقرار است (λ ماتریس قطری با عناصر λ_1 و λ_2 می‌باشد)، لذا رابطه $\mathbf{A}^t = \mathbf{C} \lambda^t \mathbf{C}^{-1}$ نیز برقرار می‌باشد. در نتیجه، $\mathbf{A}^t$ برابر است با:

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{C} \lambda^t \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\lambda_1^t + \lambda_2^t & \lambda_1^t - \lambda_2^t \\ 2\lambda_1^t - 2\lambda_2^t & \lambda_1^t + 2\lambda_2^t \end{bmatrix}$$

بدیهی است که اگر $|\lambda_i|<1$ باشد، اثر شوک‌ها در طول زمان کاهش یافته و به صفر می‌رسد. در این صورت با گذشت زمان، $\Delta Y_{1t}=\Delta Y_{2t}=0$ می‌شود و لذا Y_{1t} و Y_{2t} به سمت میانگین خود (یا مقادیر تعادلی) حرکت خواهند کرد. حال اگر به مثال مذکور برگردیم که در آن $\Delta\varepsilon_{10}=1$، $\Delta\varepsilon_{20}=0$، $\lambda_1=0/6$ و $\lambda_2=0/3$ است، خواهیم داشت:

$$\Delta Y_{1t}=\frac{2}{3}(0/6)^t+\frac{1}{3}(0/3)^t$$

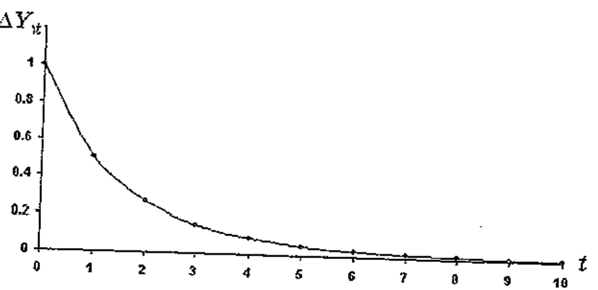
$$\Delta Y_{2t}=\frac{2}{3}(0/6)^t-\frac{2}{3}(0/3)^t$$

نتایج حاصله برای برخی از سال‌ها در جدول زیر نشان داده شده است:

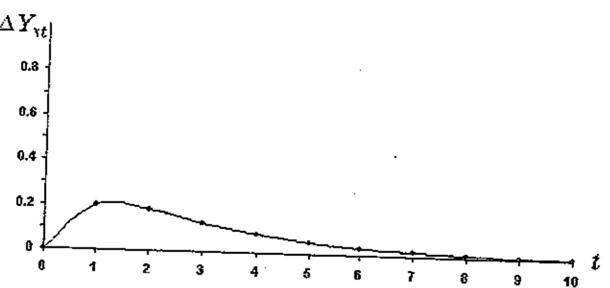
جدول ۱۱-۲۰: واکنش متغیرها به شوک‌های وارده به Y_{1t}

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۱۰	۲۰
ΔY_{1t}	۱	۰/۵	۰/۲۷	۰/۱۵۳	۰/۰۸۹	۰/۰۵۲۷	۰/۰۰۴۰۳۳	۰/۰۰۰۰۲۴
ΔY_{2t}	۰	۰/۲	۰/۱۸	۰/۱۲۶	۰/۰۸۱	۰/۰۵۰۲	۰/۰۰۴۰۲۷	۰/۰۰۰۰۲۴

نمودارهای زیر تغییرات Y_1 و Y_2 را برای سالهای ۰ تا ۱۰ نشان می‌دهند:



نمودار ۳-۲۰: واکنش آنی Y_{1t} به یک واحد تغییر در ε_1



نمودار ۴-۲۰: واکنش آنی Y_{2t} به یک واحد تغییر در ε_1

اثرات تجمعی برابر است با:

$$\Delta Y_{1t}=\sum_{i=0}^{t}\left[\frac{2}{3}(0/6)^i+\frac{1}{3}(0/3)^i\right]$$

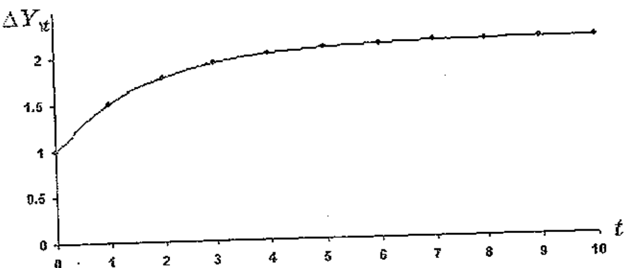
$$\Delta Y_{2t}=\sum_{i=0}^{t}\left[\frac{2}{3}(0/6)^i-\frac{2}{3}(0/3)^i\right]$$

اگر t به سمت بی‌نهایت میل کند، اثرات تجمعی برابر است با:

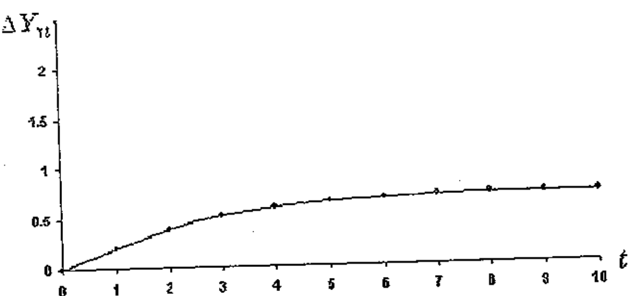
$$\Delta Y_{1t}=\frac{2}{3}\frac{1}{1-0/6}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-0/3}=\frac{10}{6}+\frac{10}{21}=2/143$$

$$\Delta Y_{2t}=\frac{2}{3}\frac{1}{1-0/6}-\frac{2}{3}\frac{1}{1-0/3}=\frac{10}{6}-\frac{20}{21}=0/714$$

نتایج فوق در نمودارهای زیر ترسیم شده است:



نمودار ۵-۲۰: واکنش تجمعی Y_{1t} به یک واحد تغییر در ε_1



نمودار ۶-۲۰: واکنش تجمعی Y_{2t} به یک واحد تغییر در ε_1

۲۰-۱۱ تجزیه واریانس

تجزیه واریانس روشی برای بررسی پویایی مدل VAR است. این روش، تغییرات متغیرهای وابسته را به علت شوک‌های وارد بر آن متغیر در مقابل شوکهای وارده به سایر متغیرها بررسی می‌کند. به‌عنوان مثال ε_{it} شوک وارده بر Y_{it} است که به سایر متغیرها نیز منتقل می‌شود. تجزیه واریانس تعیین می‌کند که چه مقدار از واریانس خطای پیش‌بینی یا اثر شوک‌ها، ناشی از عوامل مختلف است.

برای سادگی، مدل VAR(۱) با دو متغیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰-۱۰۳)$$

این مدل را برای دوره $t+1$ نوشته و امید ریاضی آن را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$$

$$E_t(\mathbf{y}_{t+1}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_t$$

E_t بیانگر امید ریاضی براساس مجموعهٔ اطلاعات زمان t می‌باشد.

خطای پیش‌بینی برای یک دوره بعد، برابر است با:

$$\mathbf{y}_{t+1} - E(\mathbf{y}_{t+1}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \qquad (۲۰-۱۰۴)$$

مدل مذکور را برای دوره $t+2$ نوشته و امید ریاضی آن را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_{t+2} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+2} = (\mathbf{I}+\mathbf{A}_1)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^2\mathbf{y}_t + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+2}$$

$$E_t(\mathbf{y}_{t+2}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1E_t(\mathbf{y}_{t+1}) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_t) = (\mathbf{I}+\mathbf{A}_1)\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1^2\mathbf{y}_t$$

خطای پیش‌بینی برای دو دورهٔ بعدی برابر است با:

$$\mathbf{y}_{t+2} - E_t(\mathbf{y}_{t+2}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+2} + \mathbf{A}_1(\mathbf{y}_{t+1} - E(\mathbf{y}_{t+1})) = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+2} + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}$$

اگر این نتیجه را برای n دورهٔ بعدی تعمیم دهیم خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_{t+n} - E_t(\mathbf{y}_{t+n}) = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+n} + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n-1} + \mathbf{A}_1^2\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n-2} + \ldots + \mathbf{A}_1^{n-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1} \qquad (۲۰-۱۰۵)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}_1^i\boldsymbol{\varepsilon}_{t+n-i} = \sum_{i=0}^{n-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^i\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t+i} \\ \varepsilon_{2t+i}\end{bmatrix}$$

حال اگر از رابطه $\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\theta}^{-1}\mathbf{u}_t$ به‌جای $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_{t+n} - E_t(\mathbf{y}_{t+n}) = \begin{bmatrix} Y_{1,t+n} - E_t(Y_{1,t+n}) \\ Y_{2,t+n} - E_t(Y_{2,t+n})\end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^i\begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} u_{1t-i} \\ u_{2t-i}\end{bmatrix} \qquad (۲۰-۱۰۶)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\begin{bmatrix} \phi_{11,i} & \phi_{12,i} \\ \phi_{21,i} & \phi_{22,i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{1t-i} \\ u_{2t-i}\end{bmatrix}$$

ϕها عناصر ماتریس $\mathbf{A}^i\boldsymbol{\theta}^{-1}$ هستند. با استفاده از رابطه فوق، خطای پیش‌بینی برای Y_{1t} برای n دورهٔ بعدی عبارت است از:

$$Y_{1,t+n} - E_t(Y_{1,t+n}) = \sum_{i=0}^{n-1}\phi_{11,i}u_{1t-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\phi_{12,j}u_{2t-i} \qquad (۲۰-۱۰۷)$$

واریانس خطای پیش‌بینیِ Y_{1t} برای n دورهٔ بعدی عبارت است از:

$$\mathrm{var}(Y^f_{1,t+n}) = E\left(Y_{1,t+n} - E_t(Y_{1,t+n})\right)^2 = E\left[\sum_{i=0}^{n-1}\phi_{11,i}u_{1t-i} + \sum_{i=0}^{n-1}\phi_{12,i}u_{2t-i}\right]^2$$

با توجه به استقلال u_{1t} و u_{2t} و هم‌چنین عدم خودهمبستگی جملات خطاها، خواهیم داشت:

$$\mathrm{var}(Y^f_{1,t+n}) = \sum_{i=0}^{n-1}\phi^2_{11,i}\sigma^2_{u_1} + \sum_{i=0}^{n-1}\phi^2_{12,i}\sigma^2_{u_2} \qquad (۲۰-۱۰۸)$$

از آنجا که $\mathrm{var}(Y_{it}) = \mathrm{var}(u_{it}) = \sigma^2_{u_i}$ است، لذا به‌جای $\sigma^2_{u_i}$ از $\sigma^2_{y_i}$ استفاده می‌کنیم:

$$\mathrm{var}(Y^f_{1,t+n}) = \sum_{i=0}^{n-1}\phi^2_{11,i}\sigma^2_{y_1} + \sum_{i=0}^{n-1}\phi^2_{12,i}\sigma^2_{y_2} \qquad (۲۰-۱۰۹)$$

بنابراین، چون ϕ^2ها همگی مثبت هستند، با افزایش دورهٔ پیش‌بینی، خطای پیش‌بینی افزایش می‌یابد. طبق رابطه (۲۰-۱۰۹) واریانس خطای پیش‌بینی به دو جزء تجزیه شده است که یکی ناشی از واریانس Y_1 و دیگری ناشی از واریانس Y_2 است و به‌عبارت دیگر، ناشی از شوک‌های وارده به Y_1 و Y_2 می‌باشد.

در توصیف خطای پیش‌بینی که در (۲۰-۱۰۷) معرفی شد توجه شود که اگر هیچ شوکی وارد نشود، خطای پیش‌بینی صفر است. یعنی Y_{1t} از مقدار متوسط خود هیچ انحرافی پیدا نمی‌کند. اما

اگر شوکی به Y_{1t} و یا به Y_{2t} از طریق u_{1t} و u_{2t} وارد شود، آنگاه Y_{1t} از مقدار متوسط خود منحرف می‌شود که بیانگر تأثیر شوک وارده است.

اگر طرفین رابطه (۱۰۹-۲۰) را بر $var(Y^{f}_{1,t+n})$ تقسیم کنیم، آنگاه جمله اول درصد ناشی از شوک‌های وارده به Y_1 و جمله دوم درصد ناشی از شوک‌های وارده به Y_2 را نشان خواهد داد.

برای تجزیه واریانس، ابتدا زمان صفر را در نظر بگیرید:

$$\text{کل تغییرات } Y_1 \text{ در زمان صفر} = \underbrace{\sigma^2_{y_1}\phi^2_{11,0}}_{\text{ناشی از شوک } Y_1} + \underbrace{\sigma^2_{y_2}\phi^2_{12,0}}_{\text{ناشی از شوک } Y_2} \qquad (۲۰-۱۱۰)$$

$$\text{درصد تغییرات } Y_1 \text{ در زمان صفر که ناشی از شوک‌های وارده به } Y_1 \text{ است.} = \frac{\sigma^2_{y_1}\phi^2_{11,0}}{\sigma^2_{y_1}\phi^2_{11,0}+\sigma^2_{y_2}\phi^2_{12,0}} \qquad (۲۰-۱۱۱)$$

$$\text{درصد تغییرات } Y_1 \text{ در زمان صفر که ناشی از شوک‌های وارده به } Y_2 \text{ است.} = \frac{\sigma^2_{y_2}\phi^2_{12,0}}{\sigma^2_{y_1}\phi^2_{11,0}+\sigma^2_{y_2}\phi^2_{12,0}} \qquad (۲۰-۱۱۲)$$

این شیوه را برای سال ۱ و سایر سال‌ها می‌توان به‌همین صورت ادامه داد تا به سال n برسیم. بنابراین در حالتی که مثلاً ۳ متغیر داشته باشیم، می‌توان برای هر متغیر، درصد تغییرات را به‌صورت جدول زیر تشکیل داد:

جدول ۱۲-۲۰: درصد تغییرات Y_{1t} در اثر شوک‌ها

سال	ناشی از شوک‌های وارده به Y_{1t}	ناشی از شوک‌های وارده به Y_{2t}	ناشی از شوک‌های وارده به Y_{3t}
۰	۱۰۰	۰	۰
۱	۸۰	۱۵	۵
۲	۷۵	۱۷	۸
⋮	⋮	⋮	⋮

۱۲-۲۰ مانایی در مدل‌های VAR

متغیرهای مانا دارای یک مقدار تعادلی یا یک روند تعادلی هستند که در طول زمان به سمت آن حرکت می‌کنند. برای مدل‌های VAR می‌توان چنین وضعیت تعادلی را توصیف نمود. اگر متغیرهای مدل، مانا باشند آنگاه برای آنها وضعیت تعادلی وجود خواهد داشت. در غیر این صورت، متغیرها نامانا خواهند بود و وارد مبحث هم‌انباشتگی می‌شود که در فصل بیست و یکم بررسی می‌شود.

برای سادگی، مدل VAR(1) را در حالت دو متغیره در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \;;\; \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} \;,\; \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۱۱۳)$$

برای بررسی موضوع مانایی می‌توان از عملگرهای وقفه استفاده نمود:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 L\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \Rightarrow (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1 L)\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \Rightarrow \mathbf{y}_t = (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1 L)^{-1}(\mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t)$$

با ساده نمون معادله فوق، خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{A}_1 L)^j \boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \mathbf{A}_1\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \mathbf{A}_1^2\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2} + \ldots + \mathbf{A}_1^t\boldsymbol{\varepsilon}_0 + \ldots \qquad (۲۰-۱۱۴)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_0 \quad , \quad (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1 L)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty}(\mathbf{A}_1 L)^j$$

معادله (۱۱۴-۲۰) بیانگر آن است که مدل VAR به‌صورت میانگین متحرک بیان شده است که به‌همین دلیل آن را VARMA[1] می‌گویند.

همان‌طور که در ادامه نشان خواهیم داد، اگر این مدل از مانایی برخوردار باشند، آنگاه ماتریس $\mathbf{A}_1^t$ با افزایش t به سمت صفر میل خواهد کرد. این بدان معنا است که اثر شوک وارده در زمان صفر بر $\mathbf{y}_t$ برابر است با:

$$\frac{\Delta \mathbf{y}_t}{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0} = \mathbf{A}_1^t \qquad (۲۰-۱۱۵)$$

بنابراین، با افزایش t اثر شوک‌های وارده، به‌سمت صفر میل می‌کنند و این بدان معنا است که $\mathbf{y}_t$ به سمت مقدار تعادلی خود (یعنی $\boldsymbol{\mu}$) میل خواهد کرد. همچنین بحث فوق را می‌توان به این صورت بیان نمود که اثر شوک وارده در زمان، بعد از k سال برابر است با:

$$\frac{\Delta \mathbf{y}_{t+k}}{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_t} = \mathbf{A}_1^k \;;\; k = 0,1,2,\ldots \qquad (۸-۱۱۶)$$

1- VAR moving average

در بلندمدت که تعادل برقرار می‌شود، اثر شوک‌ها از بین رفته است و $\mathbf{y}$ به مقدار تعادلی خود ($\mathbf{y}^*$) بازمی‌گردد.

$$\varepsilon_t = 0 \ , \ \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}^*$$

با جایگذاری در (۱۱۳-۲۰) خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}^* \Rightarrow \mathbf{y}^* = (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_0 = \boldsymbol{\mu} \qquad (۲۰-۱۱۷)$$

برای بررسی دقیق‌تر موضوع فوق، ابتدا یک سری زمانی یک متغیره را در نظر بگیرید که در فصل سیزدهم بررسی شد:

$$Y_t = a_0 + a_1Y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \text{یا} \quad Y_t - a_1Y_{t-1} = a_0 + \varepsilon_t$$

این مدل دارای یک معادله مشخصه به‌صورت $\lambda - a_1 = 0$ است که ریشه مشخصه آن $\lambda = a_1$ می‌باشد و لذا جواب این معادله عبارت است از (ضمیمه الف):

$$Y_t = \frac{a_0}{1-\lambda} + c\lambda^t + \sum_{j=0}^{t-1}\lambda^j\varepsilon_{t-j} = \frac{a_0}{1-\lambda} + c\lambda^t + \varepsilon_t + \lambda\varepsilon_{t-1} + \lambda^2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \lambda^{t-1}\varepsilon_1$$

اگر $|\lambda| < 1$ باشد، در این صورت هر شوک تصادفی (ε_t) موجب تغییر در Y می‌شود، ولی اثرات آن با گذشت زمان، کوچک می‌شود و از بین می‌رود. به‌عنوان مثال اگر در سال ۱ یک شوک مثبت وارد شود $(\varepsilon_1 > 0)$، اثر آن در سال t برابر با λ^{t-1} است.

از طرف دیگر، $\frac{a_0}{1-\lambda}$ یا $\frac{a_0}{1-a_1}$ (یا $a_0(1-a_1)^{-1}$) برابر با مقدار تعادلی Y_t است. معادلهٔ $Y_t = a_0 + a_1Y_{t-1} + \varepsilon_t$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (با کسر $\frac{a_0}{1-a_1}$ از طرفین):

$$Y_t - \frac{a_0}{1-a_1} = a_1\left(Y_{t-1} - \frac{a_0}{1-a_1}\right) + \varepsilon_t$$

سمت راست بیانگر انحراف از تعادل در دوره t است که برابر با ضریبی از انحراف از تعادل در دوره قبل است. بنابراین در هر دوره، درصدی از عدم‌تعادل دورهٔ قبلی تصحیح می‌شود. اما اگر هیچ شوکی وجود نداشته باشد و تعادل برقرار باشد آنگاه $Y_t = Y_{t-1} = Y^* = \frac{a_0}{1-a_1}$ خواهد بود.

در مدل فوق، اگر $\lambda = 1$ باشد آن را ریشهٔ واحد می‌گویند که موجب نامانایی Y خواهد شد. در این صورت خواهیم داشت:

$$Y_t = c_1 + c_2t + \sum_{i=0}^{t-1}\varepsilon_{t-i}$$
$$= c_1 + c_2t + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_2 + \varepsilon_1$$

ملاحظه می‌شود که اثر شوک در زمان ۱ $(\varepsilon_1 > 0)$، در سال t دارای ضریب ۱ است و لذا اثرات آن ماندگار است.

اگر برای Y_t یک فرایند AR(۲) به‌صورت $Y_t = a_0 + a_1Y_{t-1} + a_2Y_{t-2} + \varepsilon_t$ در نظر بگیریم، آنگاه معادله مشخصهٔ $\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0$ را داریم که مانایی آن، بستگی به ریشه‌های مشخصه دارد. همچنین برای AR(p) نیز معادله مشخصه به‌صورت $\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - a_2\lambda^{p-2} - \ldots - \lambda = 0$ است که در صورت وجود، ریشه‌های مشخصه آن شامل λ_1، λ_2، ... و λ_p است. در اینجا نیز اگر ریشه واحد وجود داشته باشد، Y_t نامانا است و اگر $|\lambda_i| < 1$ باشد Y_t مانا خواهد بود.

بحث فوق را برای مدل VAR(۱) به‌کار می‌بریم. در مدل VAR(۱)، طبق رابطهٔ (۱۱۷-۲۰) مقادیر تعادلی برابر با $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_0$ است. مشابه بحث فوق، با کسر $\boldsymbol{\mu}$ از طرفین و مرتب نمودن آن، خواهیم داشت[1]:

$$\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_1(\mathbf{y}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \varepsilon_t \qquad (۲۰-۱۱۸)$$

۱- با کسر عبارت $\boldsymbol{\mu} = (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_1$ از طرفین (۱۰۰-۱۸) و با توجه به رابطهٔ زیر، نتیجهٔ (۱۰۵-۱۸) به‌دست آمده است:

$$\mathbf{A}_0 - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_0$$
$$= (\mathbf{I} - (\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1})\mathbf{A}_0$$
$$= (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_1^3 + \ldots)\mathbf{A}_0$$
$$= \mathbf{A}_1(\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^2 + \ldots)\mathbf{A}_0$$
$$= \mathbf{A}_1(\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_0$$

زیرا $(\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^2 + \ldots$ است.

بنابراین، عدم تعادل دورهٔ t برابر با ضریبی از عدم تعادل دوره قبل است. اگر ضرایب ماتریس $\mathbf{A}_1$ کوچکتر از واحد باشند، آنگاه با گذشت زمان، عدم تعادل‌ها کاهش می‌یابد تا تعادل برقرار شود. در این صورت $\mathbf{y}_t=\mathbf{y}_{t-1}=\mathbf{y}^*=\boldsymbol{\mu}$ خواهد بود. مثال‌های زیر، جزئیات بیشتر این مباحث را نشان می‌دهند.

مثال ۶-۲۰: مدل VAR(1) با دو متغیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

ابتدا ماتریس $\mathbf{I}-\mathbf{A}_1$ و معکوس آن را حساب می‌کنیم:

$$\mathbf{I}-\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}\Rightarrow(\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}=\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}$$

مقادیر تعادلی عبارتند از:

$$\boldsymbol{\mu}=(\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{A}_0 \Rightarrow\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 0.5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

بنابراین، $Y_1^*=4$ و $Y_2^*=3$ می‌باشد.

اثر شوک‌های تصادفی که در زمان صفر وارد شده‌اند، برابر است با:

$$\frac{\Delta \mathbf{y}_t}{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_0}=\mathbf{A}_1^t=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}^t \; ; \; t=0,1,2,...$$

برای بررسی دقیق‌تر موضوع، فرض کنید که در زمان t یک شوک یک واحدی از طریق ε_{1t} وارد می‌شود:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} \Delta\varepsilon_{1t} \\ \Delta\varepsilon_{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

در زمان t تغییرات $\mathbf{y}_t$ برابر است با:

$$\Delta\mathbf{y}_t=\mathbf{A}_1\Delta\mathbf{y}_{t-1}+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_t \;\;,\;\; \Delta\mathbf{y}_{t-1}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مقدار جدید هر یک از متغیرها برابر با مقدار قبلی آنها به‌علاوهٔ تغییرات آنها است که عبارتند از:

$$Y_{1t}=4+1=5$$

$$Y_{2t}=3+0=3$$

در زمان $t+1$ تغییرات Y_{t+1} برابر است با (توجه شود که از این زمان به بعد، $\Delta\varepsilon_t=\mathbf{0}$ است):

$$\Delta\mathbf{y}_{t+1}=\mathbf{A}_1\Delta\mathbf{y}_t \Rightarrow\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t+1} \\ \Delta Y_{2t+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

حال مقادیر جدید متغیرها در زمان $t+1$ را حساب می‌کنیم که برابر با مقدار اولیه به‌علاوهٔ تغییرات آنها در زمان $t+1$ می‌باشد:

$$Y_{1t+1}=4+0.2=4.2$$

$$Y_{2t+1}=3+0.2=3.2$$

در زمان $t+2$ که دو دوره از زمان شوک وارده گذشته است، تغییرات متغیرها عبارت است از:

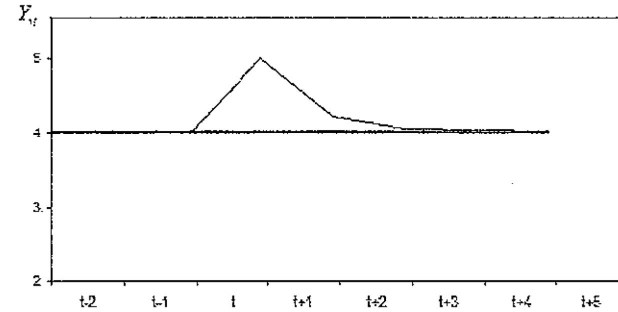
$$\Delta\mathbf{y}_{t+2}=\mathbf{A}_1\Delta\mathbf{y}_{t+1} \Rightarrow\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t+2} \\ \Delta Y_{2t+2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

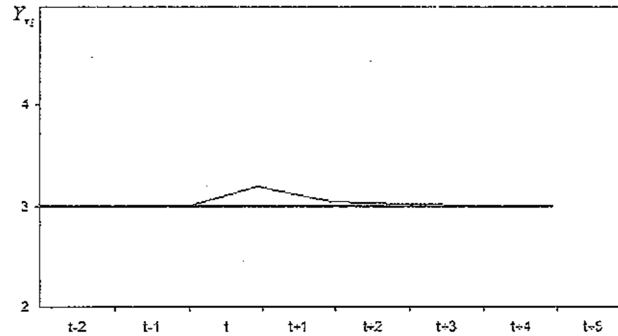
مقدار جدید متغیرها در دوره $t+2$ را مشابه بحث‌های قبلی حساب می‌کنیم که برابر است با:

$$Y_{1t+1}=4+0.04=4.04$$

$$Y_{2t+1}=3+0.04=3.04$$

ادامه این روند نشان می‌دهد که با گذشت زمان، تغییرات متغیرها به سمت صفر میل می‌کند و به‌دنبال آن، متغیرها نیز به سمت مقادیر تعادلی خود برمی‌گردند. بنابراین، فقط در یک دوره زمانی معینی، متغیرها از مقدار تعادلی خود خارج شده و سپس به آن، برخواهند گشت. نمودارهای زیر این وضعیت را نشان می‌دهند.





نمودار ۷–۲۰: اثر شوک‌ها بر متغیرهای مانا

مثال ۷–۲۰: مدل VAR(1) دو متغیره را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰–۱۱۹)$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

با استفاده از عملگرهای وقفه، خواهیم داشت (ضمیمه الف):

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{A}_1 L\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{A}L)\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

جواب این معادله تفاضل عبارت است از:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{k}_0 + \mathbf{A}^t\mathbf{k} + \sum_{i=0}^{t-1}\mathbf{A}^i\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \qquad (۲۰–۱۲۰)$$

$$\mathbf{k}_0 = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} k_{10} \\ k_{20} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

برای بررسی ویژگی‌های $\mathbf{y}_t$ ابتدا لازم است مقادیر ویژهٔ ماتریس $\mathbf{A}_1$ را به‌دست آوریم (ضمیمه ب):

$$|\mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I}| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

از حل این معادله، دو مقدار ویژهٔ λ_1 و λ_2 به‌دست می‌آید که بردارهای ویژه نیز $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ و ماتریس حاصل از آنها $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2]$ می‌باشد. با توجه به خواص مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، روابط زیر برقرار است (ضمیمه ب):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}\lambda\mathbf{C}^{-1} \ , \ \mathbf{A}_1^i = \mathbf{C}\lambda^i\mathbf{C}^{-1} \ , \ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری در معادله (۱۲۰–۲۰) خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{k}_0 + \mathbf{C}\lambda^t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{k} + \sum_{i=0}^{t-1}\mathbf{C}\lambda^i\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \qquad (۲۰–۱۲۱)$$

$$= \mathbf{k}_0 + \mathbf{C}\lambda^t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{k} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \ldots + \mathbf{C}\lambda^{t-1}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$$

بدیهی است که اگر مقادیر ویژه کوچکتر از واحد باشند، آنگاه اثر شوک‌های تصادفی، با گذشت زمان کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال $\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\lambda^{t-1}\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_1$ می‌باشد که با افزایش t ماتریس λ^{t-1} به سمت صفر میل خواهد کرد.[1]

مثال ۸–۲۰: بحث فوق را برای VAR(2) در حالت دو متغیره به‌کار می‌بریم:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۰–۱۲۲)$$

برای حل این معادله تفاضلی، ابتدا معادله $\mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_{t-1}$ را به آن اضافه می‌کنیم:

۱– اگر (۱۲۱–۲۰) را برای Y_{1t} و Y_{2t} بنویسیم، خواهیم داشت:

$$Y_{1t} = k_{10} + k_{11}\lambda_1^t + k_{12}\lambda_2^t + \sum_{i=0}^{t-1}(h_{11}\lambda_1^i + h_{12}\lambda_2^i)\varepsilon_{1t-i} + \sum_{i=0}^{t-1}(h_{13}\lambda_1^i + h_{14}\lambda_2^i)\varepsilon_{2t-i}$$

$$Y_{2t} = k_{20} + k_{21}\lambda_1^t + k_{22}\lambda_2^t + \sum_{i=0}^{t-1}(h_{21}\lambda_1^i + h_{22}\lambda_2^i)\varepsilon_{1t-i} + \sum_{i=0}^{t-1}(h_{23}\lambda_1^i + h_{24}\lambda_2^i)\varepsilon_{2t-i}$$

h_{ij} و k_{ij} مقادیر ثابت هستند. اگر ε_{1t} در زمان ۱ یک واحد تغییر کند ($\Delta\varepsilon_{11} = 1$) تغییرات Y_{1t} و Y_{2t} در زمان t برابر است با

$$\Delta Y_{1t} = h_{11}\lambda_1^{t-1} + h_{12}\lambda_2^{t-1} \quad \text{و} \quad \Delta Y_{2t} = h_{21}\lambda_1^{t-1} + h_{22}\lambda_2^{t-1}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (۲۰-۱۲۳)$$

$$\mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_{t-1}$$

معادلات فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{t-1} \\ \mathbf{y}_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \qquad (۲۰-۱۲۴)$$

$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ را تعریف کرده و معادلات فوق را $\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ و $\mathbf{Z}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \\ \mathbf{y}_{t-1} \end{bmatrix}$، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{V}_t \qquad (۲۰-۱۲۵)$$

توجه شود که $\mathbf{B}_0$ یک بردار ۴×۱ و $\mathbf{B}_1$ یک ماتریس ۴×۴ می‌باشد. (۲۰-۱۲۵) یک سیستم معادلات تفاضلی مرتبه اول است که با حل آن خواهیم داشت:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{K}_0 + \mathbf{B}_1^t\mathbf{K} + \sum_{j=0}^{t-1}\mathbf{B}_1^j\mathbf{V}_{t-j} \qquad (۲۰-۱۲۶)$$

برای ساده نمودن جواب‌ها، ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{B}_1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{B}_1 - \lambda\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 - \lambda\mathbf{I}_2 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{I}_2 & -\lambda\mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11,1} - \lambda & a_{12,1} & a_{11,2} & a_{12,2} \\ a_{21,1} & a_{22,1} - \lambda & a_{21,2} & a_{22,2} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}_1$ یک ماتریس ۴×۴ است که دارای ۴ مقدار ویژه است. به ازای هر مقدار ویژه یک بردار ویژه نیز به‌دست می‌آید که از آنها ماتریس $\mathbf{C}$ را تشکیل می‌دهیم. هر یک از ستونهای ماتریس C شامل یک بردار ویژه است. با توجه به رابطه $\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}\lambda\mathbf{C}^{-1}$ و $\mathbf{B}_1^i = \mathbf{C}\lambda^i\mathbf{C}^{-1}$ در (۲۰-۱۲۶) جایگذاری کرده و نتیجه حاصله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{k}_0 + \mathbf{C}\lambda^t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{k} + \sum_{j=0}^{t-1}\mathbf{C}\lambda^i\mathbf{C}^{-1}\mathbf{V}_{t-j} \qquad (۲۰-۱۲۷)$$

از آنجا که $\mathbf{Z}_t' = [Y_{1t}, Y_{2t}, Y_{1t-1}, Y_{2t-1}]$ و $\mathbf{V}_t' = [\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, 0, 0]$ است، لذا برای Y_{1t} خواهیم داشت (برای Y_{2t} نیز می‌توان چنین معادله‌ای را نوشت):

$$Y_{1t} = k_{10} + k_{11}\lambda_1^t + k_{12}\lambda_2^t + k_{13}\lambda_3^t + k_{14}\lambda_4^t \qquad (۲۰-۱۲۸)$$
$$+ \sum_{j=0}^{t-1}(h_{11}\lambda_1^j + h_{12}\lambda_2^j + h_{13}\lambda_3^j + h_{14}\lambda_4^j)\varepsilon_{1t-j}$$
$$+ \sum_{j=0}^{t-1}(h_{21}\lambda_1^j + h_{22}\lambda_2^j + h_{23}\lambda_3^j + h_{24}\lambda_4^j)\varepsilon_{2t-j}$$

این معادله، اثر شوک‌های تصادفی (یعنی ε_{1t} و ε_{2t}) را بر Y_{1t} نشان می‌دهد. اگر $|\lambda_i|<1$ باشد، شرط مانایی برقرار است.

حال بحث فوق را برای VAR(p) تعمیم می‌دهیم. بدین منظور تساوی‌های $\mathbf{y}_{t-i} = \mathbf{y}_{t-i}$ را به‌ازای $i=1,\ldots,p-1$، به مدل اضافه می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \ldots + \mathbf{A}_p\mathbf{y}_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۲۰-۱۲۹)$$

$$\mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_{t-1}$$

$$\mathbf{y}_{t-2} = \mathbf{y}_{t-2}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_{t-p-1} = \mathbf{y}_{t-p-1}$$

سیستم معادلات فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{Z}_{t-1} + \mathbf{V}_t \qquad (۲۰-۱۳۰)$$

اجزای این مدل عبارتند از:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m(p+2)\times 1}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{p-1} & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m(p+2)\times mp}, \quad \mathbf{V}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}_{m(p+2)\times 1}$$

در اینجا نیز یک سیستم معادلات تفاضلی مرتبه اول داریم که برای حل آن بایستی مقادیر ویژه ماتریس $\mathbf{B}_1$ را به‌دست آوریم. مقادیر ویژه از حل $|\mathbf{B}_1 - \lambda\mathbf{I}| = 0$ به‌دست می‌آید. شرط مانایی آن است که قدرمطلق تمام مقادیر ویژه، کوچکتر از ۱ باشند.

برآورد مدل VAR در Eviews

فایل data6

ابتدا از منوی Quick گزینه Estimate VAR را انتخاب می‌کنیم که به دنبال آن، پنجره زیر باز می‌شود:

VAR Specification

Basics

VAR Type
- (•) Unrestricted VAR
- ( ) Vector Error Correction
- ( ) Bayesian VAR

Endogenous Variables: y1 y2 y3

Estimation Sample: 1353 1386

Lag Intervals for Endogenous: 1 4

Exogenous Variables: c

OK | Cancel

در قسمت Endogenous Variables نام متغیرهای مورد نظر را وارد می‌کنیم. در قسمت Lag Intervals for Endogenous تعداد وقفه را وارد می‌کنیم (مثلاً اگر بخواهیم تا چهار وقفه بدهیم آن را به‌صورت 1 4 می‌نویسیم). همچنین در ذیل Exogenous Variable متغیرهای برونزا از جمله عرض از مبدأ را وارد می‌کنیم. در Estimation Sample دوره مورد نظر را می‌نویسیم. با انتخاب OK نتایج تخمین نشان داده می‌شود.

نتایج تخمین شامل سه قسمت است. قسمت اول آن به‌صورت زیر ارائه می‌شود که شامل تخمین ضرایب می‌باشد که هر ستون بیانگر ضرایب هر یک از معادلات و انحراف معیارها و t‌ها (اعداد داخل پرانتز) است.

Var: UNTITLED Workfile: LUT1::Lut1\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Stats | Impulse | Resids

Vector Autoregression Estimates

Vector Autoregression Estimates
Date: 04/17/12 Time: 09:20
Sample (adjusted): 1961Q2 1982Q4
Included observations: 87 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	Y1	Y2	Y3
Y1(-1)	-0.257888	0.048073	0.004370
	(0.11496)	(0.03067)	(0.02612)
	[-2.33037]	[1.56759]	[0.16731]
Y1(-2)	-0.070227	0.058211	0.039528
	(0.12093)	(0.03226)	(0.02747)
	[-0.58073]	[1.80443]	[1.43874]
Y1(-3)	0.162136	0.016095	0.008728
	(0.12385)	(0.03304)	(0.02814)
	[1.30916]	[0.48716]	[0.31019]
Y1(-4)	0.316690	-0.002872	-0.025074
	(0.11806)	(0.03150)	(0.02682)
	[2.68935]	[-0.09119]	[-0.93479]
Y2(-1)	0.409866	-0.072254	0.297120

بخش بعدی شامل معیارهایی از قبیل ضریب تعیین، ضریب تعیین تعدیل شده، آماره F، مجموع مجذور خطا، معیارهای آکائیک، شوارتز، لگاریتم تابع درستنمایی و ...می‌باشد. بخش پایانی نیز نتایج شامل معیارها و آماره‌هایی است که برای کل مدل ارائه شده است از قبیل معیار آکائیک و شوارتز.

Var: UNTITLED Workfile: LUT1::Lut1\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Stats | Impulse | Resids

Vector Autoregression Estimates

Y3(-4)	-0.548284	0.024667	0.025489
	(0.57963)	(0.15463)	(0.13169)
	[-0.94591]	[0.15952]	[0.19355]
C	0.007141	0.011433	0.007697
	(0.01719)	(0.00459)	(0.00390)
	[0.41545]	[2.49345]	[1.97114]
R-squared	0.195009	0.172818	0.310795
Adj. R-squared	0.064470	0.038680	0.199032
Sum sq. resids	0.139474	0.009926	0.007199
S.E. equation	0.043414	0.011582	0.009863
F-statistic	1.493879	1.288360	2.780845
Log likelihood	156.5089	271.4680	285.4394
Akaike AIC	-3.299056	-5.941794	-6.262975
Schwarz SC	-2.930586	-5.573325	-5.894505
Mean dependent	0.015742	0.018968	0.018378
S.D. dependent	0.044885	0.011812	0.011021

Determinant resid covariance (dof adj.)	1.39E-11
Determinant resid covariance	8.53E-12
Log likelihood	738.3532
Akaike information criterion	-16.07709
Schwarz criterion	-14.67168

بعد از تخمین معادلات، می‌توان سایر آزمونها و مباحث مربوط به مدل‌های VAR را انجام داد. یکی ازمواردی که معمولاً در مورد مدل‌های VAR انجام می‌شود بررسی واکنش متغیرها به شوکها است. بدین منظور در پنجرهٔ نتایج از منوی View گزینه Impulse Responses را انتخاب می‌کنیم:

Impulse Responses

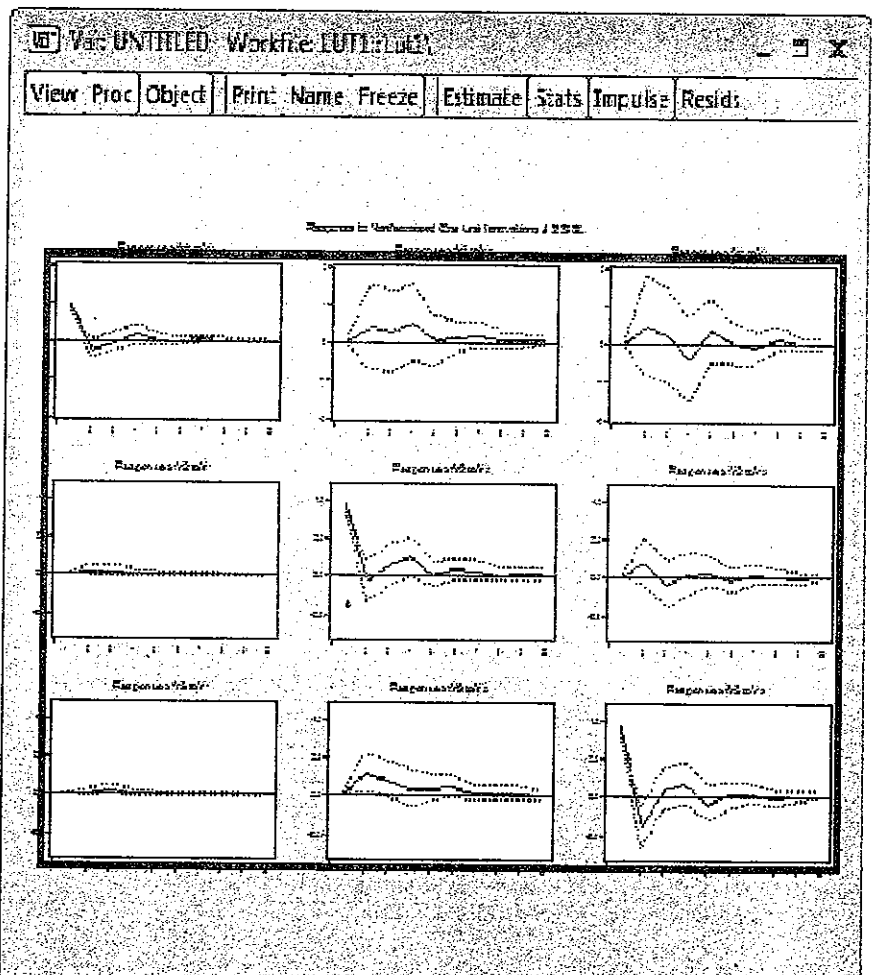
Display | Impulse Definition

Decomposition Method:
- (•) Residual - one unit — شوک یک واحدی به جملات خطای فرم استاندارد
- ( ) Residual - one std.deviation — شوکی معادل با یک انحراف معیار از طریق جملات خطای فرم استاندارد
- ( ) Cholesky - dof adjusted
- ( ) Cholesky - no dof adjustment — شوکی معادل با یک انحراف معیار از طریق جملات خطای ساختاری
- ( ) Generalized Impulses
- Structural Decomposition
- ( ) User Specified

Cholesky Ordering: y1 y2 y3

OK | Cancel

در بالای پنجره فوق، گزینه Impulse Definition وجود دارد که با انتخاب آن می‌توان روش مورد نظر را انتخاب نمود. با کلیک روی OK نتایج را می‌توان به‌صورت نموداری یا جدول، مشاهده نمود. هر یک از نمودارها بیانگر واکنش متغیرها به شوکهای وارده به آن متغیر و سایر متغیرها است. در اینجا همه نمودارها به‌طور یکجا نشان داده شده‌اند، اما می‌توان هر یک از نمودارها را به‌صورت جداگانه نیز ترسیم نمود.



در سطر اول، سه نمودار به‌ترتیب واکنش Y_1، Y_2 و Y_3 به شوک‌های وارده به Y_1 می‌باشد. همچنین سه نمودار سطر دوم، واکنش هر سه متغیر را به شوک‌های وارد به Y_2 می‌باشد. نمودارهای سطر سوم نیز واکنش به شوک‌ها وارد شده به Y_3 را نشان می‌دهد.

تجزیه واریانس نیز از موارد دیگری است که معمولاً در مدل‌های VAR مورد بحث قرار می‌گیرد. بدین منظور می‌توان در پنجره نتایج از منوی View گزینه Variance Decomposition را انتخاب نمود که جزئیات آن در پنجره زیر نشان داده شده است:

VAR Variance Decompositions

- Display Format: ○ Table; ◉ Multiple Graphs; ○ Combined Graphs
- Display Information: Decompositions of: y1 y2 y3; Periods: 10
- Standard Errors: ◉ None; ○ Monte Carlo; Repetitions for Monte Carlo: 100
- Factorization: ◉ Cholesky Decomposition; Structural Decomposition; Ordering for Cholesky: y1 y2 y3

OK Cancel

در این پنجره، ترتیب متغیرها و نوع دریافت نتایج (جدول یا نمودار) تعریف می‌شود. نتیجه تجزیه واریانس به‌صورت جدول زیر نشان داده می‌شود. این نتایج برای ۱۰ دوره ارائه شده است.

Var: UNTITLED Workfile: LUT1::Lut1\
View Proc Object Print Name Freeze Estimate Stats Impulse Resids

Variance Decomposition

Variance Decomposition of Y1:

Period	S.E.	Y1	Y2	Y3
1	0.045251	100.0000	0.000000	0.000000
2	0.046906	97.49738	1.943426	0.559198
3	0.047116	96.65521	2.667238	0.677550
4	0.047712	95.75033	3.095033	1.154633
5	0.047881	95.23182	3.284740	1.483442
6	0.047894	95.17800	3.339224	1.482771
7	0.047942	95.04999	3.437362	1.512643
8	0.047977	94.96563	3.485510	1.548856
9	0.047978	94.96068	3.489784	1.549539
10	0.047985	94.94172	3.508087	1.550197

Variance Decomposition of Y2:

Period	S.E.	Y1	Y2	Y3
1	0.011309	1.260906	98.73909	0.000000
2	0.011707	6.278591	92.14186	1.579549
3	0.011930	8.497850	89.54181	1.960340
4	0.012331	8.388538	89.70096	1.910498
5	0.012395	8.751364	89.13874	2.109893
6	0.012427	8.971046	88.81127	2.217687
7	0.012479	9.071576	88.68768	2.240740
8	0.012487	9.110039	88.63679	2.253174
9	0.012494	9.139388	88.59699	2.263621
10	0.012502	9.164047	88.56750	2.268449

Variance Decomposition of Y3:

Period	S.E.	Y1	Y2	Y3
1	0.009730	10.02707	28.17173	61.80120

قسمت اول نشان می‌دهد که تغییرات Y_1 ناشی از شوک‌های وارد به Y_1، Y_2 و Y_3 است و به‌همین دلیل، مجموع هر سطر برابر ۱۰۰ می‌باشد.

مسائل

۲۰-۱ یک مدل عرضه و تقاضا به‌شکل زیر تصریح شده است:

تقاضا: $P_t = \alpha_1 + \alpha_2 Q_t + \alpha_3 Y_t + u_t$

عرضه: $Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 (P_{t-1} - P_{t-2}) + v_t$

P قیمت، Q مقدار و Y درآمد می‌باشد. سیستم معادلات VAR برای P و Q را به‌دست آورید، مرتبه آنها را مشخص نمایید و نشان دهید که ضرایب VAR در این معادلات یکسان می‌باشند.

۲۰-۲ در سؤال ۱-۲۰، اثر شوک یک واحدی به Y_t در زمان $t=0$ را بررسی نمایید.

۲۰-۳ با توجه به اطلاعات زیر توابع عکس‌العمل‌های آنی را در سیستم VAR محاسبه نمایید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

۲۰-۴ مدل VAR به‌صورت زیر تخمین زده شده است:

$$X_t = 0.3 + 0.7Y_{t-1} + 0.24X_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_t = -0.6 + 0.6Y_{t-1} + 0.52X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

با در نظر گرفتن فروض زیر، تابع عکس‌العمل آنی برای Y و X را برای شوک وارده از طریق ε_{1t} تا ۳ دوره به‌دست آورید:

$$Y_{10} = Y_{20} = 0$$

$$\varepsilon_{1t} = 0 \quad , \quad \varepsilon_{2t} = \begin{cases} \sigma_{y_1} & ; t = 1 \\ 0 & ; t \neq 1 \end{cases}$$

۲۰-۵ در مدل VAR ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ (ضرایب متغیرهای درون‌زا) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\theta_{m1} & -\theta_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

آیا این مدل، قابل شناسایی است؟ چرا؟

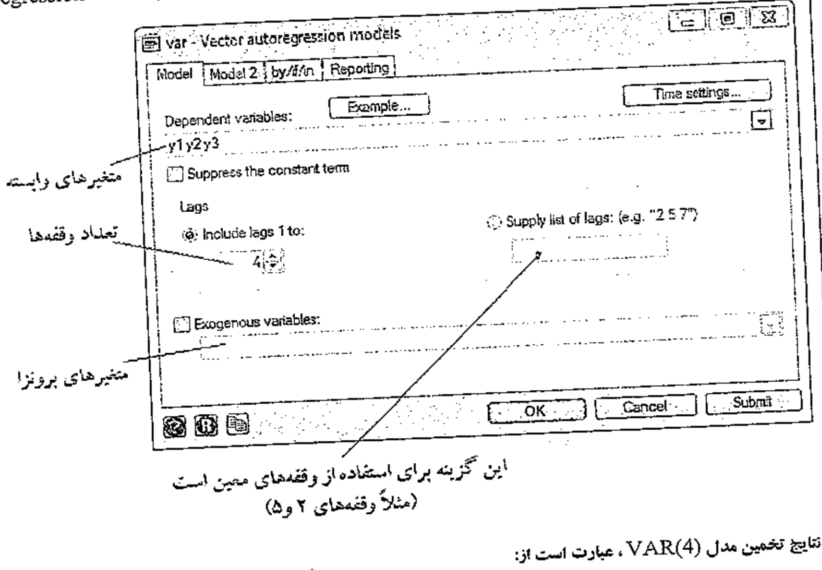
۲۰-۶ اگر در مدل VAR ساختاری، ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ (ضرایب متغیرهای درون‌زا) به‌صورت زیر باشد، این مدل چه ویژگی‌های خاصی پیدا می‌کند؟

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\theta_{m1} & -\theta_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

۲۰-۷ اگر در مدل VAR ساختاری، اجزاء خطا مستقل باشند، ثابت کنید که در مدل VAR حل‌شده (خلاصه‌شده) مستقل نخواهند بود.

۲۰-۸ شناسایی معادلات VAR به چه معنا است؟ چه لزومی به شناسایی در این معادلات هست؟

ضمیمه فصل ۱۸: مدل‌های VAR در Stata



```
. var y1 y2 y3, lags(1/4)

Vector autoregression

Sample:  1351q2 - 1372q4                     No. of obs     =         87
Log likelihood =  738.3532                   AIC            =  -16.07709
FPE            =  2.11e-11                   HQIC           =  -15.63197
Det(Sigma_ml)  =  8.53e-12                   SBIC           =  -14.97168

Equation           Parms      RMSE     R-sq      chi2     P>chi2
y1                   13     .043414   0.1950   21.0758    0.0493
y2                   13     .011582   0.1728   18.17632   0.1104
y3                   13     .009863   0.3108   39.23247   0.0001

             Coef.      Std. Err.      z     P>|z|     [95% Conf. Interval]
y1
    y1
    L1.   -.2678883    .1060192    -2.53    0.012    -.4756822   -.0600944
    L2.   -.0702268    .1115289    -0.63    0.529    -.2888195    .1483658
    L3.    .1621359    .1142205     1.42    0.156    -.0617322    .386004
    L4.    .3186898    .1088844     2.93    0.003     .1052802    .5320994
    y2
    L1.    .4098658    .4885278     0.84    0.401    -.547631    1.367363
    L2.   -.1649089    .5230266    -0.32    0.753    -1.190022    .8602045
    L3.    .0542716    .534154      0.10    0.919    -.9926509   1.101194
    L4.   -.2581446    .4977749    -0.52    0.604    -1.233765    .7174762
    y3
    L1.    .4213018    .5936494     0.71    0.478    -.7422296   1.584833
    L2.    .4410973    .6502952     0.68    0.498    -.8334578   1.715652
    L3.   -.0088658    .6019345    -0.01    0.988    -1.188636   1.170904
    L4.   -.5482837    .5345763    -1.03    0.305    -1.596034    .4994665
 _cons     .0071408    .0158518     0.45    0.652    -.0239281    .0382096
y2
—more—
```

جدول فوق برای y1 می‌باشد که تابعی از وقفه های ۱ تا ٤ خودش و سایر متغیرها است. اگر روی عبارت more کلیک کنید بقیه نتایج را برای y2 و y3 نشان می‌دهد.

همچنین می‌توان به‌اختصار از فرمان زیر استفاده نمود:

var y1 y2 y3, lags(1/4)

علاوه بر این، اگر بخواهیم از وقفه‌های معینی استفاده کنیم (مثلاً وقفه‌های ۲ و ۵) از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

var y1 y2 y3, lags(2 5)

از طرف دیگر برای محاسبه توابع عکس‌العمل تحریک بهتر است از گزینه Basic VAR استفاده کنیم. با انتخاب مسیر زیر، پنجره مربوطه باز می‌شود.

varbasic - Fit a simple VAR and graph IRFs

Main | if/in

Dependent variables: Example... Time settings...

y1 y2 — متغیرهای وابسته

Lags — Include lags 1 to: 3 — تعداد وقفه‌ها

Supply list of lags: (e.g. "1 3 8")

Graph: OIRFs — نمودار تابع عکس‌العمل تحریک متعامد; IRFs — نمودار تابع عکس‌العمل تحریک; FEVDs — نمودار تجزیه واریانس خطای پیش‌بینی چولسکی; No graph

Horizon for OIRFs, IRFs, and FEVDs: 10 Periods — تعداد دوره‌ها برای محاسبه عکس‌العمل تحریک

OK | Cancel | Submit

نتایج برای یک مدل دو متغیره با ۳ وقفه عبارت است از:

```
. varbasic y1 y2, lags(1/3) step(10)

Vector autoregression

Sample:  1920q4 - 1942q4                     No. of obs     =         89
Log likelihood =  432.3127                   AIC            =  -9.400286
FPE            =  2.84e-07                   HQIC           =  -9.242495
Det(Sigma_ml)  =  2.07e-07                   SBIC           =  -9.008815

Equation           Parms      RMSE     R-sq      chi2     P>chi2
y1                    7     .044388   0.1014   10.03838   0.1230
y2                    7      .0112    0.1421   14.74124   0.0224

             Coef.      Std. Err.      z     P>|z|     [95% Conf. Interval]
y1
    y1
    L1.   -.235579     .1061614    -2.22    0.026    -.4436515   -.0275065
    L2.   -.124015     .1096065    -1.13    0.258    -.3388398    .0908098
    L3.    .0353827    .1077492     0.33    0.743    -.1758018    .2465672

    y2
    L1.    .6823804    .4044972     1.69    0.092    -.1104195   1.47518
    L2.    .4489205    .4028978     1.11    0.265    -.3407448   1.238586
    L3.    .4402011    .4072521     1.08    0.280    -.3579983   1.2384

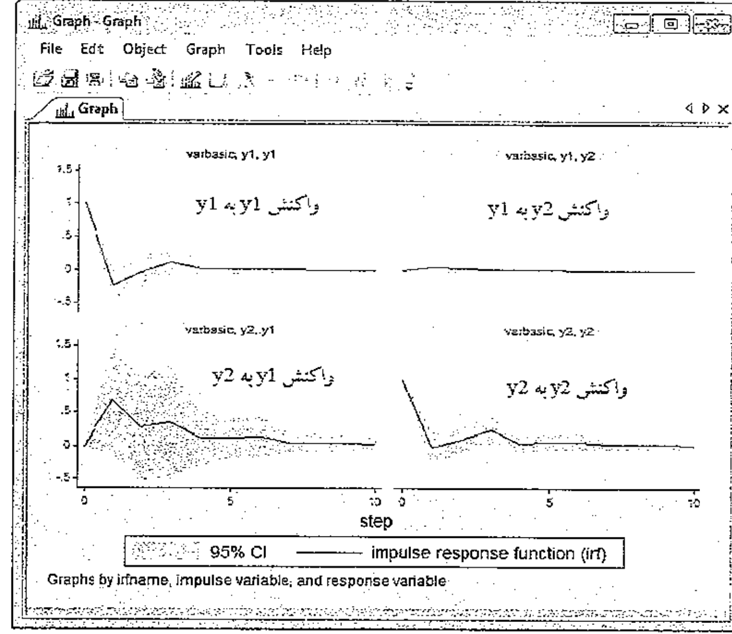
 _cons    -.0087045    .0131227    -0.66    0.507    -.0344244    .0170155
```

y2						
y1						
L1.	.0539901	.0267861	2.02	0.044	.0014902	.1064899
L2.	.0516659	.0276554	1.87	0.062	-.0025377	.1058695
L3.	.0210874	.0271868	0.78	0.438	-.0321977	.0743725
y2						
L1.	-.0185195	.1020609	-0.18	0.856	-.2185551	.1815161
L2.	.0645604	.1016573	0.64	0.525	-.1346843	.2638051
L3.	.1975898	.102756	1.92	0.054	-.0038081	.3989878
_cons	.0120494	.003311	3.64	0.000	.0055599	.018539

توابع واکنش

بدین منظور بعد از برآورد معادلات، می‌توان تابع عکس‌العمل را بر حسب جدول یا نمودار، با استفاده از فرمان‌های زیر به‌دست آورد:

irf table irf
irf graph irf



مقادیر عکس‌العمل تحریک در جدول زیر نشان داده شده است. چهار قسمت جدول زیر دقیقاً مشابه نمودار فوق می‌باشد. در این جدول، ستون irf مقادیر عکس‌العمل تحریک، ستون های Lower و Upper نیز به ترتیب حد پایین و بالا را نشان می‌دهد.

Results from varbasic

step	(1) irf	(1) Lower	(1) Upper	(2) irf	(2) Lower	(2) Upper
0	1	1	1	0	0	0
1	-.235579	-.443651	-.027507	.05399	.00149	.10649
2	-.031676	-.244137	.180785	.037947	-.014765	.090659
3	.122192	-.086559	.330943	.009989	-.042045	.062022
4	.014425	-.109399	.138249	.012926	-.014026	.039877
5	.010336	-.047442	.068114	.014327	-.005895	.03455
6	.020076	-.036145	.076297	.006423	-.012477	.025323
7	.011004	-.014413	.036421	.005282	-.005531	.016096
8	.008078	-.012921	.029078	.004997	-.00459	.014584
9	.006051	-.010899	.023001	.002946	-.004724	.010615
10	.00454	-.007052	.016133	.002288	-.003416	.007991

step	(3) irf	(3) Lower	(3) Upper	(4) irf	(4) Lower	(4) Upper
0	0	0	0	1	1	1
1	.68238	-.11042	1.47518	-.018519	-.218555	.181516
2	.275529	-.537777	1.08883	.101745	-.098325	.301815
3	.351782	-.469159	1.17272	.244642	.041347	.447936
4	.111564	-.288707	.511835	.045997	-.067388	.159382
5	.125841	-.167994	.419676	.065055	-.041833	.171942
6	.141698	-.153813	.43721	.07008	-.033654	.173814
7	.052233	-.081118	.185585	.028495	-.033434	.090425
8	.054117	-.073536	.18177	.029646	-.030047	.089338
9	.049658	-.066046	.165362	.023746	-.026949	.074442
10	.025495	-.045533	.096522	.013683	-.021955	.049321

```
95% lower and upper bounds reported
(1) irfname = varbasic, impulse = y1, and response = y1
(2) irfname = varbasic, impulse = y1, and response = y2
(3) irfname = varbasic, impulse = y2, and response = y1
(4) irfname = varbasic, impulse = y2, and response = y2
```

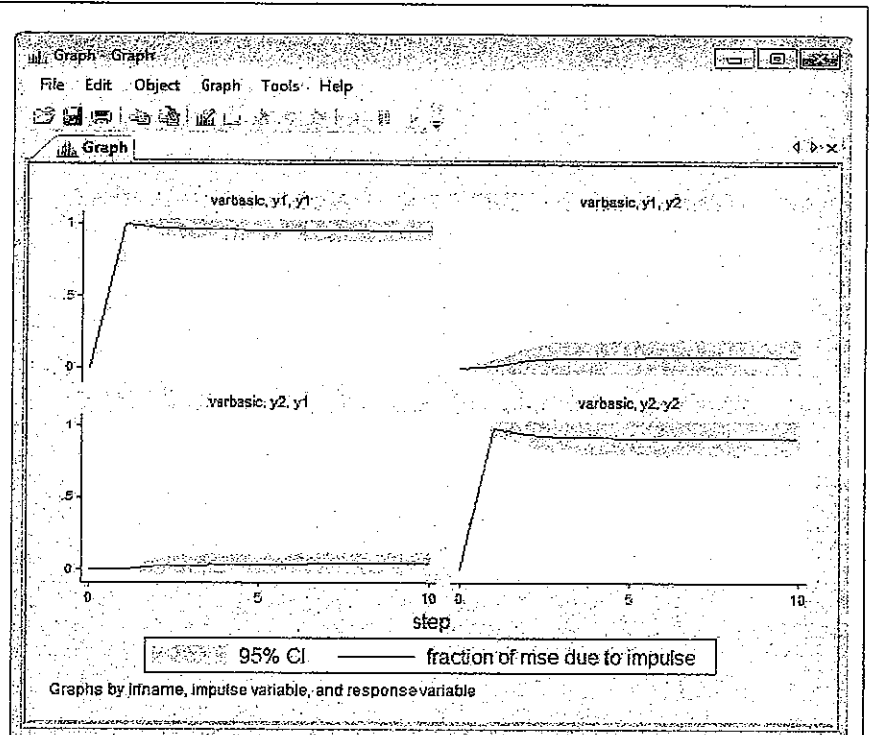
تجزیه واریانس

بدین منظور بعد از برآورد معادلات، می‌توان تجزیه واریانس را بر حسب جدول یا نمودار، با استفاده از فرمان‌های زیر به‌دست آورد:

irf table fevd

irf graph fevd

نمودارها و جداول تجزیه واریانس نیز مشابه با توابع عکس‌العمل تحریک می‌باشد.



Results from varbasic

step	(1) fevd	(1) Lower	(1) Upper	(2) fevd	(2) Lower	(2) Upper
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	.013443	-.034086	.060972
2	.972813	.910394	1.03523	.055793	-.036144	.14773
3	.968537	.907625	1.02945	.078228	-.030197	.186654
4	.962232	.898667	1.0258	.077912	-.031407	.18723
5	.961563	.896317	1.02681	.080334	-.032003	.192671
6	.960707	.894347	1.02707	.083328	-.033489	.200145
7	.959637	.891208	1.02807	.083869	-.034356	.202034
8	.959495	.890604	1.02839	.084273	-.034705	.203251
9	.959339	.890091	1.02859	.084634	-.035054	.204322
10	.959208	.889613	1.0288	.084757	-.035254	.204767

step	(3) fevd	(3) Lower	(3) Upper	(4) fevd	(4) Lower	(4) Upper
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	.986557	.939028	1.03409
2	.027187	-.035233	.089606	.944207	.85227	1.03614
3	.031463	-.029448	.092375	.921772	.813346	1.0302
4	.037768	-.025796	.101333	.922088	.81277	1.03141
5	.038437	-.026809	.103683	.919666	.807329	1.032
6	.039293	-.027068	.105653	.916672	.799855	1.03349
7	.040363	-.028067	.108792	.916131	.797906	1.03436
8	.040505	-.028366	.109396	.915727	.796749	1.03471
9	.040661	-.028588	.109909	.915366	.795678	1.03505
10	.040792	-.028803	.110387	.915243	.795233	1.03525

```
95% lower and upper bounds reported
(1) irfname = varbasic, impulse = y1, and response = y1
(2) irfname = varbasic, impulse = y1, and response = y2
(3) irfname = varbasic, impulse = y2, and response = y1
(4) irfname = varbasic, impulse = y2, and response = y2
```

فصل بیست و یکم

مدل‌های تصحیح خطای برداری (VECM)[1]

۲۱-۱ مقدمه

در فصل سیزدهم و چهاردهم سری‌های زمانی یک متغیره و در فصل بیستم سری‌های زمانی چند متغیره را بررسی کردیم. یکی از انواع مدل‌های سری زمانی یک متغیره، مدل خودرگرسیون (AR) و دیگری مدل خودرگرسیون برداری (VAR) است. این مدل‌ها را در حالتی که سری‌های زمانی، مانا باشند بررسی و تحلیل کردیم. در فصل چهاردهم دیدیم که در صورت نامانایی سری‌های زمانی، بحثی تحت عنوان هم‌انباشتگی مطرح گردید. هم‌انباشتگی بیانگر رابطه تعادلی وبلندمدت بین سری‌های زمانی است. مشابه آنچه که در فصل چهاردهم برای سری‌های زمانی یک متغیره بررسی شد، در این فصل مباحث مربوط به نامانایی، هم‌انباشتگی و مدل‌های تصحیح خطای برداری را برای سری‌های زمانی چند متغیره بررسی می‌کنیم.

۲۱-۲ نامانایی و هم‌انباشتگی در مدل‌های VAR

در فصل چهاردهم دیدیم که وقتی متغیرها نامانا باشند، ممکن است بین آنها یک رابطه تعادلی یا بلندمدت وجود داشته باشد که موسوم به رابطه هم‌انباشتگی است. در چنین حالتی، یک ترکیب خطی مانا از متغیرها به‌دست می‌آید که این ترکیب، مانا بوده که همان رابطه تعادلی یا هم‌انباشتگی است. هم‌انباشتگی راه‌حلی برای مشکل نامانایی است که رابطهٔ بلندمدت را بین متغیرها توصیف می‌کند.

1- vector-autoregressive error correctin model

بدین منظور دو فرایند Y و X را در نظر بگیرید که دارای ریشه واحد هستند که به آنها $I(1)$ می‌گوییم. حال اگر $Y_t - \beta X_t = \varepsilon_t$ مانا، یعنی $I(0)$ باشد، X و Y را هم‌انباشته می‌گویند. از طرف دیگر توجه داریم که اگر دو متغیر X و Y نامانا باشند، در این صورت توسط فرآیندهای مستقل u_t و v_t ایجاد می‌شوند که به‌صورت گام تصادفی می‌باشند:

$$X_t = X_{t-1} + u_t \quad و \quad Y_t = Y_{t-1} + v_t \quad و \quad \text{cov}(u_t, v_t) = 0 \tag{۲۱-۱}$$

از آنجا که X و Y هیچ رابطه‌ای ندارند لذا بایستی رگرسیون زیر معنادار نباشد:

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t \tag{۲۱-۲}$$

در جامعه آماری بایستی $\beta = 0$ باشد، زیرا X و Y مستقل‌اند. با وجود این، براساس داده‌های نمونه، چنین نیست و معمولاً R^2 نسبتاً بالایی به‌دست می‌آید و این یک رگرسیون کاذب است.

حال بحث را برای مدل VAR(1) با دو متغیر، ادامه می‌دهیم. فرض کنید که این مدل به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{۲۱-۳}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/5 & -1 \\ -0/25 & 0/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ مانا و بدون خودهمبستگی است.

اگر مقادیر ویژهٔ $\mathbf{A}_1$ کوچکتر از ۱ باشند، VAR(1) مانا و در غیر این صورت، نامانا است:

$$|\mathbf{A}_1 - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0/5 - \lambda & -1 \\ -0/25 & 0/5 - \lambda \end{vmatrix} = (0/5 - \lambda)^2 - 0/25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0$$

چون یکی از مقادیر ویژه برابر ۱ است، لذا مدل (۳-۲۱) دارای ریشه واحد است و نامانا است. متناسب با $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 0$ دو بردار ویژهٔ $\mathbf{c}_1$ و $\mathbf{c}_2$ وجود دارد که از آنها، ماتریس $\mathbf{C}$ را تشکیل می‌دهیم.[1] از آنجا که رابطه $\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}^{-1}\lambda\mathbf{C}$ برقرار است، خواهیم داشت:

۱- بردارهای ویژه عبارتند از: $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0/5 \end{bmatrix}$ و $\lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

بنابراین، ماتریس $\mathbf{C}$ عبارت است از: $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0/5 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0/5 & -1 \\ 0/25 & 0/5 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{C}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_{t-1}) + \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{۲۱-۴}$$

از تبدیل $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t$، $\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{w}_t$ و $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{C} = \lambda$ استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{z}_t = \lambda \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{w}_t \tag{۲۱-۵}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

Z_{1t} و Z_{2t} عبارتند از:

$$Z_{1t} = Z_{1t-1} + w_{1t} \tag{۲۱-۶}$$

$$Z_{2t} = w_{2t}$$

چون w_{1t} و w_{2t} ترکیب خطی از فرایندهای مانا (یعنی ε_{1t} و ε_{2t}) هستند، لذا مانا می‌باشند. بنابراین، Z_{2t} نیز مانا است. از طرف دیگر چون Z_{1t} دارای ریشه واحد است (گام تصادفی)، مانا نمی‌باشد و I(1) است.

حال به Y_t برمی‌گردیم. بدین منظور، طرفین (۵-۲۱) را در $\mathbf{C}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{C}\mathbf{z}_t = \mathbf{C}\lambda \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{C}\mathbf{w}_t \tag{۲۱-۷}$$

با توجه به اینکه $\mathbf{C}\mathbf{z}_t = \mathbf{y}_t$ و $\mathbf{C}\mathbf{w}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t$ است، خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\lambda \mathbf{z}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{۲۱-۸}$$

$\mathbf{C}\lambda$ عبارت است از:

$$\mathbf{C}\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -0/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0/5 & 0 \end{bmatrix} \tag{۲۱-۹}$$

با جایگذاری در (۸-۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

و یا

$$Y_{1t} = Z_{1t-1} + \varepsilon_{1t} \tag{۲۱-۱۰}$$

$$Y_{2t} = -0/5 Z_{1t-1} + \varepsilon_{2t}$$

چون Z_{1t} نامانا است، لذا هم Y_{1t} و هم Y_{2t} نامانا هستند. Z_{1t} را اصطلاحاً روند مشترک[1] می‌گویند که جزء نامانای Y_{1t} و Y_{2t} را تشکیل می‌دهد.[2]

حال اگر Z_{1t-1} را از سیستم معادلات (۱۰-۲۱) حذف کنیم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید (دومی را در ۲ ضرب کرده و با اولی جمع می‌کنیم):

$$Y_{1t}+2Y_{2t}=\varepsilon_{1t}+2\varepsilon_{2t}$$

و یا آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{1t}\\ Y_{2t}\end{bmatrix}=\eta_t \qquad و \qquad \eta_t=\varepsilon_{1t}+2\varepsilon_{2t}$$

$\eta_t=\varepsilon_{1t}+2\varepsilon_{2t}$ یک فرایند مانا است، زیرا ε_{1t} و ε_{2t} مانا هستند. بنابراین، ترکیبی از Y_{1t} و Y_{2t} به‌دست آورده‌ایم که مانا است. این رابطه خطیِ مانا بین Y_{1t} و Y_{2t} معروف به «رابطه هم‌انباشتگی» است که آن را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\beta' y_t=\eta_t \qquad و \qquad \beta'=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$$

بردار β نیز معروف به «بردار هم‌انباشته‌کننده» است که در ادامه راجع‌به آن بحث خواهیم کرد.

VAR(1) هم‌انباشته

حال به مدل VAR(1) بازمی‌گردیم:

$$y_t=A_1 y_{t-1}+\varepsilon_t$$

با کم کردن y_{t-1} از طرفین، خواهیم داشت:

$$y_t-y_{t-1}=A_1 y_{t-1}-I y_{t-1}+\varepsilon_t \qquad (21\text{-}11)$$

$$\Delta y_t=(A_1-I)y_{t-1}+\varepsilon_t$$

$$\Delta y_t=\Pi y_{t-1}+\varepsilon_t \quad ; \quad \Pi=A_1-I$$

1- common trend

۲- توجه شود چون $Z_{1t}=Z_{1t-1}+w_{1t}$ است دارای ریشه واحد است، با فرض $w_{1t}=0$، آنگاه $Z_{1t}=at$ خواهد بود که روند مشترک Y_{1t} و Y_{2t} را تشکیل می‌دهد.

اگر VAR(1) را که به‌صورت (۳-۲۱) معرفی شد، در نظر بگیریم، رتبه ماتریس Π برابر ۱ است، زیرا دترمینان آن صفر می‌باشد:

$$|\Pi|=|A_1-I|=\begin{vmatrix}-0/5 & -1\\ -0/25 & -0/5\end{vmatrix}=0$$

اگر $|\Pi|$ را با دترمینان $|A-\lambda I|$ مقایسه کنیم ملاحظه می‌شود که اگر $\lambda=1$ باشد، آنگاه این دو دترمینان برابرند. بنابراین اگر $|\Pi|=0$ باشد بیانگر آن است که ریشه واحد وجود دارد و متغیرها نامانا هستند. نتیجه آنکه ماتریس Π دارای مرتبه کامل نیست و مرتبه آن برابر با r است که $r<m$ می‌باشد.

از طرف دیگر می‌توان ماتریس Π را به‌صورت زیر نوشت:

$$\Pi=\alpha\beta'$$

در این مثال، Π یک ماتریس ۲×۲ و α و β بردارهای ستونی ۲×۱ هستند:

$$\Pi=\alpha\beta'\Rightarrow\begin{bmatrix}-0/5 & -1\\ -0/25 & -0/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0/5\\ -0/25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}-0/5\\ -0/25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix} \qquad (21\text{-}12)$$

با جایگذاری در (۱۲-۲۱) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\Delta Y_{1t}\\ \Delta Y_{2t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0/5\\ -0/25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{1t-1}\\ Y_{2t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\end{bmatrix} \qquad (21\text{-}13)$$

و یا

$$\Delta Y_{1t}=-0/5(Y_{1t-1}+2Y_{2t-1})+\varepsilon_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t}=-0/25(Y_{1t-1}+2Y_{2t-1})+\varepsilon_{2t}$$

عبارت $Y_{1t-1}+2Y_{2t-1}$ در هر دو معادله ظاهر می‌شود. از آنجا که متغیرهای سمت چپ و جملات خطا در سمت راست، مانا هستند، لذا این ترکیب خطی نیز مانا خواهد بود. این ترکیب خطی را «رابطه هم‌انباشتگی» و بردار $\beta'=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}$ را بردار هم‌انباشتگی می‌گویند. رابطه تعادلی متغیرها در مدل‌های VAR را می‌توان براساس مدل تصحیح خطای برداری بررسی نمود که در اینجا به آن می‌پردازیم.

بردار α نیز معروف به بردار تعدیل می‌باشد که بیانگر میزان واکنش متغیرها به عدم تعادل‌های دوره قبلی است. به‌عنوان مثال اگر در دوره قبلی عدم تعادل برابر با ۲ باشد آنگاه $Y_{1t-1} + 2Y_{2t-1} = 2$ که به‌دنبال آن $\Delta Y_{1t} = -0/5(2) = -1$ خواهد بود. این بدان معنا است که در دوره t مقدار Y_{1t} به اندازه ۱ واحد کاهش می‌یابد تا به سمت مقدار تعادلی خود حرکت کند. لذا Y_{1t} با ضریب ۰/۵ به عدم تعادل‌های دوره قبلی واکنش نشان می‌دهد. بدیهی است که وقتی تعادل برقرار شود، آنگاه $Y_{1t-1} + 2Y_{2t-1} = 0$ خواهد بود و در نتیجه، هیچ واکنشی از سوی متغیرها مشاهده نخواهد شد و تغییرات آنها برابر صفر می‌باشد. مگر آنکه شوک جدیدی از طریق ε_{1t} و ε_{2t} وارد شود و موجب عدم تعادل گردد.

۲۱-۳ هم‌انباشتگی و مدل تصحیح خطای برداری (VECM)[1]

در بخش قبلی بحث شد که اگر در مدل VAR متغیرها نامانا باشند، امکان وجود رابطه تعادلی (هم‌انباشتگی) بین آنها وجود دارد. در این بخش ابتدا نشان می‌دهیم که در صورت وجود رابطه تعادلی، می‌توان برای هر مدل VAR یک مدل تصحیح خطای برداری را ارائه نمود. سپس راجع به هم‌انباشتگی بین متغیرها می‌پردازیم. این بحث را علاوه بر حالت کلی، برای مدل VAR(1) نیز بررسی می‌کنیم که همراه با مثال‌های آن می‌تواند به روشن شدن مطلب کمک نماید.

مدل VAR(p) را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^{p} \mathbf{A}_j \mathbf{y}_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (21-14)$$

برای مدل فوق، می‌توان یک مدل تصحیح خطای برداری(VECM) را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{A}_j^* \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (21-15)$$

$$\mathbf{A}_j^* = -\sum_{k=j+1}^{p} \mathbf{A}_k \quad j = 1, 2, \ldots, p-1$$

$$\mathbf{\Pi} = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \ldots + \mathbf{A}_p) - \mathbf{I}$$

1- vector error correction model

مثال ۲۱-۱: مدل VAR(1) را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

برای به‌دست آوردن مدل VECM از طرفین معادله فوق $\mathbf{y}_{t-1}$ را کسر می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

با مرتب‌سازی آن، خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \;,\; \boldsymbol{\pi} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$$

مثال ۲۱-۲: مدل VAR(2) را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \varepsilon_t$$

ابتدا $\mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-1}$ را به سمت راست، اضافه و کم می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{A}_2(\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{y}_{t-2}) + \varepsilon_t$$
$$= \mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \;;\; \Delta \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{y}_{t-2}$$

حال $\mathbf{y}_{t-1}$ را از طرفین کم می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

نتیجهٔ فوق را مرتب می‌کنیم:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{I})\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{A}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$= \mathbf{A}_0 + \mathbf{\Pi} \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2^* \Delta \mathbf{y}_{t-1}$$

که $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 - \mathbf{I}$ و $\mathbf{A}_2^* = -\mathbf{A}_2$ می‌باشد.

مثال ۲۱-۳: مدل VAR(4) به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{A}_3 \mathbf{y}_{t-3} + A_4 \mathbf{y}_{t-4} + \varepsilon_t$$

مدل تصحیح خطای برداری (VECM) را برای مدل فوق به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:

۱- $\mathbf{A}_4 \mathbf{y}_{t-3}$ را به سمت راست اضافه و کم می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y}_{t-2} + (\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\mathbf{y}_{t-3} - A_4 \Delta \mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_t$$

۲- عبارت $(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\mathbf{y}_{t-2}$ را به سمت راست اضافه و کم می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\mathbf{y}_{t-2}$$
$$-(\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\Delta \mathbf{y}_{t-2} - \mathbf{A}_4 \Delta \mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_t$$

۳- عبارت $(\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\mathbf{y}_{t-1}$ را به سمت راست اضافه و کم می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_t = (\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\mathbf{y}_{t-1} - (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\Delta\mathbf{y}_{t-1}$$
$$- (\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\Delta\mathbf{y}_{t-2} - \mathbf{A}_4\Delta\mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_t$$

۴- عبارت $\mathbf{y}_{t-1}$ را از سمت راست و چپ کم می‌کنیم:

$$\Delta\mathbf{y}_t = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4)\mathbf{y}_{t-1} - (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\Delta\mathbf{y}_{t-1}$$
$$- (\mathbf{A}_3 + \mathbf{A}_4)\Delta\mathbf{y}_{t-2} - \mathbf{A}_4\Delta\mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_t$$

و یا

$$\Delta\mathbf{y}_t = -\sum_{j=1}^{4}(\mathbf{I} - \mathbf{A}_j)\mathbf{y}_{t-1} - \sum_{j=2}^{4}\mathbf{A}_j\Delta\mathbf{y}_{t-1}$$
$$- \sum_{j=3}^{4}\mathbf{A}_j\Delta\mathbf{y}_{t-2} - \sum_{j=4}^{4}\mathbf{A}_j\Delta\mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_t$$
$$= \mathbf{\Pi}Y_{t-1} + \mathbf{A}_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2^*\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{A}_3^*\Delta\mathbf{y}_{t-3} + \varepsilon_t$$

مثال ۷-۲۱: مدل VAR(۱) به‌صورت زیر مفروض است:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$

VECM عبارت است از:

$$\mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1} = -\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta\mathbf{y}_t = -(\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \;,\quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{I}$$

در هر مدل تصحیح خطا، $\mathbf{A}_j^*$ها اثرات (تغییرات) کوتاه‌مدت را نشان می‌دهد. در حالی که $\mathbf{\Pi}$ بیانگر رابطه بلندمدت یا رابطه هم‌انباشتگی است. بنابراین برای یافتن روابط هم‌انباشتگی (روابط تعادلی) بایستی ماهیت ماتریس $\mathbf{\Pi}$ را بررسی کنیم.

در مدل VAR(۱) که به‌صورت (۳-۲۱) معرفی شد، دیدیم که وقتی متغیرها نامانا هستند، یک ریشه واحد وجود دارد. علی‌رغم وجود ریشهٔ واحد، یک ترکیب خطی به‌صورت $Y_{1t} + 2Y_{2t}$ یا $[1 \;\; 2]\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}$ به‌دست آمد که مانا بود. این رابطهٔ خطی در حالت کلی به‌صورت $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_t$ می‌باشد و بیانگر یک یا چند رابطه تعادلی یا هم‌انباشتگی بین متغیرها است. بنابراین اگر مدل VAR یا مدل VECM دارای ریشه واحد باشد ممکن است متضمن یک یا چند رابطه تعادلی بین متغیرها باشد که ضرایب این رابطه توسط ماتریس $\boldsymbol{\beta}$ توصیف می‌شود. لذا هر ستون از ماتریس $\boldsymbol{\beta}$ (یا هر سطر از ماتریس $\boldsymbol{\beta}'$) یک رابطه تعادلی یا هم‌انباشتگی را بین متغیرها توصیف می‌کند. بنابراین در اینجا

ممکن است یک مدل شامل یک یا چند بردار هم‌انباشتگی باشد و یا ممکن است بین متغیرها هیچ رابطه تعادلی وجود نداشته باشد که در این صورت هیچ بردار هم‌انباشتگی نیز به‌دست نخواهد آمد.

توجه شود که در مدل VECM که به‌صورت (۱۵-۲۱) تعریف شده است، $\Delta\mathbf{y}_t$ و $\Delta\mathbf{y}_{t-j}$ها مانا (یعنی $I(0)$) هستند. در حالی که $\mathbf{y}_{t-1}$ نامانا و I(۱) است. لذا برای آنکه VECM مانا باشد بایستی ماتریس $\mathbf{\Pi}$ شامل بردارهای هم‌انباشتگی باشد که با ضرب آن در $\mathbf{y}_{t-1}$ این عبارت (یعنی $\mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}$) نیز مانا شود. می‌توان $\mathbf{\Pi}$ را به‌صورت $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta}'$ تعریف نمود که $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ ماتریس‌های $m \times r$ هستند. دلیل آنکه $\mathbf{\Pi}$ را به‌صورت $\boldsymbol{\alpha\beta}'$ تعریف می‌کنیم آن است که الزاماً مرتبه $\mathbf{\Pi}$ کامل نیست. اگر مرتبه $\mathbf{\Pi}$ برابر r باشد، در این صورت فقط r بردار مستقل در ماتریس $\mathbf{\Pi}$ وجود خواهد داشت که رابطه تعادلی بین Y_{it}ها را نشان می‌دهد.

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} = \boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{y}_{t-1} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}) \qquad (۱۶-۲۱)$$

$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}$ یک بردار $r \times 1$ است:

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_{r1} & \beta_{r2} & \cdots & \beta_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ \vdots \\ Y_{mt-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11}Y_{1t-1} + \beta_{12}Y_{2t-1} + \beta_{1m}Y_{mt-1} \\ \beta_{21}Y_{1t-1} + \beta_{22}Y_{2t-1} + \beta_{2m}Y_{mt-1} \\ \vdots \\ \beta_{r1}Y_{1t-1} + \beta_{r2}Y_{2t-1} + \beta_{rm}Y_{mt-1} \end{bmatrix}$$

بنابراین r ترکیب خطی مانا یا r رابطه تعادلی (رابطه هم‌انباشتگی) بین $\mathbf{y}_{it}$ها وجود دارد که هر یک از این روابط تعادلی متناسب با یکی از ستونهای ماتریس $\boldsymbol{\beta}$ است. لذا هر ستون ماتریس $\boldsymbol{\beta}$ را یک بردار هم‌انباشتگی می‌گویند. تعداد بردارهای هم‌انباشتگی بستگی به ماتریس $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta}'$ دارد که آن نیز بستگی به مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ دارد.

به‌طور کلی $\boldsymbol{\alpha}$ وزنی است که به جملهٔ تصحیح خطا داده می‌شود که بیانگر سرعت تعدیل است. هر چه $\boldsymbol{\alpha}$ بزرگتر باشد، واکنش یک متغیر خاص به انحراف از تعادل بلندمدت، بیشتر می‌باشد. برای مثال اگر $\boldsymbol{\alpha} = 0$ باشد نشان می‌دهد که متغیر موردنظر هیچ واکنشی به انحراف از تعادل بلندمدت نشان نمی‌دهد، به عبارت دیگر تحت تأثیر انحراف از تعادل بلندمدت قرار نمی‌گیرد.

برای مدل فوق، سه حالت وجود دارد:

۱- اگر مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ صفر باشد $(r=0)$، در این صورت $\mathbf{\Pi}=\mathbf{0}$ است و لذا مدل VECM به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{A}_j^* \Delta \mathbf{y}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (۲۱-۱۷)$$

در این مدل، همهٔ متغیرها $I(1)$ هستند و لذا تفاضل مرتبه اول آنها مانا است. بنابراین هیچ رابطه تعادلی و به عبارت دیگر هیچ بردار هم‌انباشتگی وجود نخواهد داشت. در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathbf{\Pi}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' \Rightarrow \mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mr} \end{bmatrix}_{m\times r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r\times m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

چون $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$ است بنابراین اولاً هیچ رابطه تعادلی بین Y_{it}ها وجود ندارد و ثانیاً طبق فرض، همه Y_{it}ها $I(1)$ هستند. لذا برای مانا نمودن آنها بایستی از تفاضل مرتبه اول استفاده نمود.

۲- اگر مرتبه $\mathbf{\Pi}$ کامل باشد $(r=m)$، در این صورت همهٔ متغیرها مانا هستند و نیازی به استفاده از مدل VECM نیست. لذا رابطه بین متغیرها توسط مدل VAR توصیف می‌شود و می‌توان بدون نگرانی از رگرسیون کاذب، مدل VAR را برآورد نمود.

۳- اگر مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ کوچکتر از m باشد $(0<r<m)$، در این صورت می‌توان $\mathbf{\Pi}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ را تعریف نمود. همان‌طور که اشاره شد، هر ستون $\boldsymbol{\beta}$ بیانگر یک بردار هم‌انباشتگی است. در این حالت بایستی از مدل VECM استفاده نمود. این مدل وقتی استفاده می‌شود که اولاً متغیرها دارای ریشه واحد باشند و ثانیاً حداقل یک رابطه تعادلی (یک بردار هم‌انباشتگی) بین آنها وجود داشته باشد. در این حالت خواهیم داشت:

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1})$$

$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}$ رابطه بلندمدت بین $\mathbf{y}_{it}$ها است. اما توجه داریم که این رابطه در دوره $t-1$ الزاماً به‌طور کامل برقرار نیست و مقداری از تعادل انحراف دارد. در تعادل، شرط $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}^*=\mathbf{0}$ برقرار است، اما در دوره $t-1$ الزاماً این شرط به‌طور کامل برقرار نخواهد شد و مقداری از تعادل انحراف دارد. لذا می‌توان آن را به‌صورت $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}=\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$ نوشت که $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}\neq\mathbf{0}$ است. حال ضرایب تعدیل ($\boldsymbol{\alpha}$) را در خطاهای دورهٔ گذشته (یعنی $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$ که معادل با $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}$ است) ضرب می‌کنیم تا موجب تعدیل خطا (عدم تعادل) در دوره t شود (که $\Delta\mathbf{y}_t$ را تعیین می‌کند) به‌گونه‌ای که Yها در جهت «تصحیح» حرکت کنند تا سیستم به تعادل بازگردد. بنابراین، ستونهای ماتریس $\boldsymbol{\beta}$ بردارهای هم‌انباشتگی و سطرهای ماتریس $\boldsymbol{\alpha}$ ضرایب تعدیل را نشان می‌دهند.[1]

مثال ۴-۲۱: مدل $VAR(1)$ دو متغیره را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

مدل VECM عبارت است از:

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -0.25 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -1 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{\Pi}$ یک ماتریس 2×2 است که مرتبه آن $0\le r\le 2$ است. برای تعیین مرتبه آن ابتدا دترمینان $\mathbf{\Pi}$ را حساب می‌کنیم:

$$|\mathbf{\Pi}| = \begin{vmatrix} -0.5 & -1 \\ -0.25 & -0.5 \end{vmatrix} = 0$$

بنابراین، $r=1$ و یا $r=0$ است. بدیهی است که $r=0$ وقتی برقرار است که تمام عناصر ماتریس $\mathbf{\Pi}$ صفر باشد. بنابراین در اینجا $r=1$ می‌باشد. با توجه به $r=1$ می‌توان گفت که یک بردار هم‌انباشتگی بین Y_{1t} و Y_{2t} وجود دارد که عبارت است از:

۱- این بحث مشابه مدل تصحیح خطا در حالت تک‌معادله‌ای است که در فصل چهاردهم بررسی شد. شکل کلی این مدل به صورت زیر است که بردار هم‌انباشتگی برابر با $\boldsymbol{\beta}'=[1 \quad \beta_1]$ و ضریب تعدیل برابر با α است:

$$\Delta Y_t = \alpha(Y_{t-1} - \beta_1 X_{t-1}) + a_1\Delta X_t = \alpha[1 \quad -\beta_1]\begin{bmatrix} Y_{t-1} \\ X_{t-1} \end{bmatrix} + a_1\Delta X_t$$

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' \Rightarrow \begin{bmatrix} -0/5 & -1 \\ -0/25 & -0/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0/5 \\ -0/25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -0/5 \\ -0/25 \end{bmatrix} [1 \quad 2]$$

بنابراین بردار هم‌انباشتگی به‌صورت $\boldsymbol{\beta}' = [1 \quad 2]$ و رابطه هم‌انباشتگی عبارت است از:

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} = Y_{1t-1} + 2Y_{2t-1}$$

مثال ۵-۲۱: مدل VAR(۳) با ۳ متغیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{A}_3\mathbf{y}_{t-3} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

VECM عبارت است از:

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2^*\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{11} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_j^* = -\sum_{k=j+1}^{p}\mathbf{A}_k \Rightarrow \mathbf{A}_1^* = -\sum_{k=1+1}^{3}\mathbf{A}_k = -\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3 \quad , \quad \mathbf{A}_2^* = -\sum_{k=2+1}^{3}\mathbf{A}_k = -\mathbf{A}_3$$

برای بررسی وضعیت هم‌انباشتگی و تعیین تعداد بردارهای هم‌انباشتگی، مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ را بررسی می‌کنیم. چهار حالت وجود دارد:

۱- اگر $r = 0$ باشد، در این صورت $\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}$ است و هیچ رابطه هم‌انباشتگی (تعادلی) بین متغیرها وجود ندارد. بدلیل نامانا بودن Y_{1t} ، Y_{2t} و Y_{3t} و عدم وجود رابطه تعادلی بین آنها، بایستی از تفاضل مرتبه اول آنها استفاده نمود. بنابراین با توجه به $\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}$ ، مدل زیر را خواهیم داشت:

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2^*\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

۲- اگر $r = 1$ باشد، در این صورت فقط یک بردار هم‌انباشتگی بین Y_{it} ها وجود دارد. در این صورت اگر حاصل‌ضرب $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$ را حساب کنیم ماتریس $\mathbf{\Pi}$ به‌دست می‌آید که در آن فقط یک سطر مستقل وجود دارد. هر یک از سطرها یا ستونها، ضریبی از دیگری است:

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} [\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13}]$$

در اینجا رابطه هم‌انباشتگی بین Y_{it} ها عبارت است از:

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1} = [\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13}] \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \end{bmatrix} = \beta_{11}Y_{1t-1} + \beta_{12}Y_{2t-1} + \beta_{13}Y_{3t-1}$$

در این حالت مدل VECM را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2^*\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$\Delta\mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} [\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \beta_{13}] \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-2} \\ Y_{3t-2} \end{bmatrix} + (-\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_3)\Delta\mathbf{y}_{t-1} - \mathbf{A}_3\Delta\mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

به‌عنوان نمونه، معادله اول از این سه معادله، عبارت است از:

$$\Delta Y_{1t} = \alpha_{11}(\beta_{11}Y_{1t-1} + \beta_{12}Y_{2t-1} + \beta_{13}Y_{3t-1}) + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_{1t}$$

عبارت داخل پرانتز بیانگر رابطه تعادلی بین این ۳ متغیر است که طبق آن، این ۳ متغیر در بلندمدت براساس ضرایب β_{11} ، β_{12} و β_{13} با هم در ارتباط هستند. سرعت تعدیل به سمت تعادل با ضریب α_{11} مشخص شده است. بقیه جملات نیز بیانگر تغییرات کوتاه‌مدت است که رابطه بین تغییرات متغیرها را توصیف می‌کند.

۳- اگر $r = 2$ باشد، در این صورت دو بردار هم‌انباشتگی بین Y_{it} ها وجود دارد:

$$\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \end{bmatrix}$$

اگر این ضرایب را در معادله VECM قرار دهیم، معادله اول آن برای ΔY_{1t} عبارت است از:

$$\Delta Y_{1t} = \alpha_{11}(\beta_{11}Y_{1t-1} + \beta_{12}Y_{2t-1} + \beta_{13}Y_{3t-1})$$
$$+ \alpha_{12}(\beta_{21}Y_{1t-1} + \beta_{22}Y_{2t-1} + \beta_{23}Y_{3t-1}) + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_{1t}$$

جملات داخل پرانتز بیانگر دو رابطه تعادلی بین متغیرها است. هر یک از این دو رابطه، مانا هستند. ضرایب α_{11} و α_{12} وزن‌هایی هستند که به این دو رابطه تعادلی داده می‌شود. این ضرایب نشان می‌دهد که هر رابطه تعادلی در دوره قبل با چه سرعتی تعدیل می‌شود.

۴- اگر $r = 3$ باشد، در این صورت مرتبه $\mathbf{\Pi}$ کامل است. در این حالت، همهٔ متغیرها I(۰) هستند و نیازی به مدل VECM نیست، بلکه می‌توان مدل VAR(۳) را برآورد نمود. چون همهٔ متغیرها، مانا هستند لذا مسئله رگرسیون کاذب نیز وجود نخواهد داشت.

مثال ۶-۲۱: مدل VAR(۲) با چهار متغیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{t-2} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

مدل VECM عبارت است از:

$$\Delta\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{A}_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

فرض کنید که فقط دو بردار هم‌انباشتگی وجود داشته باشد که عبارتند از:

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم $\mathbf{\Pi}$ به‌گونه‌ای باشد که شرایط مدل فوق را تأمین نماید. زیرا در ورای این مدل یک تئوری وجود دارد که این شرایط را تعیین می‌کند. بدین منظور تصور کنید که ماتریس $\mathbf{\Pi}$ به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \pi_{11} & -\pi_{11} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{33} & -\pi_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{12}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{32} & -\alpha_{32}b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \\ \Delta Y_{4t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1.}^* \\ a_{2.}^* \\ a_{3.}^* \\ a_{4.}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \\ Y_{4t-1} \end{bmatrix} + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_t$$

$$\Delta Y_{1t} = a_{1.}^* + \alpha_{11}(Y_{1t-1} - Y_{2t-1}) + \alpha_{12}(Y_{3t-1} - bY_{4t-1}) + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_{1t}$$

$$\Delta Y_{2t} = a_{2.}^* + \alpha_{21}(Y_{1t-1} - Y_{2t-1}) + \alpha_{22}(Y_{3t-1} - bY_{4t-1}) + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_{2t}$$

$$\Delta Y_{3t} = a_{3.}^* + \alpha_{31}(Y_{1t-1} - Y_{2t-1}) + \alpha_{32}(Y_{3t-1} - bY_{4t-1}) + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_{3t}$$

$$\Delta Y_{4t} = a_{4.}^* + \alpha_{41}(Y_{1t-1} - Y_{2t-1}) + \alpha_{42}(Y_{3t-1} - bY_{4t-1}) + \text{بقیه جملات} + \varepsilon_{4t}$$

در این خصوص بایستی به سؤالات زیر جواب دهیم:

۱- چگونه محدودیت‌های هم‌انباشتگی را تحمیل کنیم؟

برای جواب به این سؤال، شکل کلی بردار هم‌انباشتگی را در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \end{bmatrix}$$

در این مثال، $\boldsymbol{\beta}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & \beta_{24} \end{bmatrix}$$

با توجه به محدودیت‌های مورد نظر، می‌خواهیم فرضیه H_0 را آزمون کنیم:

$$H_0: \beta_{11} = 1 \ , \ \beta_{12} = -1 \ , \ \beta_{23} = 1$$
$$\beta_{24} = -b \ , \ \beta_{21} = \beta_{22} = \beta_{13} = \beta_{14} = 0$$

بنابراین ماتریس هم‌انباشتگی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\boldsymbol{\beta}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix}$$

۲- چگونه ماتریس $\boldsymbol{\alpha}$ را تصریح کنیم؟

با توجه به ماتریس $\boldsymbol{\beta}$، می‌توان $\boldsymbol{\alpha\beta}'$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\boldsymbol{\alpha\beta}' = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{12}b \\ \alpha_{21} & -\alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{22}b \\ \alpha_{31} & -\alpha_{31} & \alpha_{32} & -\alpha_{32}b \\ \alpha_{41} & -\alpha_{41} & \alpha_{42} & -\alpha_{42}b \end{bmatrix}$$

اگر این ماتریس را با ماتریس $\mathbf{\Pi}$ مقایسه کنیم، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha_{21} = \alpha_{22} = \alpha_{31} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = 0$$

بنابراین ماتریس $\boldsymbol{\alpha}$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با جایگذاری در مدل VECM می‌توان ضریب $\boldsymbol{\alpha}$ را تفسیر نمود:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \\ \Delta Y_{3t} \\ \Delta Y_{4t} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0 + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \\ Y_{4t-1} \end{bmatrix} + \text{بقیه جملات} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

$$= \mathbf{A}_0 + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} - Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} - bY_{4t-1} \end{bmatrix} + \text{بقیه جملات} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

در اینجا دو بردار هم‌انباشتگی و دو بردار ضرایب تعدیل (α) داریم. به‌عنوان مثال، اگر $\alpha_{11}<0$ و $\alpha_{12}>0$ باشد بدان معنا است که:

الف) $Y_{1t-1}-Y_{2t-1}$ یک رابطه هم‌انباشتگی است که در تعادل بلندمدت برابر صفر است ولی در کوتاه‌مدت ممکن است غیرصفر باشد و یک وضعیت عدم تعادل را نشان دهد. بدین ترتیب Y_{1t} به این عدم تعادل با ضریب α_{11} واکنش نشان می‌دهد. چون α_{11} منفی است،لذا اگر $Y_{1t-1}<Y_{2t-1}$ باشد، آنگاه به این انحراف از تعادل، واکنش مثبت نشان می‌دهد. همچنین $Y_{2t}-bY_{4t-1}$ یک رابطه هم‌انباشتگی است که Y_{1t} با ضریب α_{12} به آن واکنش نشان می‌دهد. لذا گر $Y_{2t-1}-bY_{4t-1}>0$ باشد Y_{1t} به آن واکنش منفی نشان می‌دهد.

ب) Y_{1t} و Y_{2t} هیچ واکنشی به عدم تعادلها نشان نمی‌دهند.

ج) Y_{2t} به عدم تعادل $Y_{2t-1}-bY_{4t-1}$، با ضریب α_{22} واکنش نشان می‌دهد، ولی به عدم تعادل $Y_{1t-1}-Y_{2t-1}$، هیچ واکنشی نشان نمی‌دهد.

حال مباحث فوق را برای مدل VAR(۱) بررسی می‌کنیم.

مدل VAR(۱) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\mathbf{y}_t=\mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\mathbf{y}_{t-1}+\varepsilon_t \quad (۲۱-۱۹)$$

مدل VECM عبارت است از:

$$\Delta\mathbf{y}_t=\mathbf{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}+\varepsilon_t \;;\; \mathbf{\Pi}=\mathbf{A}_1-\mathbf{I} \quad (۲۱-۲۰)$$

برای مدل فوق، سه حالت وجود دارد:

۱- اگر تمام عناصر $\mathbf{\Pi}$ صفر باشند، در این صورت رتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ صفر است و لذا رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\mathbf{\Pi}=\mathbf{A}_1-\mathbf{I}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}_1=\mathbf{I} \quad (۲۱-۲۱)$$

با جایگذاری در مدل VAR، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{y}_t=\mathbf{I}\mathbf{y}_{t-1}+\varepsilon_t \quad (۲۱-۲۲)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که همهٔ Y_{it} ها نامانا هستند و هرکدام دارای یک ریشهٔ واحد می‌باشند. بنابراین، m ریشه واحد وجود دارد:

$$|\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\lambda|=0 \Rightarrow |\mathbf{I}-\lambda\mathbf{I}|=0 \Rightarrow (1-\lambda)^m=0 \quad (۲۱-۲۳)$$

با حل معادله فوق خواهیم داشت:

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=1$$

بدین‌ترتیب هریک از متغیرها از یک فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کند.

$$Y_{it}=a_{i0}+Y_{it-1}+\varepsilon_{it} \quad i=1,\cdots,m \quad (۲۱-۲۴)$$

در اینجا هیچ رابطهٔ هم‌انباشتگی وجود ندارد.

۲- اگر رتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ کامل باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$|\mathbf{\Pi}|\neq 0 \Rightarrow |\mathbf{A}_1-\mathbf{I}|\neq 0 \quad (۲۱-۲۵)$$

از طرف دیگر ریشه‌های مشخصه از رابطهٔ $|\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\lambda|=0$ به‌دست می‌آید. با مقایسه این دو، نتیجه می‌شود که ریشه واحد وجود ندارد:

$$\begin{cases}|\mathbf{A}_1-\mathbf{I}|\neq 0\\ |\mathbf{A}_1-\lambda\mathbf{I}|=0\end{cases} \Rightarrow \lambda_i<1 \quad (۲۱-۲۶)$$

بنابراین هیچ ریشهٔ واحدی وجود ندارد و نتیجه می‌شود که همهٔ متغیرها، مانا هستند و رابطه بین آنها می‌تواند بیانگر رابطه تعادلی باشد. یعنی هر یک از متغیرها طبق یک رابطه تعادلی با سایر متغیرها در ارتباط است.

۳- مرتبهٔ $\mathbf{\Pi}$ کامل نیست. در این صورت، دترمینان ماتریس $\mathbf{\Pi}$ برابر صفر است.

$$|\mathbf{\Pi}|=0 \Rightarrow |\mathbf{A}_1-\mathbf{I}|=0 \quad (۲۱-۲۷)$$

از طرف دیگر، $|\mathbf{A}_1-\mathbf{I}\lambda|=0$ است که در بین ریشه‌های آن، ریشه‌های واحد وجود دارد. مقایسه این دو نشان می‌دهد که حداقل یک ریشه واحد ($\lambda=1$) وجود دارد:

$$\begin{cases}|\mathbf{A}_1-\mathbf{I}|=0\\ |\mathbf{A}_1-\lambda\mathbf{I}|=0\end{cases} \Rightarrow$$ اقلاً یک $\lambda=1$ وجود دارد.

بنابراین، وجود ریشهٔ واحد برای ماتریس $\mathbf{A}_1$ به‌معنای این است که مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ کامل نیست. در این حالت، متغیرها نامانا هستند. از طرف دیگر، متغیرها نامانا دارای روند تصادفی هستند. برای این متغیرهای نامانا که دارای روند تصادفی هستند، دو حالت وجود دارد:

الف) روند تصادفی آنها مشترک نیست و هر کدام از روند تصادفی جداگانه‌ای تبعیت می‌کنند. در این صورت بین آنها رابطه تعادلی (هم انباشتگی) وجود ندارد.

ب) روند تصادفی آنها مشترک است. بدین معنا که منشأ روند تصادفی آنها یکسان است و لذا هر چند که به‌طور تصادفی، روند خود را طی می‌کنند، ولی هماهنگ با هم حرکت می‌کنند. در این صورت می‌گوییم که متغیرها دارای رابطه تعادلی (هم‌انباشتگی) هستند.

مثال ۷-۲۱: مدل VAR(1) به صورت زیر داده شده است:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{\Pi}$ عبارت است از:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین، مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ برابر با صفر است. از طرف دیگر ریشه‌های مشخصهٔ ماتریس $\mathbf{A}_1$ عبارت است از:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

بنابراین دو ریشه واحد وجود دارد. در این حالت، متغیرها نامانا هستند و هر یک از Y_{it}ها از گام تصادفی تبعیت می‌کنند.

$$Y_{1t} = 2 + Y_{1t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = 1.5 + Y_{2t-2} + \varepsilon_{2t}$$

بین این دو فرایند، هیچ رابطه‌ای وجود ندارد.

مثال ۸-۲۱: مدل VAR(1) دو متغیره را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{\Pi}$ برابر است با:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.2 \\ 0.3 & -0.6 \end{bmatrix}$$

چون $|\mathbf{\Pi}| \neq 0$ است، لذا مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ کامل است. در این صورت هیچ ریشهٔ واحدی وجود ندارد. ریشه‌های ماتریس $\mathbf{A}_1$ برابرند با:

$$|\mathbf{A}_1 - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0.2 \\ 0.3 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} = (0.5\lambda)(0.4-\lambda) - 0.06 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.14 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.7, \lambda_2 = 0.2$$

بنابراین چون ریشه‌های واحد وجود ندارد، متغیرها مانا هستند. برای اثبات این موضوع، ابتدا بردارهای مشخصه را حساب می‌کنیم:

$$\lambda_1 = 0.7 \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0.3 \Rightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

طرفین مدل VAR را در $\mathbf{C}^{-1}$ ضرب کرده و $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t$ و $\mathbf{C}^{-1}\varepsilon_t = \mathbf{w}_t$ را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = (\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{C}^{-1}\varepsilon_t \Rightarrow \mathbf{z}_t = \lambda \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

توجه شود که $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{C} = \lambda$ است. به‌جای بردارها و ماتریس‌های مربوطه قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

Z_{1t} و Z_{2t} عبارتند از:

$$Z_{1t} = 0.7Z_{1t} + w_{1t}$$
$$Z_{2t} = 0.2Z_{2t} + w_{2t}$$

بنابراین Z_{1t} و Z_{2t} مانا هستند. برای نشان دادن مانا بودن Y_{1t} و Y_{2t}، طرفین رابطهٔ $\mathbf{z}_t$ را در $\mathbf{C}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{C}\mathbf{z}_t = \mathbf{C}\lambda \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{C}\mathbf{w}_{t-1} \Rightarrow \mathbf{y}_t = \mathbf{C}\lambda \mathbf{z}_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\mathbf{C}\lambda$ عبارت است از:

$$\mathbf{C}\lambda = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix}$$

به‌جای $\mathbf{C}\lambda$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.4 \\ 0.7 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

Y_{1t} و Y_{2t} عبارتند از:

$$Y_{1t} = -0.7Z_{1t-1} - 0.4Z_{2t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t} = -0.7Z_{1t-1} - 0.6Z_{2t-1} + \varepsilon_{2t}$$

بنابراین، Y_{1t} و Y_{2t} مانا هستند، زیرا Z_{1t} و Z_{2t} مانا هستند.

مثال ۹-۲۱: مدل VAR(۱) با دو متغیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

ماتریس Π عبارت است از:

$$\Pi = A_1 - I = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.4 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

چون $|\Pi| = 0$ است، لذا مرتبه Π کامل نیست. از طرف دیگر، ماتریس Π دارای عناصر غیرصفر است و لذا مرتبه آن برابر با ۱ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌شود که ماتریس A_1 دارای یک ریشه واحد می‌باشد:

$$|A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 0.2-\lambda & 0.4 \\ 0.4 & 0.7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$$

می‌توان نشان داد که Y_{1t} و Y_{2t} نامانا هستند. بدین‌منظور ابتدا بردارهای مشخص را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow c_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس C برابر است با:

$$C = [c_1 \quad c_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

طرفین معادله VAR را در C^{-1} ضرب کرده و از تبدیل $C^{-1}y_t = z_t$، $C^{-1}\varepsilon_t = w_t$ و $C^{-1}A_1C = \lambda$ استفاده می‌کنیم:

$$C^{-1}y_t = (C^{-1}A_1C)C^{-1}y_{t-1} + C^{-1}\varepsilon_t \Rightarrow z_t = \lambda z_{t-1} + w_t$$

با بسط رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Z_{1t} = Z_{1t-1} + w_{1t} \\ Z_{2t} = w_{2t} \end{cases}$$

Z_{1t} نامانا است زیرا از فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کند، ولی Z_{2t} مانا است. حال طرفین رابطهٔ z_t را در C ضرب کرده و با استفاده از تبدیل $Cz_t = y_t$ و $Cw_t = \varepsilon_t$ خواهیم داشت:

$$y_t = C\lambda z_{t-1} + \varepsilon_t$$

$C\lambda$ برابر است با:

$$C\lambda = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

با ساده نمودن عبارت فوق، نتیجهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$Y_{1t} = -2Z_{1t-1} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_{2t} = Z_{1t-1} + \varepsilon_{2t}$$

بنابراین Y_{1t} و Y_{2t} نامانا هستند، زیرا تابعی از فرایند نامانای Z_{1t} می‌باشند.

عامل نامانایی را می‌توان با ضرب معادلهٔ دوم در ۲ و جمع آن با معادلهٔ اول، حذف نمود:

$$Y_{1t} + 2Y_{2t-1} = \varepsilon_{1t} + 2\varepsilon_{2t}$$

بنابراین، رابطه تعادلی فقط با بردار [۲ ۱] به‌دست می‌آید. اما توجه شود که بی‌نهایت از این نوع بردارها می‌توان استخراج نمود. مثلاً اگر معادله اول را در ۰/۵ ضرب کنیم و با دومی جمع می‌کنیم آنگاه بردار [۱ ۰/۵] به‌دست می‌آید. یا اگر معادله اول را در ۲ و معادله دوم را در ۴ ضرب کنیم، بردار [۴ ۲] به‌دست می‌آید. به‌هرحال این ضرایب دارای یک نسبت خاصی می‌باشند. بهتر است ضرایب یکی از متغیرها را برابر با واحد در نظر بگیریم و دیگری را متناسب با آن تعریف کنیم.

مثال ۱۰-۲۱: مدل VAR(۱) با سه متغیر را در نظر بگیرید:

$$y_t = A_0 + A_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.4-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \\ Y_{3t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \varepsilon_{3t} \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه ماتریس A_1 عبارت است از:

$$|A_1 - \lambda I| = (1-\lambda)[(0.1-\lambda)(0.4-\lambda) - 0.04]$$

$$= (1-\lambda)\lambda(0.5-\lambda) = 0$$

ریشه‌های مشخصه و بردارهای مشخصه عبارتند از (ضمیمه ب):

$$\lambda_۱ = ۱ \ , \ \mathbf{c}_۱ = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\lambda_۲ = ۰ \ , \ \mathbf{c}_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\lambda_۳ = ۰/۵ \ , \ \mathbf{c}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

ماتریس $\mathbf{C}$ عبارت است از:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

حال طرفین معادله VAR را در $\mathbf{C}^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{y}_t = \mathbf{C}^{-۱}\mathbf{A}_۱ + (\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{A}_۱\mathbf{C})\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{y}_{t-۱} + \mathbf{C}^{-۱}\boldsymbol{\varepsilon}_t \Rightarrow \mathbf{z}_t = \mathbf{k} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{z}_{t-۱} + \mathbf{w}_t$$

که $\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{A}_۰ = \mathbf{k}$، $\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t$، $\mathbf{C}^{-۱}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{w}_t$ و $\mathbf{C}^{-۱}\mathbf{A}_۱\mathbf{C} = \boldsymbol{\lambda}$ است. $\boldsymbol{\lambda}$ ماتریس قطری است که عناصر آن ریشه‌های مشخصه را نشان می‌دهند. با جایگذاری به‌جای $\mathbf{k}$ و $\boldsymbol{\lambda}$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Z_{۱t} \\ Z_{۲t} \\ Z_{۳t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۶ \\ ۰/۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{۱t-۱} \\ Z_{۲t-۱} \\ Z_{۳t-۱} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{۱t} \\ w_{۲t} \\ w_{۳t} \end{bmatrix}$$

ضرایب بردار $\mathbf{k}$ به صورت زیر به‌دست آمده است:

$$\mathbf{k} = \mathbf{C}^{-۱}\mathbf{A}_۰ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۵} & -\frac{۲}{۵} & \frac{۱}{۵} \\ -\frac{۱}{۵} & \frac{۱}{۵} & \frac{۲}{۵} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰/۸ \\ ۰/۶ \\ ۰/۲ \end{bmatrix}$$

با ساده نمودن رابطه فوق، برای هر یک از Z_{it} ها خواهیم داشت:

$$Z_{۱t} = ۰/۸ + Z_{۱t-۱} + w_{۱t}$$
$$Z_{۲t} = ۰/۶ + w_{۲t}$$
$$Z_{۳t} = ۰/۲ + ۰/۴Z_{۳t-۱} + w_{۳t}$$

بنابراین، $Z_{۱t}$ ناماناست، زیرا از فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کند (اصطلاحاً ریشه واحد دارد)، ولی $Z_{۲t}$ و $Z_{۳t}$ مانا هستند. حال طرفین معادلهٔ $\mathbf{z}_t$ را در $\mathbf{C}$ ضرب کرده و با توجه به $\mathbf{Cz}_t = \mathbf{y}_t$ و $\mathbf{Cw}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t$، آن را ساده می‌کنیم:

$$\mathbf{Cz}_t = \mathbf{Ck} + \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{z}_{t-۱} + \mathbf{Cw}_t \Rightarrow \mathbf{y}_t = \mathbf{A}_۰ + \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{z}_{t-۱} + \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

که $\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}$ عبارت است از:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

جایگذاری به‌جای $\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}$ خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Y_{۱t} \\ Y_{۲t} \\ Y_{۳t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۳ & ۰ & ۰/۵ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{۱t-۱} \\ Z_{۲t-۱} \\ Z_{۳t-۱} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{۱t} \\ \varepsilon_{۲t} \\ \varepsilon_{۳t} \end{bmatrix}$$

برای هر یک از Y_{it} ها، معادلات زیر را داریم:

$$Y_{۱t} = ۴ + ۵Z_{۱t-۱} + \varepsilon_{۱t}$$
$$Y_{۲t} = ۲ + ۳Z_{۱t-۱} - ۰/۵Z_{۳t-۱} + \varepsilon_{۲t}$$
$$Y_{۳t} = ۳ + Z_{۱t-۱} + Z_{۳t-۱} + \varepsilon_{۳t}$$

$Y_{۱t}$ و $Y_{۲t}$ و $Y_{۳t}$ نامانا هستند، زیرا هر یک از آنها تابعی از فرایند نامانای $Z_{۱t}$ می‌باشند. اما بین این سه متغیر یک رابطه تعادلی (هم انباشتگی) وجود دارد، زیرا روند تصادفی آنها مشترک است که ناشی از $Z_{۱t}$ می‌باشد. حال می‌توان ترکیبی از از این سه متغیر پیدا کرد که مانا می‌باشد. این ترکیب را باید به گونه‌ای بیابیم که بتوان از آن، متغیر نامانای $Z_{۱t}$ را حذف نمود. بدین منظور معادله دوم را در ۱- و معادله سوم را در ۲- ضرب می‌کنیم:

$$Y_{۱t} = ۴ + ۵Z_{۱t-۱} + \varepsilon_{۱t}$$
$$-Y_{۲t} = -۲ - ۳Z_{۱t-۱} + ۰/۵Z_{۳t-۱} - \varepsilon_{۲t}$$
$$-۲Y_{۳t} = -۶ - ۲Z_{۱t-۱} - ۲Z_{۳t-۱} - ۲\varepsilon_{۳t}$$

معادلات فوق را جمع می‌زنیم:

$$Y_{۱t} - Y_{۲t} - ۲Y_{۳t} = -۴ - ۱/۵Z_{۳t-۱} + \varepsilon_{۱t} - \varepsilon_{۲t} - ۲\varepsilon_{۳t}$$

چون سمت راست ماناست، لذا سمت چپ نیز مانا می‌باشد. بدین‌معنا که در بلندمدت، عبارت سمت چپ به سمت مقدار تعادلی خود میل خواهد کرد. به‌عبارت دیگر، سمت چپ بیانگر ترکیب مانا است که رابطه تعادلی بین این سه متغیر را نشان می‌دهد. این ترکیب به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[1 \quad -1 \quad -0/25]\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ Y_{3t} \end{bmatrix}$$

که $\beta' = [1 \quad -1 \quad -0/25]$ معروف به بردار هم‌انباشتگی و رابطهٔ $\beta' y_t$ نیز معروف به رابطه هم‌انباشتگی است که وضعیت تعادلی را توصیف می‌کند.

۲۱-۴ روش جوهانسن

۲۱-۴-۱ تخمین ضرایب با روش حداکثر درستنمایی

روش تخمین جوهانسن مبتنی بر روش حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل (FIML) است. اگر $0 < r < m$ باشد برای مدل VECM می‌توان تابع درستنمایی را به‌صورت زیر تشکیل داد:

$$L(\mathbf{A}_i^*, \mathbf{\Pi}, \mathbf{\Omega} \mid \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_T) = \frac{Tm}{2}\ln(2\pi) - \frac{T}{2}\ln|\mathbf{\Omega}| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon'\mathbf{\Omega}^{-1}\varepsilon_t \qquad (21\text{-}28)$$

در اینجا از قضیه فریش-ویوگ[1] استفاده می‌کنیم. طبق این قضیه، در یک رگرسیون دو متغیره $Y_t = \alpha + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_t$ می‌توان β_2 را براساس سه مرحلهٔ زیر به‌دست آورد[2]:

۱- Y_t را روی X_{1t} برازش می‌کنیم $(Y_t = a_0 + a_1 X_{1t} + u_{1t})$ و باقیمانده‌های آن را حساب می‌کنیم که بیانگر آن مقدار از Y_t است که اثرات X_{1t} از آن حذف شده است.

۲- X_{2t} را روی X_{1t} برازش می‌کنیم $(X_{2t} = b_0 + b_1 X_{1t} + u_{2t})$ و باقیمانده‌های آن را حساب می‌کنیم که بیانگر آن مقدار از X_{2t} است که اثرات X_{1t} از آن حذف شده است.

۳- u_{1t} را روی u_{2t} برازش کرده و β_2 را تعیین می‌کنیم $(u_{1t} = \beta_2 u_{2t} + \varepsilon_t)$.

مشابه بحث فوق را برای تخمین $\mathbf{\Pi}$ در مدل VECM به کار می‌بریم:

۱- ابتدا رگرسیون زیر را برآورد می‌کنیم که در آن $\Delta \mathbf{y}_t$ روی $\Delta \mathbf{y}_{t-i}$ها برازش شده است. در واقع همان مدل VECM است که $\mathbf{y}_{t-1}$ از آن حذف شده است. به عبارت دیگر رابطه تعادلی بلندمدت (یعنی $\mathbf{\Pi y}_{t-1}$) از آن حذف شده است:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \mathbf{B}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{B}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + ... + \mathbf{B}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-(p-1)} + \varepsilon_{0t} \qquad (21\text{-}29)$$

1- Frish-Waugh theorem

۲- در فصل چهارم مشابه این بحث، ارائه شده است.

در اینجا به‌جای $\mathbf{A}_j^*$ از $\mathbf{B}_j$ استفاده کرده‌ایم. باقیمانده‌های این مدل را که با $\hat{\varepsilon}_{0t}$ یا $\mathbf{r}_{0t}$ نشان می‌دهیم، بیانگر آن مقدار از $\Delta \mathbf{y}_t$ است که اثرات $\Delta \mathbf{y}_{t-j}$ از آن حذف شده است.

۲- حال رگرسیون زیر را برآورد می‌کنیم که در آن، $\mathbf{y}_{t-1}$ را روی $\Delta \mathbf{y}_{t-j}$ها برازش می‌کنیم:

$$\mathbf{y}_{t-1} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_1 \Delta \mathbf{y}_{t-1} + \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_2 \Delta \mathbf{y}_{t-2} + ... + \widetilde{\boldsymbol{\beta}}_{p-1} \Delta \mathbf{y}_{t-(p-1)} + \varepsilon_{1t} \qquad (21\text{-}30)$$

باقیمانده‌های این مدل را با $\hat{\varepsilon}_{1t}$ یا $\mathbf{r}_{1t}$ نشان می‌دهیم که برابر با آن مقدار از $\mathbf{y}_{t-1}$ است که توسط $\Delta \mathbf{y}_{t-j}$ها توضیح داده نمی‌شود.

۳- بدین ترتیب $\mathbf{r}_{0t}$ را $\Delta \mathbf{y}_t$ خالص می‌گوییم (یعنی اثر $\Delta \mathbf{y}_{t-j}$ها از آن حذف شده است) و $\mathbf{r}_{1t}$ را $\mathbf{y}_{t-1}$ خالص می‌گوییم (یعنی اثر $\Delta \mathbf{y}_{t-j}$ها از آن حذف شده است). حال اگر $\mathbf{r}_{0t}$ را روی $\mathbf{r}_{1t}$ برازش کنیم بدان معنا است که «$\Delta \mathbf{y}_t$ خالص» را روی «$\mathbf{y}_{t-1}$ خالص» برازش کرده‌ایم که با برآورد آن می‌توان تخمین $\mathbf{\Pi}$ را به‌دست آورد.

$$\mathbf{r}_{0t} = \mathbf{\Pi r}_{1t} + \varepsilon_t \qquad t = 1, ..., T \qquad (21\text{-}31)$$

$$\varepsilon_t \sim \mathrm{N}_m(\mathbf{0}, \mathbf{\Omega})$$

مدل فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{r}_{0t} = \boldsymbol{\alpha\beta}' \mathbf{r}_{1t} + \varepsilon_t \qquad (21\text{-}32)$$

قبل از ادامه بحث، ابتدا ماتریس واریانس-کوواریانس باقیمانده‌های روش OLS را برای معادلات (۲۱-۳۱) تعریف می‌کنیم:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_{0t}) = E(\varepsilon_{0t}\varepsilon'_{0t}) = \mathbf{S}_{00}$$
$$\mathrm{var}(\varepsilon_{1t}) = E(\varepsilon_{1t}\varepsilon'_{1t}) = \mathbf{S}_{11} \qquad (21\text{-}33)$$
$$\mathrm{cov}(\varepsilon_{0t}, \varepsilon_{1t}) = E(\varepsilon_{0t}\varepsilon'_{1t}) = \mathbf{S}_{01} = \mathbf{S}_{10}$$

از آنجا که باقیمانده‌ها به‌صورت $\mathbf{r}_{0t}$ و $\mathbf{r}_{1t}$ به‌دست آمده است، لذا برای معادله iام در سال tام مقادیر r_{0it} و r_{1it} را داریم که $i = 1, ..., m$ و $t = 1, ..., T$ می‌باشد. برای تخمین $\mathbf{S}_{00}$، $\mathbf{S}_{11}$ و $\mathbf{S}_{01}$ ابتدا ماتریس $\mathbf{R}_0$ و $\mathbf{R}_1$ را تشکیل می‌دهیم. به‌عنوان مثال $\mathbf{R}_0$ عبارت است از:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} r_{011} & r_{012} & \cdots & r_{01T} \\ r_{021} & r_{022} & \cdots & r_{02T} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{0m1} & r_{0m2} & \cdots & r_{0mT} \end{bmatrix}_{m\times T} = [\mathbf{r}_{01} \quad \mathbf{r}_{02} \quad \ldots \quad \mathbf{r}_{0T}] \qquad (۲۱-۳۴)$$

$$\mathbf{r}_{0t} = \begin{bmatrix} r_{01t} \\ r_{02t} \\ \vdots \\ r_{0mt} \end{bmatrix}$$

در ماتریس $\mathbf{R}_0$، سطر اول بیانگر خطاهای معادله اول و سطر m خطاهای معادله m می‌باشد. بنابراین $\mathbf{r}_{0t}$ بردار ستونی $m\times 1$ است (ستونهای ماتریس $\mathbf{R}_0$) که خطاهای معادله اول تا m را برای سال tام نشان می‌دهد.

با استفاده از $\mathbf{R}_0$ و $\mathbf{R}_1$، خواهیم داشت:

$$\mathbf{S}_{00} = \mathbf{R}_0\mathbf{R}_0' = \frac{1}{T}\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T} r_{01t}^2 & \sum_{t=1}^{T} r_{01t}r_{02t} & \cdots & \sum_{t=1}^{T} r_{01t}r_{0mt} \\ \sum_{t=1}^{T} r_{02t}r_{01t} & \sum_{t=1}^{T} r_{02t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^{T} r_{02t}r_{0mt} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=1}^{T} r_{0mt}r_{01t} & \sum_{t=1}^{T} r_{0mt}r_{02t} & \cdots & \sum_{t=1}^{T} r_{0mt}^2 \end{bmatrix} \qquad (۲۱-۳۵)$$

$$\mathbf{S}_{11} = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$$

$$\mathbf{S}_{01} = \mathbf{R}_0\mathbf{R}_1'$$

و یا می‌توان روابط فوق را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{S}_{00} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{r}_{0t}\mathbf{r}_{0t}' = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\begin{bmatrix} r_{01t} \\ r_{02t} \\ \vdots \\ r_{0mt} \end{bmatrix}[r_{01t} \quad r_{02t} \quad \cdots \quad r_{0mt}]$$

$$\mathbf{S}_{11} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{r}_{1t}\mathbf{r}_{1t}'$$

$$\mathbf{S}_{01} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{r}_{0t}\mathbf{r}_{1t}' \qquad (۲۱-۳۶)$$

$$\mathbf{S}_{10} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\mathbf{r}_{1t}\mathbf{r}_{0t}'$$

حال برای برآورد $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha\beta}'$، تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم:

$$L(\alpha,\beta,\Omega) = (\sqrt{2\pi})^{-T}|\Omega|^{-\frac{T}{2}}\exp(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t'\Omega^{-1}\varepsilon_t) \qquad (۲۱-۳۷)$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-T}|\Omega|^{-\frac{T}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_{0t}-\boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{r}_{1t})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\mathbf{r}_{0t}-\boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{r}_{1t})\right]$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\boldsymbol{\alpha}$، برآورد حداکثر درستنمایی عبارت است از[1]:

$$\hat{\alpha}(\beta) = \mathbf{S}_{01}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{11}\boldsymbol{\beta})^{-1} \qquad (۲۱-۳۸)$$

و با مشتق‌گیری نسبت به $\boldsymbol{\Omega}$ خواهیم داشت:

$$\hat{\Omega}(\beta,\alpha) = \frac{1}{T}\sum_t\varepsilon_t\varepsilon_t' = \frac{1}{T}\sum_t(\mathbf{r}_{0t}-\boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{r}_{1t})(\mathbf{r}_{0t}-\boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{r}_{1t})' \qquad (۲۱-۳۹)$$

$$= \frac{1}{T}(\sum\mathbf{r}_{0t}\mathbf{r}_{0t}' - \sum\mathbf{r}_{0t}\mathbf{r}_{1t}'\boldsymbol{\beta\alpha}' - \boldsymbol{\alpha\beta}'\sum\mathbf{r}_{1t}\mathbf{r}_{0t}' + \boldsymbol{\alpha\beta}'\sum\mathbf{r}_{1t}\mathbf{r}_{1t}'\boldsymbol{\beta\alpha}')$$

$$= \mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{01}\boldsymbol{\beta\alpha}' - \boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{S}_{10} + \boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{S}_{11}\boldsymbol{\beta\alpha}'$$

به‌جای $\boldsymbol{\alpha}$ قرار داده و $\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ را بر حسب $\boldsymbol{\beta}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\hat{\Omega}(\beta) = \mathbf{S}_{00} - \mathbf{S}_{01}\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{11}\boldsymbol{\beta})^{-1}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{S}_{10} \qquad (۲۱-۴۰)$$

۱- با مشتق‌گیری نسبت به $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\Omega}$ خواهیم داشت:

$$\ln L = \text{ثابت} - \frac{T}{2}\ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t'\Omega^{-1}\varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t = \mathbf{r}_{0t} - \boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{r}_{1t}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_t\frac{\partial(\varepsilon_t'\Omega^{-1}\varepsilon_t)}{\partial\varepsilon_t}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}2\Omega^{-1}\varepsilon_t\mathbf{r}_{1t}'\beta = 0$$

$$\Rightarrow -\sum_t\Omega^{-1}(\mathbf{r}_{0t}-\alpha\beta'\mathbf{r}_{1t})\mathbf{r}_{1t}'\beta = 0$$

$$\Rightarrow \sum_t\mathbf{r}_{0t}\mathbf{r}_{1t}'\beta - \alpha\beta'\sum_t\mathbf{r}_{1t}\mathbf{r}_{1t}'\beta = 0 \Rightarrow \mathbf{S}_{01}\beta - \alpha\beta'\mathbf{S}_{11}\beta = 0 \Rightarrow \hat{\alpha}(\beta) = \mathbf{S}_{01}\beta(\beta'\mathbf{S}_{11}\beta)^{-1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\Omega} = -\frac{T}{2}\frac{\partial\ln|\Omega|}{\partial\Omega} - \frac{1}{2}\sum_t\frac{\partial(\varepsilon_t'\Omega^{-1}\varepsilon_t)}{\partial\Omega} = -\frac{T}{2}\Omega^{-1} + \frac{1}{2}\sum_t\varepsilon_t\varepsilon_t'\Omega^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow -T\Omega + \sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\varepsilon_t' = 0 \Rightarrow \hat{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t\varepsilon_t' = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\mathbf{r}_{0t}-\alpha\beta'\mathbf{r}_{1t})(\mathbf{r}_{0t}-\alpha\beta'\mathbf{r}_{1t})'$$

از آنجا که تابع درستنمایی طبق (۲۴-۲۱) فقط تابعی از $|\hat{\Omega}|$ است، لذا حداکثر شدن تابع درستنمایی معادل با حداقل شدن $|\hat{\Omega}|$ نسبت به β است.

$$\min_{\beta} \left|\hat{\Omega}(\beta)\right| = \left|S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}\right| \qquad (۲۱-۴۱)$$

دترمینان $\hat{\Omega}(\beta)$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت[1]:

$$\left|\hat{\Omega}(\beta)\right| = \left|S_{00}\right| \frac{\left|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta\right|}{\left|\beta' S_{11}\beta\right|} \qquad (۲۱-۴۲)$$

برای ادامه بحث، بهتر است عبارت فوق را به‌صورت $\left|\hat{\Omega}(\beta)\right| = \left|S_{00}\right| f(\beta)$ بنویسیم که $f(\beta)$ عبارت است از:

$$f(\beta) = \frac{\left|\beta' M\beta\right|}{\left|\beta' N\beta\right|} \quad , \quad M = S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01} \quad , \quad N = S_{11}$$

لگاریتم $|\hat{\Omega}|$ را حساب می‌کنیم:

$$\ln\left|\hat{\Omega}(\beta)\right| = \ln\left|S_{00}\right| + \ln f(\beta) \qquad (۲۱-۴۳)$$

$$\ln f(\beta) = \ln\left|\beta' M\beta\right| - \ln\left|\beta' N\beta\right| \qquad (۲۱-۴۴)$$

از $\ln f(\beta)$ نسبت به β مشتق گرفته برابر صفر قرار می‌دهیم که منجر به حل مسئله زیر می‌شود:

$$\left|\rho S_{11} - (S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\right| = 0$$

$$\left|-(1-\rho)S_{11} + S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\right| = 0 \Rightarrow \left|(1-\rho)S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\right| = 0 \qquad (۲۱-۴۵)$$

اگر از تبدیل $\lambda = 1-\rho$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

۱- ابتدا از رابطه $\begin{vmatrix} A & B \\ B' & C \end{vmatrix} = |A|\left|C - B'A^{-1}B\right| = |C|\left|A - BC^{-1}B'\right|$ استفاده می‌کنیم که $S_{00} = A$ ، $\beta' S_{11}\beta = C$ و $S_{01}\beta = B$ است:

$$\left|S_{00}\right|\left|\beta' S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\beta\right| = \left|\beta' S_{11}\beta\right|\left|S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}\right|$$

$$\left|\hat{\Omega}(\beta)\right| = \left|S_{00}\right| \frac{\left|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta\right|}{\left|\beta' S_{11}\beta\right|}$$

$$\left|\lambda S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\right| = 0 \qquad (۲۱-۴۶)$$

و یا

$$\left|\lambda I - S_{11}^{-1}S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\right| = 0$$

حل مسئله فوق معادل با یافتن مقادیر ویژهٔ ماتریس $S_{11}^{-1}S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$ یا $S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$ است. از طرف دیگر هر یک از مقادیر ویژه بیانگر ضریب همبستگی کانونی[1] است. علاوه بر این، چون ماتریس مذکور مثبت معین است لذا مقادیر ویژه آن غیر منفی هستند ($\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_m > 0$). از طرف دیگر متناسب با مقدار ویژهٔ λ_i، بردار ویژه iام را داریم که آن را با $\tilde{\beta}_i$ نشان می‌دهیم:

$$(S_{11}^{-1}S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\tilde{\beta}_i = \lambda\tilde{\beta}_i$$

با ضرب طرفین در S_{11} خواهیم داشت:

$$(S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\tilde{\beta}_i = \lambda S_{11}\tilde{\beta}_i \qquad (۲۱-۴۷)$$

برای نرمال‌سازی بردار ویژهٔ iام هر یک از عناصر آن را بر $\sqrt{\tilde{\beta}_i'\tilde{\beta}_i}$ تقسیم می‌کنند به‌گونه‌ای که برای بردار نرمال شده، رابطهٔ $\beta_i'\beta_i = 1$ برقرار گردد. ولی در اینجا بردارهای ویژه به گونهٔ دیگری نرمال می‌شوند. برای نرمال‌سازی بردار ویژهٔ iام، هر یک از عناصر آن را بر $\sqrt{\tilde{\beta}_i' S_{11}\tilde{\beta}_i}$ تقسیم می‌کنیم، در این صورت بردار نرمال شده که با β_i نشان می‌دهیم، شرط $\beta_i' S_{11}\beta_i = 1$ را تأمین می‌کند.

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\beta}_i' S_{11}\tilde{\beta}_i}}\tilde{\beta}_i \qquad (۲۱-۴۸)$$

بردار ویژهٔ نرمال شدهٔ iام که با β_i نشان می‌دهیم، همان بردار هم‌انباشتگی iام است. بدیهی است که متناسب با هر مقدار ویژهٔ غیرصفر، یک بردار ویژه (بردار هم‌انباشتگی) به‌دست می‌آید. لذا به‌ازای r مقدار ویژهٔ غیرصفر، r بردار هم‌انباشتگی داریم.

حال $|\hat{\Omega}|$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\min_{\beta} |\hat{\Omega}| = \min_{\beta} \left|S_{00}\right| f(\beta) = \left|S_{00}\right| \min_{\beta} f(\beta)$$

1- canînical correlation

در خصوص ضریب همبستگی کانونی، در فصل پنجم به‌تفصیل بحث شده است.

$$=|\mathbf{S}_{00}|[\hat{\rho}_1\hat{\rho}_2...\hat{\rho}_m]=|\mathbf{S}_{00}|[(1-\hat{\lambda}_1)(1-\hat{\lambda}_2)...(1-\hat{\lambda}_m)]$$

از آنجا که دترمینان یک ماتریس برابر با حاصل‌ضرب مقادیر ویژهٔ آن است لذا $|\hat{\mathbf{\Omega}}|$ عبارت است از:

$$|\hat{\mathbf{\Omega}}|=|\mathbf{S}_{00}|\prod_{i=1}^{m}(1-\hat{\lambda}_i) \qquad (۲۱-۴۹)$$

چون $|\mathbf{S}_{00}|$ ثابت است لذا حداکثر لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\max \ln L=-\frac{T}{2}\sum_{i=1}^{m}(1-\hat{\lambda}_i)+\text{ثابت} \qquad (۲۱-۵۰)$$

۲۱-۴-۲ تعیین تعداد بردارهای هم‌انباشتگی

با توجه به ماتریس $\mathbf{\Pi}=\alpha\beta'$ تعداد بردارهای ویژه که بیانگر روابط تعادلی (هم‌انباشتگی) هستند برابر با r (مرتبه ماتریس β) می‌باشد، لذا فقط rبردار هم‌انباشتگی وجود دارد و بقیه (یعنی $m-r$ بردار) بیانگر روابط مانا می‌باشند. در این صورت، ماتریس β یک ماتریس $m\times r$ است که شامل فقط rبردار هم‌انباشتگی است. در نتیجه، λ_iهایی که مربوط به بردارهای نامانا هستند، برابر صفر خواهند بودند. بنابراین، حداکثر rبردار هم‌انباشتگی وجود دارد که λ_iهای مربوط به آنها غیر صفر است.

آزمون اثر[1] جوهانسون

برای تعیین مقادیر ویژهٔ غیر صفر، از آزمون فرضیه استفاده می‌کنیم. فرضیه‌های H_0 و H_1 عبارتند از:

$H_0:\lambda_1\neq 0,...,\lambda_r\neq 0,\lambda_{r+1}=\lambda_{r+2}=...=\lambda_m=0$

$H_1:\lambda_i\neq 0 \quad i=1,2,...,m$

فرضیه H_0 بیانگر آن است که مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ برابر r و فرضیه H_1 بیانگر آن است که مرتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ برابر m است. بنابراین فرضیه‌های H_0 و H_1 عبارتند از:

1- trace

$H_0:\text{rank}(\mathbf{\Pi})=r$

$H_1:\text{rank}(\mathbf{\Pi})=m$

برای آزمون فرضیه H_0 در مقابل H_1 از نسبت درستنمایی استفاده می‌کنیم. با حذف جملات مشترک از صورت و مخرج، نسبت درستنمایی عبارت است از:

$$LR=\frac{L(H_0)}{L(H_1)}=\frac{\prod_{i=1}^{r}(1-\hat{\lambda}_i)}{\prod_{i=1}^{m}(1-\hat{\lambda}_i)} \qquad (۲۱-۵۱)$$

تابع فوق معروف به آمارهٔ آزمون اثر جوهانسن است که با λ_{tr} نشان داده می‌شود:

$$\lambda_{tr}=-2\ln LR=-2[L(H_0)-L(H_1)]=-T\sum_{i=r+1}^{m}\ln(1-\hat{\lambda}_i) \qquad (۲۱-۵۲)$$

λ_{tr} فرضیه H_0 را آزمون می‌کند که آیا rبردار هم‌انباشتگی وجود دارد یا نه. توجه شود که از آنجا که $\ln(1)=0$ و $\ln(0)=-\infty$ است، لذا λ_{tr} وقتی که λ_iها صفر باشند، برابر صفر است و وقتی λ_iها به سمت ۱ میل کنند، λ_{tr} به سمت $-\infty$ می‌رود، لذا λ_{tr} منفی است.

برای انجام این آزمون از آزمون فرضیه $H_0:r=0$ شروع می‌کنیم. اگر H_0 پذیرفته شد، آزمون را متوقف می‌کنیم. اگر $H_0:r=0$ رد شد، آزمون $H_0:r=1$ بررسی می‌کنیم. اگر $r=1$ پذیرفته شد، بدان معنا است که یک بردار هم‌انباشتگی وجود دارد. اگر $H_0:r=1$ رد شد، آزمون $H_0:r=2$ را بررسی می‌کنیم. این مراحل را ادامه می‌دهیم تا به $r=m$ برسیم.

آزمون بزرگترین مقدار ویژه (λ_{max})

در این روش بزرگترین مقادیر ویژه‌ای را که از نظر آماری معنادار است، پیدا می‌کنیم. بدین منظور فرضیه‌های زیر را آزمون می‌کنیم:

$H_0:\lambda_1\neq 0,...,\lambda_r\neq 0,\lambda_{r+1}=0,\lambda_{r+2}=0,...\lambda_m=0$

$H_1:\lambda_1\neq 0,...,\lambda_r\neq 0,\lambda_{r+1}\neq 0,\lambda_{r+2}=0,...\lambda_m=0$

نسبت درستنمایی برای آزمون این فرضیه، بعد از ساده نمودن آن عبارت است از:

$$LR=\frac{L(H_0)}{L(H_1)}=\frac{\prod_{i=1}^{r}(1-\hat{\lambda}_i)}{\prod_{i=1}^{r+1}(1-\hat{\lambda}_i)} \qquad (۲۱-۵۳)$$

این نسبت را ساده کرده و آن را با λ_{max} نشان می‌دهیم:

$$\lambda_{max}=-2\ln LR=-2[\ln L(H_0)-\ln L(H_1)]=-T\ln(1-\hat{\lambda}_{r+1}) \qquad (۲۱-۵۴)$$

۲۱-٤-۳ نرمال‌سازی بردارهای هم‌انباشتگی

تفسیر رابطه هم‌انباشتگی برای یک متغیر اقتصادی خاص، نیاز به نرمال‌سازی ضریب آن متغیر دارد. بدین معنی که ضریب آن را بایستی برابر ۱ قرار دهیم. این بحث مشابه با آن چیزی است که در مدل رگرسیون ساده انجام می‌دهیم. مثلاً وقتی معادله رگرسیون را به‌صورت $Y_t=\beta_1+\beta_2X_{2t}+\beta_3X_{3t}+u_t$ می‌نویسیم، یکی از متغیرها (در اینجا Y_t) را به‌عنوان متغیر وابسته انتخاب کرده‌ایم و ضریب آن را برابر ۱می‌گیریم. در یک مدل رگرسیون که شامل چند متغیر تصادفی است به اشتباه یک متغیر را وابسته بنامیم و ضریب آن را برابر ۱ بگیریم.

در نرمال‌سازی رابطهٔ هم‌انباشتگی بایستی به مفهوم اقتصادی و آماری آن توجه کنیم. برای مثال نرمال‌سازی یک ضریب بی‌معنی و نامرتبط نمی‌تواند معنا و مفهوم داشته باشد. با این وجود، تفاوت مهمی بین مدل رگرسیون و رابطه هم‌انباشتگی وجود دارد. نرمال‌سازی براساس X_{1t} یا X_{2t} در یک مدل رگرسیون، تخمین ضرایب را تغییر می‌دهد، در حالی که در یک رابطه هم‌انباشتگی، نسبت‌های بین ضرایب، مستقل از انتخاب متغیر انتخابی است.

۲۱-٤-٤ شناسایی روابط هم‌انباشتگی و آزمون محدودیت‌های خطی

اگر بیش از یک بردار هم‌انباشتگی داشته باشیم، بدان معنا است که در بلندمدت، متغیرها به شیوه‌های متفاوتی با هم ارتباط دارند. در چنین مواردی شناسایی یک رابطه تعادلی بلندمدت بدون اعمال قیود اضافی که از تئوری اقتصادی ناشی می‌شود، غیرممکن است. بنابراین شناسایی بردارهای هم‌انباشتگی، نکته بسیار مهمی است. وقتی $r>1$ باشد، ماتریس β را نمی‌توان به‌طور منحصر به‌فرد تخمین زد، زیرا تجزیه ماتریس Π کاملاً اختیاری است:

$$\Pi=\alpha\beta'=(\alpha B)(B^{-1}\beta')=\alpha^*\beta'^*$$

$\hat{\beta}$ و $\hat{\beta}^*$ تخمین بردارهای هم‌انباشتگی هستند که هر دو به یک اندازه تابع درستنمایی را حداکثر می‌کنند، زیرا تخمین Π در هر دو حالت، یکسان است. به همین دلیل است که از قاعده نرمال‌سازی استفاده می‌شود. در چنین شرایطی نمی‌توان α و β را بدون اعمال محدودیت، شناسایی نمود. بدیهی است که چون r بردار هم‌انباشتگی داریم، لذا بایستی حداقل r محدودیت مستقل روی هر بردار هم‌انباشتگی اعمال کنیم. بدین ترتیب r^2 محدودیت لازم است روی rبردار اعمال کنیم. از آنجا که روی هر بردار، یک محدودیت را به‌صورت نرمال نمودن اعمال می‌کنیم، لذا تعداد قیدهای لازم برای شناسایی هر بردار برابر با $r-1$ می‌باشد.

اگر بردار β_i ستون iام ماتریس β باشد (β_i بردار ستونی $m\times 1$ است) و اگر R_i محدودیت‌های اعمال شده بر روی β_i باشد (R_i ماتریس $k_i\times m$ است)، آنگاه محدودیت‌ها را به‌صورت $R_i\beta_i=0$ نشان می‌دهیم. بدین ترتیب $R_i\beta_i=0$ شامل $r-1$ محدودیت برای بردار هم‌انباشتگی iام می‌باشد. این شرط بیانگر آن است که برای شناسایی بردار هم‌انباشتگی iام بایستی $k_i\geq r-1$ باشد.

مثال ۲۱-۱۱: یک مدل VECM پنج متغیره را در نظر بگیرید که دارای سه بردار هم‌انباشتگی به‌صورت زیر باشد (هر بردار حداقل $r-1=2$ قید نیاز دارد):

$$\beta_i'y_t=\beta_{i1}Y_{1t}+\beta_{i2}Y_{2t}+\beta_{i3}Y_{3t}+\beta_{i4}Y_{4t}+\beta_{i5}Y_{5t} \quad i=1,2,3$$

تصور کنید که براساس تئوری و یا هر اطلاعات اضافی دیگری، بدین نتیجه رسیده‌ایم که این سه بردار دارای محدودیت‌هایی هستند که با اعمال آنها، خواهیم داشت:

$$\beta_1'y_t=Y_{1t}-Y_{2t}-b_1(Y_{4t}-Y_{5t})$$
$$\beta_2'y_t=Y_{2t}-b_2(Y_{3t}-Y_{5t})$$
$$\beta_3'y_t=(Y_{4t}-Y_{5t})$$

رابطه هم‌انباشتگی اول دارای دو پارامتر آزاد است و لذا ۳ قید روی آن اعمال شده است. رابطه هم‌انباشتگی دوم دارای دو پارامتر آزاد است و لذا ۳ قید روی آن اعمال شده است.. هم‌چنین رابطه هم‌انباشتگی سوم فقط یک ضریب آزاد دارد و لذا ۴ قید روی آن اعمال شده است. توجه شود که در رابطه اول، دوم و سوم به ترتیب، ضرایب Y_{1t}، Y_{2t} و Y_{4t} نرمال شده‌اند.

برای رابطه اول، قیدها به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\mathbf{R}'_1\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11}\\\beta_{12}\\\beta_{13}\\\beta_{14}\\\beta_{15}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\beta_{11}+\beta_{12}=0$$
$$\beta_{13}=0$$
$$\beta_{14}+\beta_{15}=0$$

این قیدها بدان معنا است که در معادله اول، ضریب Y_{1t} و Y_{2t} قرینه هستند، ضریب Y_{3t} برابر صفر است و ضریب Y_{4t} و Y_{5t} نیز قرینه می‌باشند.

برای رابطه هم‌انباشتگی دوم، قیود موردنظر عبارتند از:

$$\mathbf{R}'_2\boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{21}\\\beta_{22}\\\beta_{23}\\\beta_{24}\\\beta_{25}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

یا

$$\beta_{21}=0$$
$$\beta_{23}+\beta_{25}=0$$
$$\beta_{24}=0$$

این قیدها بدان معنا است که ضریب Y_{1t} برابر صفر است، ضریب Y_{3t} و Y_{5t} قرینه هستند و ضریب Y_{4t} برابر صفر است.

برای رابطه هم‌انباشتگی سوم، قیود مذکور عبارتند از:

$$\mathbf{R}'_3\boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{31}\\\beta_{32}\\\beta_{33}\\\beta_{34}\\\beta_{35}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

یا

$$\beta_{31}=0$$
$$\beta_{32}=0$$
$$\beta_{33}=0$$
$$\beta_{34}+\beta_{35}=0$$

این قیدها بدان معنا است که ضریب Y_{1t}، Y_{2t} و Y_{3t} برابر صفر و ضرایب Y_{4t} و Y_{5t} قرینه‌اند.

برای آزمون محدودیت‌های اعمال شده بر روی بردارهای هم‌انباشتگی می‌توان از نسبت درستنمایی استفاده نمود. تصور کنید که $\hat{\lambda}_{UR,i}$ مقادیر ویژهٔ مدل نامقید و $\hat{\lambda}_{R,i}$ مقادیر ویژه مدل مقید باشد. برای آزمون معنادار بودن قیدها، نسبت درستنمایی را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$LR=-2[\ln L(H_0)-\ln L(H_1)]$$
$$=-T\left[\sum_{i=1}^{r}\ln(1-\hat{\lambda}_{R,i})-\sum_{i=1}^{r}\ln(1-\hat{\lambda}_{UR,i})\right] \qquad (21-55)$$

فرضیه H_0 مبنی بر وجود قیود و فرضیه H_1 مبنی بر عدم وجود قیود می‌باشد. در اینجا نسبت درستنمایی دارای توزیع χ^2 است که درجه آزادی آن برابر با تعداد قیود اعمال شده بر روی $\boldsymbol{\beta}$ و در صورت لزوم بر روی $\boldsymbol{\alpha}$ می‌باشد.

۲۱-۴-۵ عرض از مبدأ و روند در مدل VAR و VECM

وقتی دو یا بیش از دو متغیر دارای روند قطعی یا تصادفیِ یکسان باشند، می‌توانیم یک ترکیب خطی بدون روند پیدا کنیم: حتی اگر متغیرها دارای روند باشند. بدین منظور یک روند را در فضای هم‌انباشتگی وارد کنید. این بحث را برای هر متغیر مجازی که شوک‌های سیاستی یا برونزا را نشان می‌دهد، مصداق دارد.

مدل VAR(2) را در نظر بگیرید که مدل VECM متناظر با آن عبارت است از:

$$\Delta\mathbf{y}_t=\boldsymbol{\alpha\beta}'\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{A}_1^*\Delta\mathbf{y}_{t-1}+\mathbf{A}_0^*+\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad (21-56)$$

عرض از مبدأ $\mathbf{A}_0^*$ را به میانگین رابطه هم‌انباشتگی و جزء رشد، تجزیه می‌کنیم:

الف) چون $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}$ از مرتبه $I(0)$ است، لذا r رابطه هم‌انباشتگی وجود دارد که میانگین ثابت دارند:

$$E(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1})=\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\vdots\\\mu_r\end{bmatrix} \qquad (21-57)$$

رابطه فوق بیانگر بردار $r\times1$ است که شامل عرض از مبدأ برای روابط هم‌انباشتگی است.

ب) Δy_t از مرتبه $I(0)$ است و لذا دارای یک میانگین ثابت می‌باشد:

$$E(\Delta y_t) = \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{bmatrix} \quad (۲۱-۵۸)$$

γ بردار نرخ‌های رشد را نشان می‌دهد.

اگر از Δy_t امید ریاضی را حساب کنیم، خواهیم داشت:

$$E(\Delta y_t) = \alpha E(\beta' y_{t-1}) + A_1^* E(\Delta y_{t-1}) + A_0^* \quad (۲۱-۵۹)$$

چون $E(\Delta y_t) = E(\Delta y_{t-1})$ است، خواهیم داشت:

$$(I_p - A_1^*) E(\Delta y_t) = \alpha E(\beta' y_{t-1}) + A_0^* \quad (۲۱-۶۰)$$

$$(I_p - A_1^*)\gamma = \alpha\mu + A_0^* \Rightarrow A_0^* = (I_p - A_1^*)\gamma - \alpha\mu$$

$(I_p - A_1^*)\gamma$ جزء رشد و $\alpha\mu$ میانگین رابطه هم‌انباشتگی است. بدین ترتیب، جمله ثابت در مدل VAR شامل دو جزء است: نرخ‌های رشد خطی داده‌ها و میانگین روابط هم‌انباشتگی (عرض از مبدأها).

حال روندها و عرض از مبدأها را در مدل VAR هم‌انباشته بررسی می‌کنیم. بدین منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + A_0^* + \delta_t + u_t \quad (۲۱-۶۱)$$

با تجزیه A_0^* و δ به دو بردار که یکی مربوط به میانگین رابطه هم‌انباشتگی (μ, ρ) و دیگری نرخ‌های رشد (γ, τ)، خواهیم داشت:

$$A_0^* = \alpha\mu + \gamma$$

$$\delta = \alpha\rho + \tau$$

با جایگذاری در (۲۱-۶۱) خواهیم داشت:

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} + \alpha\mu + \gamma + \alpha\rho t + \tau t + u_t \quad (۲۱-۶۲)$$

$$= \underbrace{\alpha(\beta' y_{t-1} + \mu + \rho t)}_{\text{رابطه هم‌انباشتگی}} + \underbrace{(\gamma + \tau t)}_{\text{جملات غیرتصادفی که خارج از رابطهٔ هم‌انباشتگی است}} + u_t$$

برای مدل فوق، پنج حالت وجود دارد:

حالت اول: $\delta = \mu = 0$

$$\Delta y_t = \alpha\beta' y_{t-1} \quad (۲۱-۶۳)$$

در این حالت، هیچ جزء غیرتصادفی در سطح داده‌ها وجود ندارد، تمام عرض از مبدأها در روابط هم‌انباشتگی برابر صفر هستند.

حالت دوم: $\delta = \gamma = 0$

$$\Delta y_t = \alpha(\beta' y_{t-1} + \mu) \quad (۲۱-۶۴)$$

هیچ روند خطی در سطح داده‌ها و در روابط هم‌انباشتگی وجود ندارد. تنها جزء قطعی همان عرض از مبدأ در روابط هم‌انباشتگی است.

حالت سوم: $\delta = 0$

$$\Delta y_t = \alpha(\beta' y_{t-1} + \mu) + \gamma \quad (۲۱-۶۵)$$

چون $\delta = 0$ است، لذا $\alpha\rho t = -\tau t$ است. روند خطی در داده‌ها وجود دارد اما هیچ روندی در رگرسیون هم‌انباشتگی وجود نخواهد داشت.

حالت چهارم: $\tau = 0$

$$\Delta y_t = (\alpha\beta' y_{t-1} + \mu + \rho t) + \gamma \quad (۲۱-۶۶)$$

هم روابط داده‌ها (y_t) و هم روابط هم‌انباشتگی دارای روندهای خطی هستند. این مدل شامل متغیرهایی است که دارای روند مانا هستند یا یک رابطه تعادلی شامل روند خطی وجود دارد.

حالت پنجم: هیچ محدودیتی روی ضرایب وجود ندارد:

$$\Delta y_t = \alpha(\beta' y_{t-1} + \mu + \rho t) + (\gamma + \tau t) \quad (۲۱-۶۷)$$

روندهای خطی در روابط هم‌انباشتگی (که $I(0)$ هستند) و روندهای غیرخطی در سطح داده‌ها (y_t) که $I(1)$ هستند. روندهای خطی در تفاضل‌ها به معنای روندهای درجه ۲ در سطح داده‌ها است. به استثنای حالتی که یک دلیل تئوری مناسب برای ورود روندهای درجه ۲ وجود داشته باشد، توصیه نمی‌شود که چنین چیزی وارد مدل شود.

برای تعیین اینکه کدامیک از این پنج حالت را انتخاب کنیم. روش منحصر به‌فردی وجود ندارد. جوهانسن (۱۹۹۲) پیشنهاد می‌کند که در صورت لزوم، متغیرهای قطعی را همزمان با تعیین رتبه ماتریس $\mathbf{\Pi}$ وارد مدل کنیم. روش پیشنهادی وی بدین صورت است که پنج الگوی مذکور را از مقیدترین الگو (یعنی حالت اول) تا نامقیدترین الگو (حالت پنجم) برآورد کنیم. سپس فرضیه عدم وجود بردار هم‌انباشتگی $(r=0)$ را به ترتیب در هر پنج الگو آزمون کنیم. اگر براساس مقادیر بحرانی λ_{tr}، این فرضیه رد شد، آنگاه به آزمون فرضیه $r=1$ برای پنج الگوی مذکور می‌پردازیم. اگر فرضیه $r=1$ نیز رد شد، آنگاه فرضیه $r=1$ را برای این پنج الگو آزمون می‌کنیم. این آزمونها در جایی متوقف می‌شود که فرضیه H_0 رد نشود. در این حالت، تعداد بردارهای هم‌انباشتگی همراه با یکی از پنج الگوی مذکور به‌عنوان مدل مناسب، انتخاب می‌شود.

۲۱-۵ توابع واکنش در مدل VECM

در مدل VECM می‌توان مشابه مدل VAR توابع واکنش را مورد بررسی قرار داد. جزئیات این بحث در مثال زیر ارائه شده است.

مثال ۲۱-۱۲: مدل VAR(1) دو متغیره را در نظر بگیرید که فرم ساختاری آن عبارت است از:[1]

$$\theta \mathbf{y}_t = \mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{\Gamma}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{u}_t$$

که $\theta = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_{12} \\ -\theta_{21} & 1 \end{bmatrix}$ است. فرم حل شده عبارت است از:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{t-1} + \varepsilon_t \ , \ \varepsilon_t = \theta^{-1} \mathbf{u}_t$$

آزمون مانایی نشان می‌دهد که Y_{1t} و Y_{2t} نامانا هستند. اگر بدون توجه به نامانایی، مدل فوق را برآورد کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/62 \\ 0/0433 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0/3675 & 1/2720 \\ 0/1861 & 0/6304 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1t-1} \\ Y_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

برای بررسی مانایی ریشه‌های مشخصه ماتریس $\mathbf{A}_1$ را حساب می‌کنیم که به‌طور تقریبی برابر با:

[1] - این مثال بر اساس داده‌های فایل data27 می‌باشد.

$$|\mathbf{A}_1 - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0/37-\lambda & 1/27 \\ 0/18 & 0/62-\lambda \end{vmatrix} \equiv \lambda^2 - \lambda = 0$$

ریشه‌های مشخصه به‌ترتیب برابر با $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 0$ می‌باشند.

چون یکی از ریشه‌ها برابر با ۱ است، لذا Y_{1t} و Y_{2t} نامانا هستند. برای بررسی نامانایی آنها، ابتدا به ازای $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 0$ بردارهای مشخصه را نیز به‌دست می‌اوریم:

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -3/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین، ماتریس $\mathbf{C}$ و $\mathbf{C}^{-1}$ عبارتند از:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -3/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 0/189 & 0/623 \\ -0/189 & 0/377 \end{bmatrix}$$

حال طرفین مدل VAR(1) را در $\mathbf{C}^{-1}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_0 + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{C}(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_{t-1}) + \mathbf{C}^{-1}\varepsilon_t$$

$$\mathbf{z}_t = \mu + \lambda \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{w}_t$$

$\mathbf{w}_t = \mathbf{C}^{-1}\varepsilon_t$ ، $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t$ ، $\mu = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_0$ و $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{C} = \lambda$ است. λ ماتریس قطری است که عناصر آن برابر با ریشه‌های مشخصه می‌باشد. معادله فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0/334 \\ -0/291 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_{1t} \\ w_{2t} \end{bmatrix}$$

با ساده نمودن معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$Z_{1t} = 0/334 + Z_{1t-1} + w_{1t}$$

$$Z_{2t} = -0/291 + w_{2t}$$

بنابراین Z_{1t} نامانا است زیرا از فرایند گام تصادفی تبعیت می‌کند. حال طرفین معادله فوق را در $\mathbf{C}$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{C}\mathbf{z}_t = \mathbf{C}\mu + \mathbf{C}\lambda \mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{C}\mathbf{w}_t$$

که با جایگذاری به‌جای $\mathbf{C}\mathbf{z}_t$ و $\mathbf{C}\mu$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_0 + \mathbf{C}\lambda \mathbf{z}_{t-1} + \varepsilon_t$$

با توجه به اینکه $\mathbf{C}\boldsymbol{\mu}=A_0$ و $\mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ است، معادله فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/6276 \\ 0/0433 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{1t-1} \\ Z_{2t-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

که Y_{1t} و Y_{2t} عبارتند از:

$$Y_{1t}=1/6276+2Z_{1t-1}+\varepsilon_{1t}$$
$$Y_{2t}=0/0433+Z_{1t-1}+\varepsilon_{2t}$$

چون Y_{1t} و Y_{2t} تابعی از Z_{1t} هستند، لذا نامانا می‌باشند. در واقع نامانایی آنها ناشی از Z_{1t} است که Z_{1t} طبق فرایند گام تصادفی $Z_{1t}=0/334+Z_{1t-1}+w_{1t}$ شکل می‌گیرد. توجه شود که Y_{1t} و Y_{2t} دارای روند تصادفی (یعنی Z_{1t}) هستند و لذا نامانا می‌باشند، اما روند تصادفی آن‌ها مشترک است. به‌همین دلیل در طول زمان، علی‌رغم نامانا بودن، دارای یک رابطه تعادلی بلندمدت هستند که اصطلاحاً به آنها متغیرهای هم‌انباشته می‌گویند.

چون Y_{1t} و Y_{2t} نامانا، ولی هم‌انباشته هستند، لذا برای آنها مدل VECM را برآورد می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$\Delta\mathbf{y}_t=\boldsymbol{\Pi}\mathbf{y}_{t-1}+\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{y}_{t-1}+\boldsymbol{\varepsilon}_t$$

که $\boldsymbol{\Pi}=A_1-\mathbf{I}$ است. با برآورد این مدل، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta\mathbf{y}_t=\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0/6416 \\ 0/1866 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1/6035 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \\ X_t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$X_t=1$ است. در اینجا عرض از مبدأ هم به‌عنوان بخشی از رابطه تعادلی درنظر گرفته شده است. معادلات فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta\mathbf{y}_t=\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0/6416 \\ 0/1866 \end{bmatrix}\left[Y_{1t-1}-1/6035-Y_{2t-1}\right]+\begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

عبارت $Y_{1t-1}-1/6035-Y_{2t-1}$ رابطهٔ هم‌انباشتگی (رابطهٔ تعادلی بلندمدت) را نشان می‌دهد. برای هر یک از متغیرها، معادلهٔ تصحیح خطا عبارت است از:

$$\Delta Y_{1t}=-0/6416(Y_{1t-1}-1/6035-Y_{2t-1})+\varepsilon_{1t}$$
$$\Delta Y_{2t}=-0/1866(Y_{1t-1}-1/6035-Y_{2t-1})+\varepsilon_{2t}$$

معادله فوق نشان می‌دهد که Y_{1t} با ضریب ۰/۶۴۱۶- و Y_{2t} با ضریب ۰/۱۸۶۶ به عدم‌تعادل‌ها واکنش نشان می‌دهند. به عبارت دیگر، واکنش Y_{1t} به عدم‌تعادل‌ها، منفی و واکنش Y_{2t}، مثبت می‌باشد. هر عدم‌تعادلی که به وجود آید، متغیرها به‌گونه‌ای شروع به واکنش می‌کنند که عدم‌تعادل تصحیح شود. اما برخلاف متغیرهای مانا که بعد از رسیدن به تعادل، تغییرات صفرمی‌شود ($\Delta Y_{12}=\Delta Y_{22}=0$)، در اینجا تغییرات صفر نمی‌شوند، زیرا متغیرها نامانا هستند و هر شوکی که به آنها وارد شود، اثرات آن برای همیشه باقی می‌ماند.

اثر شوک‌های تصادفی را دقیقاً مشابه مدل VAR می‌توان انجام داد. برای بررسی اثر شوک‌های تصادفی، ابتدا ماتریس واریانس $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ را حساب می‌کنیم که عبارت است از:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} 10/4787 & 3/8045 \\ 3/8045 & 2/8119 \end{bmatrix}$$

حال با استفاده از ماتریس واریانس فرم استاندارد، واریانس‌های جملات خطای ساختاری و ضرایب آن را به‌دست می‌آوریم. برای شناسایی، لازم است که یکی از ضرایب ماتریس $\boldsymbol{\theta}$ را مشخص کنیم. طبق تجزیه چولسکی، $\theta_{12}=0$ را در نظر بگیرید. در این صورت با استفاده از روابطی که در فصل بیستم داشتیم، واریانس u_{1t}، u_{2t} و θ_{21} را به‌دست می‌آوریم:

$$\sigma^2_{u_1}=10/4787$$
$$\sigma^2_{u_2}=1/4306$$
$$\theta_{21}=0/363 07$$

از طرف دیگر رابطه بین اجزای خطای ساختاری و استاندارد با استفاده از $\boldsymbol{\varepsilon}_t=\boldsymbol{\theta}\mathbf{u}_t$ عبارت است از:

$$\varepsilon_{1t}=u_{1t}$$
$$\varepsilon_{2t}=\theta_{21}u_{1t}+u_{2t}$$

حال فرض کنید که در زمان t شوکی معادل با یک انحراف معیار به Y_{1t} وارد شود ($u_{1t}=\sigma_{u_1}=3/2371$).

در این صورت $\varepsilon_{1t}=3/2371$ و $\varepsilon_{2t}=1/17529$ و مقدار تعادلی Y_1 و Y_2 به‌ترتیب برابر با ۵/۶۰۳۵ و ۲ می‌باشد:

$$Y_{1t-1}-1/6035-2Y_{2t-1}=5/6035-1/6035-2(2)=0$$

بنابراین $\beta' \mathbf{y}_{t-1} = \text{۰}$ است. حال تصور کنید که در زمان t شوکی برابر با یک انحراف معیار به Y_{1t} وارد شود که اثر آن برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t} \\ \Delta Y_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{۰/۶۴۱۶} \\ \text{۰/۱۸۶۶} \end{bmatrix}(\text{۰}) + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} = \text{۳/۲۳۷۱} \\ \varepsilon_{2t} = \text{۱/۱۷۵۲۹} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{۳/۲۳۷۱} \\ \text{۱/۱۷۵۲۹} \end{bmatrix}$$

با توجه به تغییرات Y_{1t} و Y_{2t} در زمان t، مقدار جدید این متغیرها عبارت است از:

$$Y_{1t} = \text{۵/۶۰۳۵} + \text{۳/۲۳۷۱} = \text{۸/۸۴۰۶}$$

$$Y_{2t} = \text{۲} + \text{۱/۱۷۵۲۹} = \text{۳/۱۷۵۲۹}$$

عدم تعادل در دوره t برابر است با:

$$\beta' \mathbf{y}_{t_0} = Y_{1t} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}Y_{2t} = \text{۸/۸۴۰۶} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}(\text{۳/۱۷۵۲۹}) = \text{۰/۸۸۶۵}$$

در زمان $t+1$ فرض کنید که شوک جدید نداریم، اما چون در زمان t عدم تعادل وجود دارد، ($\beta' \mathbf{y}_t \neq \text{۰}$) لذا متغیرها به آن واکنش نشان می‌دهند:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t+1} \\ \Delta Y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{۰/۶۴۱۶} \\ \text{۰/۱۸۶۶} \end{bmatrix}(\text{۰/۸۸۶۵}) = \begin{bmatrix} -\text{۰/۵۶۸۸} \\ \text{۰/۱۶۵۴} \end{bmatrix}$$

بنابراین، مقادیر جدید عبارتند از:

$$Y_{1t+1} = Y_{1t} + \Delta Y_{1t+1} = \text{۸/۸۴۰۶} - \text{۰/۵۶۸۸} = \text{۸/۲۷۱۸}$$

$$Y_{2t+1} = Y_{2t} + \Delta Y_{2t+1} = \text{۳/۱۷۵۲۹} - \text{۰/۱۶۵۴} = \text{۳/۳۴۰۷}$$

عدم‌تعادل در زمان $t+1$ برابر است با:

$$\beta' \mathbf{y}_{t+1} = Y_{1t+1} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}Y_{2t+1} = \text{۸/۲۷۱۸} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}(\text{۳/۳۴۰۷}) = -\text{۰/۰۱۳۱۲}$$

واکنش در دوره $t+2$ به عدم تعادل دوره $t+1$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t+2} \\ \Delta Y_{2t+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{۰/۶۴۱۶} \\ \text{۰/۱۸۶۶} \end{bmatrix}(-\text{۰/۰۱۳۱۲}) = \begin{bmatrix} \text{۰/۰۰۸۴۱۸} \\ -\text{۰/۰۰۲۴۵} \end{bmatrix}$$

مقادیر جدید متغیرها در دوره $t+2$ برابر است با:

$$Y_{1t+2} = Y_{1t+1} + \Delta Y_{1t+2} = \text{۸/۲۷۱۹} + \text{۰/۰۰۸۴۱۸} = \text{۸/۲۸۰۲۲۷}$$

$$Y_{2t+2} = Y_{2t+1} + \Delta Y_{1t+2} = \text{۳/۳۴۰۷} - \text{۰/۰۰۲۴۵} = \text{۳/۳۳۸۲۶۶}$$

عدم تعادل در دوره $t+2$ برابر است با:

$$\beta' \mathbf{y}_{t+2} = Y_{1t+2} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}Y_{2t+2} = \text{۸/۲۸۰۲۲۷} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}(\text{۳/۳۳۸۲۶۶}) = \text{۰/۰۰۰۱۹۴}$$

واکنش متغیرها در دوره $t+3$ به عدم تعادل دوره $t+2$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_{1t+3} \\ \Delta Y_{2t+3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{۰/۶۴۱۶} \\ \text{۰/۱۸۶۶} \end{bmatrix}(\text{۰/۰۰۰۱۹۴}) = \begin{bmatrix} -\text{۰/۰۰۰۱۲} \\ \text{۰/۰۰۰۰۳۶۲} \end{bmatrix}$$

مقادیر جدید متغیرها در دوره $t+3$ برابر است با:

$$Y_{1t+3} = Y_{1t+2} + \Delta Y_{1t+3} = \text{۸/۲۸۰۲۳۷} - \text{۰/۰۰۰۱۲} = \text{۸/۲۸۰۱۰۲}$$

$$Y_{2t+3} = Y_{2t+2} + \Delta Y_{2t+3} = \text{۳/۳۳۸۲۶۶} + \text{۰/۰۰۰۰۳۶۲} = \text{۳/۳۳۸۳۰۳}$$

و عدم تعادل در دوره $t+3$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \beta' \mathbf{y}_{t+3} &= Y_{1t+3} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}Y_{2t+3} \\ &= \text{۸/۲۸۰۱۰۲} - \text{۱/۶۰۳۵} - \text{۲}(\text{۳/۳۳۸۳۰۳}) = \text{۰/۰۰۰۰۰۲۹} \cong \text{۰} \end{aligned}$$

بدین‌ترتیب کل افزایش متغیرها عبارت است از:

$$\Delta Y_{1t} = \text{۳/۲۳۷۱} - \text{۰/۵۶۸۸} + \text{۰/۰۰۸۴۱۸} - \text{۰/۰۰۰۱۲} = \text{۲/۶۷۶۶}$$

$$\Delta Y_{2t} = \text{۱/۱۷۵۲۹} + \text{۰/۱۶۵۴} - \text{۰/۰۰۲۴۵} + \text{۰/۰۰۰۰۳۶۲} = \text{۱/۳۳۸۳}$$

و در تعادل جدید، مقادیر تعادلی عبارتند از:

$$Y_1 = \text{۵/۶۰۳۵} + \text{۲/۶۷۶۶} = \text{۸/۲۸}$$

$$Y_2 = \text{۲} + \text{۱/۳۳۸۳} = \text{۳/۳۳۸۳}$$

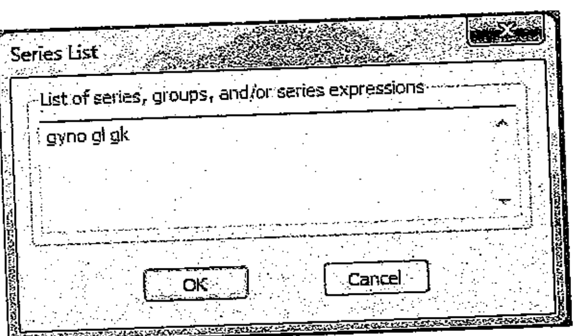
چون متغیرها، نامانا هستند لذا شوک وارده به Y_{1t} موجب شد تا مقدار Y_{1t} و Y_{2t} برای همیشه افزایش یابند و در یک تعادل جدید قرار بگیرند.

برآورد مدل VECM در Eviews

فایل data2

برای آزمون هم‌انباشتگی در حالت چند متغیره، مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم که پنجره Series List باز می‌شود.

Quick → Group Statistics → Johansen Cointegration Test



در پنجره فوق، نام متغیرها را وارد کرده و OK می‌کنیم که پنجره زیر را برای انجام آزمون هم‌انباشتگی، باز می‌کند.

Johansen Cointegration Test

Cointegration Test Specification

Deterministic trend assumption of test
Assume no deterministic trend in data:
1) No intercept or trend in CE or test VAR
2) Intercept (no trend) in CE - no intercept in VAR
Allow for linear deterministic trend in data:
3) Intercept (no trend) in CE and test VAR
4) Intercept and trend in CE - no intercept in VAR
Allow for quadratic deterministic trend in data:
5) Intercept and trend in CE - intercept in VAR
Summary:
6) Summarize all 5 sets of assumptions

* Critical values may not be valid with exogenous variables; do not include C or Trend.

Exog variables*

Lag intervals
1 3
Lag spec for differenced endogenous

Critical Values
MHM
Size 0.05
Osterwald-Lenum

OK Cancel

در پنجره فوق، تفاوت بین مدل‌های ۱ تا ۶ مربوط به عرض از مبدأ، روند و یا هر دو آنها است. فاصله وقفه (Lag Interval) به معنای برازش Δy_t روی Δy_{t-1} است. مثلاً ۱ تا ۲ یعنی Δy_t روی Δy_{t-1} و Δy_{t-2} برازش شده است. با انتخاب مدل مورد نظر، نتایج در ۳ قسمت ارائه می‌شود.

در قسمت اول، آمارهای λ_{trace} و λ_{max} ارائه می‌شود که تعداد بردارهای هم‌انباشتگی راآزمون می‌کند. ستون اول از سمت چپ، فرضیه صفر مبنی بر تعداد بردارهای هم‌انباشتگی را نشان می‌دهد. ستون دوم مقادیر ویژه(y_i ها) را نشان می‌دهد. در ستون سوم آماره های λ_{trace} و λ_{max} ، در ستون چهارم مقادیر بحرانی(جدول) و در ستون پنجم احتمال‌ها ارائه شده است. در ستون اول سه فرضیه مطرح شده است که:

۱- هیچ بردار هم‌انباشتگی وجود ندارد.

۲- حداکثر یک بردار هم‌انباشتگی وجود دارد.

۳- حداکثر دو بردار هم‌انباشتگی وجود دارد.

در اینجا وجود حداکثر صفر بردار هم‌انباشتگی رد می‌شود. Eviews این آزمون را تا جایی ادامه می‌دهد که فرضیه H رد نشود. بنابراین، فرضیه وجود حداکثر صفر بردار هم‌انباشتگی رد می‌شود، ولی وجود یک بردار رد نمی‌شود. بنابراین، یک بردار هم‌انباشتگی وجود دارد. ولی برای یک مدل سه متغیره، Eviews هر سه بردار را برآورد می‌کند.

قسمت اول: مقادیر آماره‌های λ_{trace} و λ_{max}

Group: UNTITLED Workfile: DATA2::Untitled\

View Proc Object Print Name Freeze Sample Sheet Stats Spec

Johansen Cointegration Test

Date: 01/24/14 Time: 08:18
Sample (adjusted): 1350 1380
Included observations: 31 after adjustments
Trend assumption: Linear deterministic trend
Series: GYNO GK GL
Lags interval (in first differences): 1 to 3

Unrestricted Cointegration Rank Test (Trace)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Trace Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.647505	45.40195	29.79707	0.0004
At most 1	0.257954	13.07765	15.49471	0.1120
At most 2	0.116192	3.828982	3.841466	0.0504

Trace test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

Unrestricted Cointegration Rank Test (Maximum Eigenvalue)

Hypothesized No. of CE(s)	Eigenvalue	Max-Eigen Statistic	0.05 Critical Value	Prob.**
None *	0.647505	32.32430	21.13162	0.0009
At most 1	0.257954	9.248670	14.26460	0.2660
At most 2	0.116192	3.828982	3.841466	0.0504

Max-eigenvalue test indicates 1 cointegrating eqn(s) at the 0.05 level
* denotes rejection of the hypothesis at the 0.05 level
**MacKinnon-Haug-Michelis (1999) p-values

در قسمت دوم، بردارهای هم‌انباشتگی (β) و ضرایب تعدیل (α) ارائه شده است. در اینجا عناصر ماتریس β به‌صورت β' نشان داده شده است. در β' هر سطر بیانگر یک بردار هم‌انباشتگی است.

قسمت دوم: بردارهای هم‌انباشتگی (β) و ضرایب تعدیل (α)

Unrestricted Cointegrating Coefficients (normalized by b'*S11*b=I):

GYNO	GK	GL
0.171751	-0.136303	0.337189
0.322458	-0.242886	-0.411317
0.300836	-0.051754	-0.351679

Unrestricted Adjustment Coefficients (alpha):

D(GYNO)	-3.650332	1.813925	-0.772596
D(GK)	0.919432	2.070389	0.103945
D(GL)	-2.171239	1.108295	0.160704

در قسمت سوم، نرمال‌سازی بردارهای هم‌انباشتگی و ضرایب تعدیل ارائه شده است. لازم به ذکر است که این نرمال سازی با شیوه‌های متفاوتی ارائه می‌شود. به عنوان مثال یک متغیر را تابعی از سایر متغیرها در نظر می‌گیرد. اما باید توجه داشت که از بین بردارهای هم‌انباشتگی بایستی آن را انتخاب کنیم که با تئوری و پیش‌فرض‌ها تناقض نداشته باشد. به عنوان مثال در اینجا که GYNO، GK و GL به ترتیب نرخ رشد تولید ناخالص داخلی، نرخ رشد سرمایه و نرخ رشد نیروی کار را نشان می‌دهد، از نظر علامت، بردار اول متناقض است ولی بردار دوم و سوم این تناقض را ندارند.

قسمت سوم: نرمال‌سازی ضرایب هم‌انباشتگی و ضرایب تعدیل

```
Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)
GYNO        GK          GL
1.000000    -0.793608   1.963239
            (0.13178)   (0.49081)

Adjustment coefficients (standard error in parentheses)
D(GYNO)     -0.626950
            (0.19259)
D(GK)       0.157914
            (0.15914)
D(GL)       -0.372913
            (0.10553)

2 Cointegrating Equation(s):    Log likelihood    -226.4042

Normalized cointegrating coefficients (standard error in parentheses)
GYNO        GK          GL
1.000000    0.000000    -61.69702
                        (14.1618)
0.000000    1.000000    -80.21624
                        (18.2098)

Adjustment coefficients (standard error in parentheses)
D(GYNO)     -0.042036   0.056976
            (0.38192)   (0.29116)
D(GK)       0.825527    -0.628189
            (0.29323)   (0.22354)
D(GL)       -0.015535   0.026758
            (0.20541)   (0.15659)
```

در جدول فوق، در ذیل Cointegration Equation نرمال‌سازی معادله اول ارائه شده است. بردار سطری اول بیانگر بردار هم‌انباشتگی اول است. بنابراین، بردار هم‌انباشتگی اول (یعنی β_1') و نرمال‌شدهٔ آن عبارت است از:

$$\beta_1' = [۰/۱۷۱۷۵۱ \quad -۰/۱۳۶۳۰۳ \quad ۰/۳۳۷۱۸۹]$$

$$\text{نرمال‌شده } \beta_1' = \left[\frac{۰/۱۷۱۷۵۱}{۰/۱۷۱۷۵۱} \quad \frac{-۰/۱۳۶۳۰۳}{۰/۱۷۱۷۵۱} \quad \frac{۰/۳۳۷۱۸۹}{۰/۱۷۱۷۵۱}\right]$$

$$= [1 \quad -۰/۷۹۳۶۰۸ \quad ۱/۹۶۳۲۳۹]$$

اولین بردار ضرایب تعدیل و نرمال شده آن عبارت است از:

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} -۳/۶۵۰۳۳۲ \\ ۰/۹۱۹۴۳۲ \\ -۲/۱۷۱۲۳۹ \end{bmatrix}$$

$$\text{نرمال شده } \alpha_1 = \alpha_1 \times (۰/۱۷۱۷۵۱) = \begin{bmatrix} -۰/۶۲۶۹۵۰ \\ ۰/۱۵۷۹۱۴ \\ -۰/۳۷۲۹۱۳ \end{bmatrix}$$

در آخر این جدول، دوبردار نرمال شدهٔ دیگر نیز ارائه شده است.

چون بردار هم‌انباشته‌کنندهٔ β به‌طور منحصر به‌فرد مشخص نیست لذا ممکن است نیاز به اعمال برخی قیود داشته باشیم. این محدودیت‌ها را می‌توان هم بر β و هم بر α اعمال نمود. برای اعمال این قیود، ابتدا مدل VAR را به روشی که قبلاً توضیح داده شد تخمین می‌زنیم و سپس قیود مورد نظر را اعمال می‌کنیم. مراحل کار در زیر تشریح شده است.

ابتدا مدل VAR را تخمین می‌زنیم (جزئیات آن در بخش‌های قبلی توضیح داده شده است و در اینجا خلاصه‌ای از آن را ارائه می‌کنیم).

Quick → Estimate VAR

VAR Specification
Basics | Cointegration | VEC Restrictions
VAR Type
Unrestricted VAR
Vector Error Correction
Endogenous Variables
gyno gl gk
Estimation Sample
1338 1388
Lag Intervals for Endogenous:
1 3
Exogenous Variables
c
OK
Cancel

نتایج تخمین مدل VAR عبارت است از:

Var: UNTITLED Workfile: DATA2::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Stats | Impulse | Resids

Vector Autoregression Estimates

Vector Autoregression Estimates
Date: 01/24/14 Time: 08:32
Sample (adjusted): 1349 1380
Included observations: 32 after adjustments
Standard errors in ( ) & t-statistics in [ ]

	GYNO	GK	GL
GYNO(-1)	0.658195	0.153057	0.222259
	(0.37653)	(0.29970)	(0.20456)
	[1.74805]	[0.51070]	[1.08651]
GYNO(-2)	0.081535	0.586059	-0.000873
	(0.39185)	(0.31190)	(0.21289)
	[0.20808]	[1.87902]	[-0.00412]
GYNO(-3)	-0.355058	-0.111962	-0.405532
	(0.35145)	(0.27974)	(0.19094)
	[-1.01025]	[-0.40023]	[-2.12386]
GK(-1)	0.221070	0.523638	-0.001937
	(0.28560)	(0.22733)	(0.15516)
	[0.77404]	[2.30343]	[-0.01248]
GK(-2)	0.252608	0.093825	0.158399
	(0.32361)	(0.25758)	(0.17581)
	[0.78060]	[0.36426]	[0.90096]
GK(-3)	-0.175047	-0.070528	-0.014365

در پنجره فوق، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

View → Cointegration Test

با انتخاب مسیر فوق، پنجره‌ای به نام Johansen Cointegration Test باز می‌شود که به صورت زیر است. در این پنجره می‌توان آزمون‌های هم‌انباشتگی را انجام داد. در این خصوص گزینه‌های مختلفی وجود دارد که بیانگر وجود و یا عدم‌وجود عرض از مبدأ و روند در مدل VAR و VECM می‌باشد.

Johansen Cointegration Test

Cointegration Test Specification | VEC Restrictions

Deterministic trend assumption of test
Assume no deterministic trend in data:
( ) 1) No intercept or trend in CE or test VAR
( ) 2) Intercept (no trend) in CE - no intercept in VAR
Allow for linear deterministic trend in data:
(•) 3) Intercept (no trend) in CE and test VAR
( ) 4) Intercept and trend in CE - no intercept in VAR
Allow for quadratic deterministic trend in data:
( ) 5) Intercept and trend in CE - intercept in VAR
Summary:
( ) 6) Summarize all 5 sets of assumptions

* Critical values may not be valid with exogenous variables; do not include C or Trend.

Exog variables*

Lag intervals
1 3
Lag spec for differenced endogenous

Critical Values
(•) MHM
Size 0.05
( ) Osterwald-Lenum

OK | Cancel

در پنجره فوق، گزینه‌های مربوط به آزمون هم‌انباشتگی را انتخاب می‌کنیم که قبلاً توضیح داده شد. سپس گزینه VEC Restrictions را انتخاب می‌کنیم که در پنجره زیر نشان داده شده است:

Johansen Cointegration Test

Cointegration Test Specification | VEC Restrictions

Restrictions may be placed on the coefficients B(r,k) of the r-th cointegrating relation:

B(r,1)*GYNO + B(r,2)*GL + B(r,3)*GK

VEC Coefficient Restrictions
[✓] Impose Restrictions
Enter restriction: (Example: B(1,1)=1, A(2,1)=0)

Optimization
Max Iterations:
500
Convergence:
0.0001

OK | Cancel

حال می‌توان محدودیت‌های مورد نظر را در قسمت VEC Coefficient Restrictions وارد نمود. برای اعمال قیود بر β بایستی عنصر (i, j) را در β' در نظر بگیریم که با $B(i, j)$ نشان داده می‌شود. رابطه انباشته کننده i ام به‌صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$B(i,1) * Y1 + B(i,2) * Y2 + \ldots + B(i,k) * Yk$$

که $Y1, \ldots, Yk$ متغیرهای درونزا (با وقفه) هستند. سپس اگر بخواهیم قیدی را روی ضریب Y_1 برای معادله هم‌انباشته‌کنندهٔ اول اعمال کنیم، بایستی آن را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$B(1,1) = 1$$
$$B(2,1) = 1$$

با اعمال قیود بر روی ضرایب تعدیل، عنصر (i, j)ام ماتریس α را با $A(i, j)$ در نظر می‌گیریم. جملات تصحیح خطاها در معادله i ام مدل VEC به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A(i,1) * \text{CointEq1} + A(i,2) * \text{CointEq2} + \ldots + A(i,r) * \text{CointEqr}$$

مسائل

۱-۲۱ مدل VAR به‌صورت زیر تخمین زده شده است:

$$X_t = \cdot/\text{۳} + \cdot/\text{۷}Y_{t-1} + \cdot/\text{۲۴}X_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$Y_t = -\cdot/\text{۶} + \cdot/\text{۶}Y_{t-1} + \cdot/\text{۵۲}X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

مدل فوق را به‌صورت مدل VECM بنویسید.

۲-۲۱ در مدل VECM ماتریس Π به‌صورت $\alpha'\beta$ نوشته می‌شود، تفسیر α و β چیست؟

۳-۲۱ مدل VAR(۲) با دو متغیر را به مدل VECM تبدیل کنید.

۴-۲۱ اگر در مدل VECM مرتبه ماتریس Π کامل باشد، چه‌ویژگی‌های خاصی پیدا می‌کند؟

۵-۲۱ اگر در مدل VECM، ماتریس $\Pi = 0$ باشد، به چه معنا است و در این حالت، مدل VECM چه وضعیتی را توصیف می‌کند؟

۶-۲۱ اگر در تخمین مدل VECM بردار هم‌انباشتگی به‌دست نیاید، بیانگر چیست؟

۷-۲۱ ثابت کنید که در روش جوهانسون، حداکثر تابع درستنمایی معادل با حداقل نمودن $|\Omega|$ است.

۸-۲۱ در مدل VECM عبارت Πy_{t-1} چه چیزی را توصیف می‌کند؟

ضمیمه فصل ۲۱: تخمین مدل VECM در Stata

تخمین مدل‌های VECM در Stata

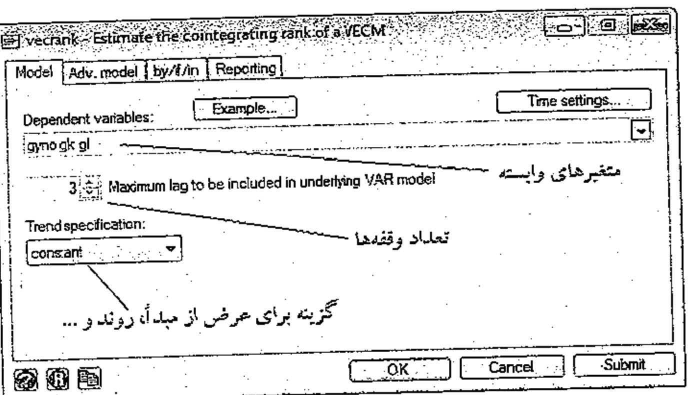
فایل data2

ابتدا آزمون هم‌انباشتگی و تعیین تعداد بردارهای هم‌انباشتگی و سپس برآورد مدل VECM را انجام می‌دهیم.

آزمون هم‌انباشتگی

بدین منظور مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Cointgeration rank of a VECM → Moltivariate time series → Statistics



نتایج تخمین عبارت است از:

```
. vecrank gyno gl gk; trend(constant) lags(3)

                    Johansen tests for cointegration
Trend: constant                                    Number of obs =   32
Sample:  1349 - 1380                                        Lags =    3
-------------------------------------------------------------------------
                                                               5%
maximum                                           trace    critical
  rank    parms      LL          eigenvalue    statistic    value
    0      21     -265.0795          .          35.1858     29.68
    1      26     -252.77559     0.53652        10.5780*    15.41
    2      29     -249.32753     0.19387         3.6819      3.76
    3      30     -247.48659     0.10869
-------------------------------------------------------------------------
```

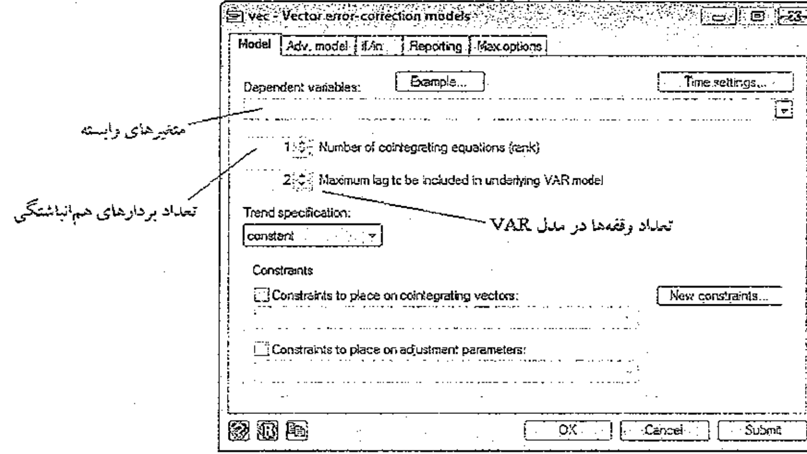
تعداد بردارهای هم‌انباشتگی برابر با ۱ است

چون مقدار $\lambda_{tr} = ۳۵/۱۸$ از عدد بحرانی (۲۹/۶۸) بزرگتر است، لذا وجود صفر بردار هم‌انباشتگی رد می‌شود. اما چون $\lambda_{tr} = ۱۰/۵۸$ کوچکتر از عدد بحرانی (۱۵/۴۱) است لذا وجود ۱ بردار هم‌انباشتگی رد نمی‌شود.

تخمین مدل VECM

با انتخاب مسیر زیر پنجره مربوط به تخمین مدل VECM باز می‌شود:

Vector error correction model (VECM) → Moltivariate time series → Statistics



نتایج تخمین عبارت است از:

```
. vec gyno gk gl, trend(constant)

Vector error-correction model

Sample:  1348 - 1380                          No. of obs      =        33
                                              AIC             =  17.49035
Log likelihood = -271.5908                    HQIC            =  17.74974
Det(Sigma_ml)  =  2825.427                    SBIC            =  18.25128

Equation           Parms      RMSE     R-sq      chi2     P>chi2
----------------------------------------------------------------
D_gyno               5     7.64631   0.1465   4.804982   0.4401
D_gk                 5     4.70616   0.3874   17.70687   0.0033
D_gl                 5     4.63097   0.0995   3.093898   0.6855
----------------------------------------------------------------

------------------------------------------------------------------------------
             |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
D_gyno       |
        _ce1 |
         L1. |  -.2058779   .4427715    -0.46   0.642    -1.073694    .6619383
        gyno |
         LD. |  -.1482955    .370742    -0.40   0.689    -.8749364    .5783454
          gk |
         LD. |  -.0770953   .3039337    -0.25   0.800    -.6727945    .5186039
          gl |
         LD. |  -.2900657   .5821137    -0.50   0.618    -1.430988    .8508561
       _cons |  -.2560491   1.384117    -0.18   0.853    -2.968869    2.456771
```



```
D_gl         |
        _ce1 |
         L1. |   .1960888   .2681638     0.73   0.465    -.3295026    .7216803
        gyno |
         LD. |  -.0394502   .2245393    -0.18   0.861    -.4795391    .4006387
          gk |
         LD. |  -.1081166    .184077    -0.59   0.557    -.4689009    .2526677
          gl |
         LD. |  -.1563901   .3525562    -0.44   0.657    -.8473875    .5346074
       _cons |   .2051582   .8382885     0.24   0.807    -1.437857    1.848173
------------------------------------------------------------------------------

Cointegrating equations

Equation           Parms    chi2     P>chi2
-------------------------------------------
_ce1                 2   70.14917   0.0000
-------------------------------------------

Identification:  beta is exactly identified
                 Johansen normalization restriction imposed
------------------------------------------------------------------------------
        beta |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
_ce1         |
        gyno |          1          .        .       .            .           .
          gk |  -.5558976   .0941547    -5.90   0.000    -.7404374   -.3713578
          gl |   -1.00347    .241094    -4.16   0.000    -1.476005   -.5309347
       _cons |  -.1728097          .        .       .            .           .
------------------------------------------------------------------------------
```

جدول آخر بیانگر رابطه هم‌انباشتگی است که به صورت زیر می‌باشد:

$$e_{1t} = GYNO_t - ۰/۱۷۲۸ - ۰/۵۵۵۹GK_t - ۱/۰۰۳۵GL_t$$

این رابطه اگر برابر با صفر باشد، به معنای برقراری دقیق تعادل می‌باشد، ولی چون دقیقاً برقرار نیست لذا بیانگر خطای تعادل یا انحراف از تعادل است.

نتیجه معادلات فوق برای هر یک از متغیرها به صورت زیر است:

$$\Delta GYNO = -۰/۲۵۶ - ۰/۲۰۵۹e_{1t-1} - ۰/۱۴۸۳\Delta GYNO_{t-1} - ۰/۰۷۷۱\Delta GK_{t-1} - ۰/۲۹۰۱\Delta GL_{t-1}$$

$$\Delta GK_t = -۰/۲۰۵ + ۰/۷۷۶۶e_{1t-1} - ۰/۵۹۷۲\Delta GYNO_{t-1} - ۰/۰۳۳۳\Delta GK_{t-1} + ۰/۹۹۴۶\Delta GL_{t-1}$$

$$\Delta GL_t = -۰/۲۰۵ + ۰/۱۹۶۱e_{1t-1} - ۰/۰۳۹۴\Delta GYNO_{t-1} - ۰/۱۰۸۱\Delta GK_{t-1} - ۰/۱۵۶۳\Delta GL_{t-1}$$

در این مدل بردار هم‌انباشتگی و بردار ضرایب تعدیل عبارتند از:

$$\beta' = [۱ \quad -۰/۵۵۵۹ \quad -۱/۰۰۳۵]$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} -۰/۲۰۵۹ \\ ۰/۷۷۶۶ \\ ۰/۱۹۶۱ \end{bmatrix}$$

فصل بیست و دوم

داده‌های ترکیبی[1]

۲۲-۱ مقدمه

در فصول قبلی، مباحثی که ارائه گردید، مبتنی بر استفاده از داده‌های سری زمانی یا داده‌های مقطعی بودند. تاکنون بحثی در مورد ترکیب داده‌های مقطعی و سری زمانی نداشتیم و یا اگر بحثی هم مطرح می‌شد، صرفاً داده‌های مقطعی و سری زمانی را با هم ترکیب کرده و یک رگرسیون معمولی را با روش OLS یا سایر روش‌ها تخمین می‌زدیم. ماهیت داده‌های ترکیبی به‌گونه‌ای است که حاوی نکات و مفاهیم بیشتری هستند که می‌توان با استفاده از آنها، تحلیل‌های بیشتری را ارائه نمود. به هر حال، داده‌های ترکیبی از یک طرف تغییرات زمانی را نشان می‌دهند و از طرف دیگر تغییرات درون‌مقطعی یا درون‌گروهی یا فردی را نیز منعکس می‌کنند. با توجه به این نکات، در این فصل به بررسی ماهیت داده‌های ترکیبی و مسائل و مشکلات تخمین معادلات رگرسیون ترکیبی می‌پردازیم.

۲۲-۲ داده‌های ترکیبی

داده‌های ترکیبی، مجموعه‌ای از داده‌ها است که شامل چند مقطع و یک دوره زمانی می‌باشد. مقطع می‌تواند بیانگر افراد، گروه‌ها، بنگاه‌ها، صنایع، کشورها و ... باشد. در حالت کلی، تعداد مقطع‌ها را با n نشان می‌دهیم. دوره زمانی نیز می‌تواند روز، هفته، ماه، فصل و سال باشد. طول دوره

1- panel data

زمانی را برابر با T در نظر می‌گیریم. بدین ترتیب مشاهدات مربوط به متغیرهای X و Y را با X_{it} و Y_{it} نشان می‌دهیم که مقطع‌ها شامل $i=1,...,n$ و زمان شامل $t=1,...,T$ می‌باشد.

داده‌های ترکیبی را می‌توان به‌صورت جدول (۱-۲۲) یا (۲-۲۲) نشان داد. برای هر متغیر، nT مشاهده داریم. توجه شود که اگر X شامل بیش از یک متغیر باشد، آنگاه X_{kit} بیانگر مشاهدات مربوط به متغیر kام در مقطع i و در زمان t می‌باشد که $k=1,...,K$ است. در اینجا برای سادگی، فقط یک متغیر توضیحی را درنظر می‌گیریم.

جدول ۱-۲۲

مقطع (i)	زمان (t)	Y_{it}	X_{it}
$i=1$	۱	Y_{11}	X_{11}
	۲	Y_{12}	X_{12}
	⋮	⋮	⋮
	T	Y_{1T}	X_{1T}
$i=2$	۱	Y_{21}	X_{21}
	۲	Y_{22}	X_{22}
	⋮	⋮	⋮
	T	Y_{2T}	X_{2T}
⋮	⋮	⋮	⋮
$i=n$	۱	Y_{n1}	X_{n1}
	۲	Y_{n2}	X_{n2}
	⋮	⋮	⋮
	T	Y_{nT}	X_{nT}

جدول ۲-۲۲

مقطع (i) / زمان (t)	Y				X			
	۱	۲	…	n	۱	۲	…	n
۱	Y_{11}	Y_{21}	…	Y_{n1}	X_{11}	X_{21}	…	X_{n1}
۲	Y_{12}	Y_{22}	…	Y_{n2}	X_{12}	X_{22}	…	X_{n2}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮		⋮
T	Y_{1T}	Y_{2T}	…	Y_{nT}	X_{1T}	X_{2T}	…	X_{nT}

داده‌های ترکیبی به‌دلیل آنکه هم تغییرات زمانی و هم تغییرات درون هر مقطع را منعکس می‌کند، می‌تواند اطلاعات بیشتری را منعکس نماید. بسیاری از نکاتی که در تحلیل سری‌های زمانی، نادیده گرفته می‌شود و یا غیرقابل مشاهده هستند، در تحلیل داده‌های ترکیبی روشن می‌شوند. به ویژه ناهمگنی‌هایی که غالباً در تحلیل سری زمانی از آنها چشم‌پوشی می‌شود و اصطلاحاً غیرقابل مشاهده هستند، در تحلیل داده‌های ترکیبی امکان بررسی آنها فراهم می‌گردد. به‌عنوان مثال در برآورد تابع تولید یک صنعت که شامل تعدادی بنگاه است، اگر از داده‌های سری زمانی استفاده کنیم، به‌طور ضمنی فرض کرده‌ایم که بنگاه‌ها همگن هستند. اما از طرف دیگر، وقتی از داده‌های مقطعی استفاده می‌کنیم، فقط تفاوت بنگاه‌ها را لحاظ کرده‌ایم و تغییرات زمانی آنها را نادیده گرفته‌ایم. بدین ترتیب، داده‌های ترکیبی امکان بررسی هر دو تغییر (مقطعی و زمانی) را فراهم می‌کند.

مثال ۱-۲۲: به منظور بررسی رابطه بین ازدواج و دستمزد مردان، داده‌های زیر گردآوری شده است که شامل $n=4$ مرد و $T=6$ سال می‌باشد.

مقطع (i)	سال	Y_{it} دستمزد سالانه	X_{it} وضعیت تأهل متأهل = ۱ مجرد = ۰	$\bar{Y}_{it}$ میانگین هر مقطع
$i=1$	۱	۱۰۰۰	۰	۱۰۰۰
	۲	۱۰۵۰	۰	
	۳	۹۵۰	۰	
	۴	۱۰۰۰	۰	
	۵	۱۱۰۰	۰	
	۶	۹۵۰	۰	
$i=2$	۱	۲۰۰۰	۰	۲۰۰۰
	۲	۱۹۵۰	۰	
	۳	۲۰۰۰	۰	
	۴	۲۰۰۰	۰	
	۵	۱۹۵۰	۰	
	۶	۲۱۰۰	۰	
$i=3$	۱	۲۹۰۰	۰	۳۲۵۰
	۲	۳۰۰۰	۰	
	۳	۳۱۰۰	۰	
	۴	۳۵۰۰	۱	
	۵	۳۴۵۰	۱	
	۶	۳۵۵۰	۱	
$i=4$	۱	۳۹۵۰	۰	۴۲۵۰
	۲	۴۰۵۰	۰	
	۳	۴۰۰۰	۰	
	۴	۴۵۰۰	۱	
	۵	۴۶۰۰	۱	
	۶	۴۴۰۰	۱	

براساس این داده‌ها می‌توان رابطه بین دستمزد و ازدواج (وضعیت تأهل) را بررسی کرد. ابتدا فرض کنید که فقط داده‌های مقطعی را برای سال چهارم داشته باشیم. در این صورت، دستمزد این چهار نفر به‌صورت زیر خواهد بود:

i	۱	۲	۳	۴
Y_{i4}	۱۰۰۰	۲۰۰۰	۳۵۰۰	۴۵۰۰
X_{i4}	۰	۰	۱	۱

این داده‌ها نشان می‌دهد که بین ازدواج و دستمزد رابطه مثبت وجود دارد. به‌عنوان مثال برای سال چهارم، معادله $Y_{i4}=\alpha+\beta X_{i4}+u_{i4}$ تعریف کرده و با روش OLS برآورد می‌کنیم:

$$\hat{Y}_{i4}=1500+2500X_{i4}$$
$$(3)\quad(3/5)$$

به ازای $X_{i4}=0$ متوسط دستمزد مردان مجرد برابر با ۱۵۰۰ به‌دست می‌آید و اگر $X_{i4}=1$ باشد، متوسط دستمزد مردان متأهل برابر با ۴۰۰۰ (= ۲۵۰۰ + ۱۵۰۰) خواهد بود. بدین‌ترتیب، ازدواج سبب افزایش دستمزد می‌شود! این نتیجهٔ کاملاً عجیبی است و نمی‌تواند واقعی باشد. زیرا ممکن است مسائلی در ورای این یافته وجود داشته باشد که از دید ما مخفی مانده و یا غیرقابل مشاهده باشند. این عوامل غیرقابل مشاهده را «ناهمگنی مشاهده‌نشده»[1] می‌گویند. به‌عنوان مثال توانایی افراد را نمی‌دانیم و بدون توجه به آن، معادله فوق را برآورد کرده‌ایم. می‌توان چنین استدلال کرد که مردانی که توانایی بالاتری دارند، دارای دستمزد بالاتری هستند و بر حسب اتفاق آنها بیشتر تمایل به ازدواج دارند! بنابراین، رابطه فوق نه به‌خاطر ازدواج، بلکه به‌خاطر قابلیت و توانایی، به‌وجود آمده است. اگر می‌توانستیم اثر ناهمگنی مشاهده‌نشده (در اینجا توانایی) را حذف کنیم آنگاه نتیجه فوق تغییر می‌کرد و ممکن بود اختلاف دستمزد به خاطر ازدواج، بسیار کمتر از ۲۵۰۰ باشد. اگر این معادله را برای $t=5$ و یا برای $t=6$ برآورد کنیم، نتیجهٔ مشابهی به‌دست خواهد آمد. لذا بدیهی است که تخمین ما دچار اریب است و اریب نیز ناشی از ناهمگنی مشاهده‌نشده یا متغیر حذف‌شده (یعنی توانایی که می‌تواند ناشی از آموزش، تجربه و ... باشد) است. بدیهی است که اثر متغیر حذف‌شده، خود را در u_{it} نشان می‌دهد و این موجب می‌شود تا بین u_{it} و X_{it} همبستگی ایجاد شود که یکی از فروض اساسی معادله رگرسیون (یعنی عدم همبستگی

1- unobserved heterogeneity

بین جزء خطا و متغیر توضیحی) نقض می‌شود. نقض این فرض موجب اریب ضریب X_{it} می‌شود.

تخمین‌زنندهٔ OLS مقطعی صرفاً متکی بر مقایسه «بین مقطعی» می‌باشد، یعنی در یک زمان، افراد را در مقاطع مختلف مقایسه می‌کند و توجهی به تغییرات درون‌مقطعی نمی‌کند. برای حل این مشکل، می‌توان داده‌های بیشتری را استفاده نمود و به‌جای فقط یک سال (در مثال فوق، سال چهارم) از ۶ سال استفاده نمود. این روش معروف به OLS تلفیقی یا تجمیعی[1] است. ابتدا معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{it}=\alpha+\beta X_{it}+u_{it}\quad;\ i=1,\dots,4\ ,\quad t=1,\dots,6$$

تخمین OLS تجمیعی عبارت است از:

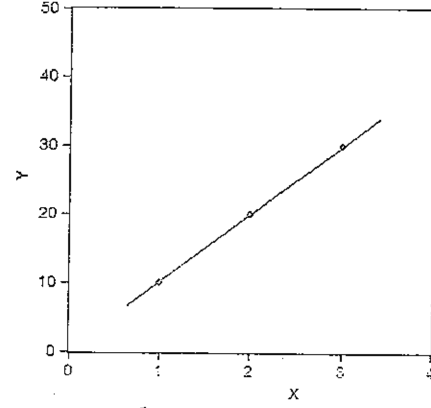
$$\hat{Y}_{it}=2166/67+1833/3X_{it}$$
$$(236/2)\quad(472/4)$$

طبق معادله فوق، متوسط دستمزد مردان مجرد ۲۱۶۶ و مردان متأهل ۴۰۰۰=۲۱۶۶/۶۷+۱۸۳۳/۳۳ است که بدین ترتیب تفاوت دستمزد مردان متأهل و مجرد حدود ۱۸۳۳ می‌باشد. در مقایسه با مدل مقطعی، نتایج تا حدودی تعدیل شده است. این رقم، تفاوت بین داده‌های قبل و بعد از ازدواج را نشان می‌دهد. این تخمین هنوز در معرض اریب است که ناشی از «ناهمگنی مشاهده نشده» است که موجب همبستگی بین u_{it} و X_{it} می‌شود. با وجود این، OLS تجمیعی از OLS مقطعی، اریب کمتری دارد. زیرا OLS تجمیعی، تغییرات درون‌گروهی یا درون‌مقطعی را نیز به حساب می‌آورد. اما مشکل OLS تجمیعی این است که ضرایب را برای همهٔ زمان‌ها و مقاطع، یکسان فرض می‌کند. این در حالی است که اگر بپذیریم توانایی افراد متفاوت است، در این صورت قبول کرده‌ایم که متوسط دستمزد افراد متفاوت است که کمترین آن برای فرد ۱ و بیشترین آن برای فرد ۴ می‌باشد. اگر برای هر فرد یک رگرسیون برآورد کنیم آنگاه عرض از مبدأ برای فرد ۱ تا ۴ به ترتیب ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۵۰۰ و ۴۵۰۰ خواهد شد. بنابراین توانایی این افراد با هم متفاوت است و لذا عرض از مبدأ نمی‌تواند ثابت بماند. یعنی رگرسیون‌هایی داریم که دچار انتقال می‌شوند و OLS تجمیعی این را در نظر نمی‌گیرد و لذا دچار اریب می‌شود.

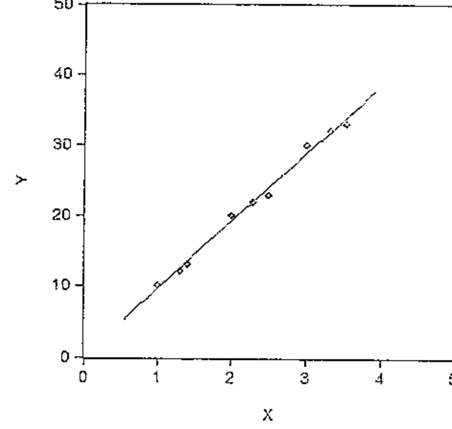
مثال ۲-۲۲: ناهمگنی بنگاه‌های تولیدی: تصور کنید که برای یک سال معین داده‌های تولید (Y) و نهاده کار (X) برای ۳ بنگاه که در یک صنعت فعالیت دارند، در نمودار

1- pooled-OLS

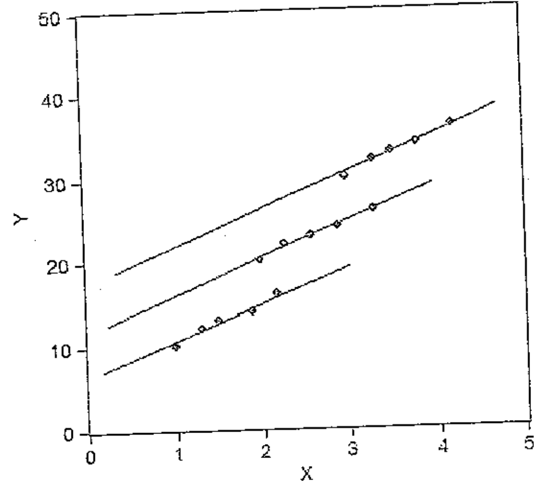
زیر ترسیم شده است. ملاحظه می‌شود که یک رابطه بسیار قوی به چشم می‌خورد که ناشی از مقایسهٔ بین‌مقطعی است.



حال داده‌ها را بیشتر می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای هر بنگاه، داده‌های ۳ سال را ترسیم می‌کنیم. نتایج در نمودار زیر نشان داده شده است:



اگر باز هم تعداد داده‌ها را افزایش دهیم، جزئیات بیشتری روشن خواهد شد؛ به‌گونه‌ای که برای هر بنگاه رابطهٔ خاصی بین Y و X شکل می‌گیرد. در نمودار زیر برای هر بنگاه ۵ مشاهده داریم:



۳-۲۲ مدل‌های رگرسیونی داده‌های ترکیبی

به‌طور کلی، برای بررسی داده‌های ترکیبی، می‌توان بحث را با معادله رگرسیون زیر شروع نمود:

$$Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha Z_i + \varepsilon_{it} \qquad (۱-۲۲)$$

X_{it} متغیر توضیحی است که هم در طول زمان و هم در بین گروه‌ها تغییر می‌کند. Z_i خصوصیات ویژه هر فرد یا گروه را نشان می‌دهد که در واقع ناهمگنی‌های بین‌گروهی را منعکس می‌کند، مانند تفاوت یک فرد با فرد دیگر، یا تفاوت بنگاه‌ها و مانند آن. Z_i شامل یک جمله ثابت و مجموعه‌ای از متغیرهای خاصِ هر فرد یا گروه است که ممکن است قابل مشاهده باشد؛ مانند سن، جنس، مکان و ... و یا غیرقابل مشاهده باشد، مانند ویژگی‌های خاصِ هر خانواده، ناهمگنی‌های فردی در مهارت یا ترجیحات و ... . فرض بر این است که تمام این ناهمگنی‌ها در طول زمان به قوت خود باقی است و ثابت می‌ماند. اگر Z_i برای همهٔ افراد قابل مشاهده باشد، در این صورت مدل فوق را می‌توان مانند یک مدل خطی معمولی در نظر گرفت و آن را با OLS برآورد نمود. اما به طور کلی چند حالت وجود دارد که به بررسی آنها می‌پردازیم.

۱- رگرسیون تجمیعی[1]: اگر Z_i فقط شامل یک جمله ثابت باشد که برای همهٔ گروهها یکسان است، در این صورت معادله زیر را خواهیم داشت:

$$Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha + \varepsilon_{it} \quad (۲۲-۲)$$

این معادله با روش OLS قابل برآورد است که تخمین‌های آن سازگار و کارا خواهند بود.

۲- اثرات ثابت[2]: اگر Z_i «مشاهده شده» نباشد اما با X_{it} همبستگی داشته باشد، در این صورت برای هر گروه یک عرض از مبدأ (α_i) خواهیم داشت که معادلهٔ آن عبارت است از:

$$Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha_i + \varepsilon_{it} \quad (۲۲-۳)$$

در اینجا $\alpha_i = \alpha Z_i$ است که تمام اثرات قابل مشاهده را دربر دارد و بیانگر یک میانگین شرطی قابل تخمین می‌باشد. یعنی به‌جای αZ_i یک میانگین شرطی برای گروه i معرفی می‌کند که برابر α_i است. به‌عبارت دیگر متغیر غیرقابل مشاهدهٔ Z_i را حذف کرده و به جای آن α_i را قرار داده‌ایم. بدیهی است که تخمین معادله (۲۲-۳) با OLS منجر به نتایج ناسازگار به خاطر مشکل «متغیرهای حذف شده» می‌شود.

در رویکرد اثرات ثابت، به هر گروه یک مقدار ثابت مانند α_i اختصاص داده می‌شود. بایستی توجه داشت که اصطلاح «ثابت» بدان معنا است که «در طول زمان تغییر نمی‌کند» ولی از یک گروه به گروه دیگر دچار تغییر می‌شود.

۳- اثرات تصادفی[3]: اگر ناهمگنی‌های فردی یا مقطعی قابل مشاهده نباشد، می‌توان فرض کرد که این ناهمگنی‌ها با متغیرهای توضیحی همبستگی ندارند. در چنین حالتی اگر فرض کنیم که تفاوت‌های گروهی، ناشی از عوامل تصادفی است آنگاه αZ_i را می‌توان تصادفی فرض نمود که مستقل از X_{it} است. برای هر متغیر تصادفی می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\alpha Z_i = E(\alpha Z_i) + u_i \quad (۲۲-۴)$$

1- pooled regression
2- fixed effects
3- random effects

رابطه فوق نشان می‌دهد که αZ_i از دو جزء تشکیل شده است: یکی جزء مورد انتظار که فرض می‌کنیم برای همهٔ گروهها یکسان است و عوامل تصادفی نقشی در آن ندارند و لذا آن را به‌صورت $E(\alpha Z_i) = \alpha$ می‌نویسیم. دیگری جزء تصادفی است که به‌خاطر وجود عوامل تصادفی، در اطراف α نوسان می‌کند که آن را با u_i نشان می‌دهیم. در واقع u_i برابر با $\alpha Z_i - E(\alpha Z_i)$ است. بدین ترتیب معادله زیر را خواهیم داشت:

$$Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha + u_i + \varepsilon_{it} \quad (۲۲-۵)$$

در رویکرد تصادفی، تصریح می‌شود که u_i عنصر تصادفی مختص هر گروه است.

لازم به ذکر است که تمایز اساسی بین این دو سؤال وجود دارد که؛ (۱) آیا اثرات فردی مشاهده نشده شامل مؤلفه‌هایی است که با متغیرهای توضیحی همبستگی دارد یا خیر؟ (۲) آیا این اثرات، تصادفی هستند یا خیر؟ بدین ترتیب سه نوع از مدل‌ها را بایستی بررسی کنیم که شامل مدل اثرات یکسان، اثرات ثابت و اثرات تصادفی است.

قبل از ادامه بحث، مروری بر علائم و عملگرهای مورد استفاده در این فصل می‌کنیم.

۲۲-٤ علائم و عملگرها

در این فصل از علائم و عملگرهایی استفاده می‌شود که عبارتند از:

۱- بردار واحد ($\mathbf{i}$): $\mathbf{i}_T$ بردار ستونی $T\times ۱$ با عناصر واحد است. همچنین $\mathbf{i}_{nT}$ بردار ستونی $nT\times ۱$ با عناصر واحد است.

$$\mathbf{i}'_T = [۱ \quad ۱ \quad \cdots \quad ۱] \quad (۲۲-۶)$$

۲- ماتریس واحد ($\mathbf{I}$): $\mathbf{I}_T$ ماتریس $T\times T$ است که قطر اصلی آن برابر ۱ و سایر عناصر آن صفر است. همچنین $\mathbf{I}_{nT}$ ماتریس واحد $nT\times nT$ است.

۳- ماتریس مربع با عناصر واحد($\mathbf{J}$): $\mathbf{J}_T$ ماتریس $T\times T$ با عناصر واحد است. همچنین $\mathbf{J}_{nT}$ ماتریس $nT\times nT$ با عناصر واحد می‌باشد.

$$\mathbf{J}_T = \mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ \vdots \\ ۱ \end{bmatrix}_{T\times ۱} [۱ \quad ۱ \quad \cdots \quad ۱]_{۱\times T} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ۱ & ۱ & \cdots & ۱ \end{bmatrix}_{T\times T} \quad (۲۲-۷)$$

۴- ماتریس میانگین‌ساز گروهی($\mathbf{B}$): $\mathbf{B}_T$ ماتریس $T\times T$ است که میانگین مشاهدات گروه iام را حساب می‌کند.

$$\mathbf{B}_T=\frac{1}{T}\mathbf{J}_T \tag{۲۲-۸}$$

به‌عنوان مثال برای بردار $\mathbf{y}_i$ داریم:

$$\mathbf{B}_T\mathbf{y}_i=\frac{1}{T}\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{i1}\\ Y_{i2}\\ \vdots\\ Y_{iT}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Y}_{i\circ}\\ \overline{Y}_{i\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{i\circ}\end{bmatrix}_{T\times 1}$$

بردار فوق بیانگر برداری است که در آن، میانگین گروه iام T بار تکرار شده است.

$\mathbf{B}_{nT}$ نیز «ماتریس میانگین‌ساز گروهی» برای تمام گروه‌ها است که نتیجهٔ آن بردار $nT\times 1$ است که میانگین هر گروه را T بار تکرار می‌کند (برای سادگی به‌جای $\mathbf{B}_{nT}$ از $\mathbf{B}$ استفاده می‌کنیم):

$$\mathbf{B}=\mathbf{I}_n\otimes\mathbf{B}_T=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_T & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{B}_T & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_T\end{bmatrix}_{nT\times nT} \tag{۲۲-۹}$$

$$\mathbf{By}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_T & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mathbf{B}_T & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{B}_T\end{bmatrix}_{nT\times nT}\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{y}_n\end{bmatrix}_{nT\times 1}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_T\mathbf{y}_1\\ \mathbf{B}_T\mathbf{y}_2\\ \vdots\\ \mathbf{B}_T\mathbf{y}_n\end{bmatrix}_{nT\times 1}=\begin{bmatrix}\left.\begin{matrix}\overline{Y}_{1\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{1\circ}\end{matrix}\right\}T\text{بار}\\ \left.\begin{matrix}\overline{Y}_{2\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{2\circ}\end{matrix}\right\}T\text{بار}\\ \vdots\\ \left.\begin{matrix}\overline{Y}_{n\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{n\circ}\end{matrix}\right\}T\text{بار}\end{bmatrix}_{nT\times 1} \tag{۲۲-۱۰}$$

$$\mathbf{y}'=[\mathbf{y}'_1\ \ \mathbf{y}'_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{y}'_n]=[Y_{11}\ \ Y_{12}\ \ \cdots\ \ Y_{1T}\ \ \cdots\ \ Y_{n1}\ \ Y_{n2}\ \ \cdots\ \ Y_{nT}]$$

۵- از آنجا که $\mathbf{B}$ «میانگین‌ساز گروهی» است، اگر $\mathbf{z}_i$ برای گروه iام در طول زمان ثابت باشد، لذا رابطهٔ $\mathbf{Bz}_i=\mathbf{z}_i$ را خواهیم داشت. به‌عنوان مثال برای $\mathbf{u}_i$ و α_i رابطهٔ $\mathbf{B}_T\mathbf{u}_i=\mathbf{u}_i$ و $\mathbf{B}_T\alpha_i=\alpha_i$ و همچنین رابطه $\mathbf{Bu}=\mathbf{u}$ و $\mathbf{B}\alpha=\alpha$ برقرار است.

۶- ماتریس «انحراف از میانگین‌ساز گروهی» ($\mathbf{Q}$): $\mathbf{Q}_T$ ماتریس $T\times T$ است که وقتی در متغیری مانند Y_{it} ضرب شود آن را بر حسب انحراف از میانگین گروه iام بیان می‌کند و لذا عناصر آن برابر با $Y_{it}-\overline{Y}_{i\circ}$ می‌باشد. بنابراین، رابطهٔ $\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T$ برقرار است، زیرا $\mathbf{B}_T$ «میانگین‌ساز گروهی» است. به‌عنوان مثال برای گروه iام رابطه زیر را داریم:

$$\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T \tag{۲۲-۱۱}$$

$$\mathbf{Q}_T\mathbf{y}_i=(\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T)\mathbf{y}_i=\mathbf{I}_T\mathbf{y}_i-\mathbf{B}_T\mathbf{y}_i=\begin{bmatrix}Y_{i1}\\ Y_{i2}\\ \vdots\\ Y_{iT}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{Y}_{i\circ}\\ \overline{Y}_{i\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{i\circ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{i1}-\overline{Y}_{i\circ}\\ Y_{i2}-\overline{Y}_{i\circ}\\ \vdots\\ Y_{iT}-\overline{Y}_{i\circ}\end{bmatrix}$$

از طرف دیگر $\mathbf{Q}_{nT}$ که با $\mathbf{Q}$ نشان می‌دهیم، ماتریس «انحراف از میانگین‌ساز گروهی» برای تمامی گروه‌ها است:

$$\mathbf{Q}=\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{B} \tag{۲۲-۱۲}$$

$$\mathbf{Qy}=(\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{B})\mathbf{y}=\mathbf{I}_{nT}\mathbf{y}-\mathbf{By}$$

با توجه به $\mathbf{By}$ که در بند ۴ به‌دست آمد، خواهیم داشت:

$$\mathbf{Qy}=\mathbf{I}_{nT}\mathbf{y}-\mathbf{By}=\begin{bmatrix}Y_{11}\\ \vdots\\ Y_{1T}\\ Y_{21}\\ \vdots\\ Y_{2T}\\ \vdots\\ Y_{n1}\\ \vdots\\ Y_{nT}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\overline{Y}_{1\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{1\circ}\\ \overline{Y}_{2\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{2\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{n\circ}\\ \vdots\\ \overline{Y}_{n\circ}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_{11}-\overline{Y}_{1\circ}\\ \vdots\\ Y_{1T}-\overline{Y}_{1\circ}\\ Y_{21}-\overline{Y}_{2\circ}\\ \vdots\\ Y_{2T}-\overline{Y}_{2\circ}\\ \vdots\\ Y_{n1}-\overline{Y}_{n\circ}\\ \vdots\\ Y_{nT}-\overline{Y}_{n\circ}\end{bmatrix}_{nT\times 1} \tag{۲۲-۱۳}$$

۷- ماتریس‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ متقارن هستند. این روابط برای $\mathbf{B}_T$ و $\mathbf{Q}_T$ نیز برقرار است:[1]

$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}\ ,\ \mathbf{Q}'=\mathbf{Q}$$

۸- ماتریس‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ خودتوان هستند:

$$\mathbf{B}^2=\mathbf{B}\ ,\ \mathbf{Q}^2=\mathbf{Q}$$

این روابط برای $\mathbf{B}_T$ و $\mathbf{Q}_T$ نیز برقرار است.[2]

۹- ماتریس‌های $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ متعامد هستند:

$$\mathbf{QB}=\mathbf{BQ}=0$$

این روابط برای $\mathbf{B}_T$ و $\mathbf{Q}_T$ نیز برقرار است.[3]

۱۰- اگر $\mathbf{A}=a\mathbf{Q}+b\mathbf{B}$ باشد، آنگاه رابطه زیر برقرار است:[4]

$$(a\mathbf{Q}+b\mathbf{B})^r=a^r\mathbf{Q}+b^r\mathbf{B}$$

a و b اعداد حقیقی هستند. رابطه فوق برای $\mathbf{B}_T$ و $\mathbf{Q}_T$ به‌صورت زیر است:

$$(a\mathbf{Q}_T+b\mathbf{B}_T)^r=a^r\mathbf{Q}_T+b^r\mathbf{B}_T \qquad (۲۲-۱۴)$$

۱- زیرا به عنوان مثال برای $\mathbf{B}_T$ داریم:

$$\mathbf{B}_T=\frac{1}{T}\mathbf{J}_T=\frac{1}{T}\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T$$

$$\mathbf{B}'_T=\frac{1}{T}\mathbf{J}'_T=\frac{1}{T}(\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T)'=\frac{1}{T}\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T=\mathbf{B}_T$$

۲- به‌عنوان نمونه برای $\mathbf{B}_T$ داریم:

$$\mathbf{B}_T^2=\mathbf{B}_T\mathbf{B}_T=(\frac{1}{T}\mathbf{J}_T)(\frac{1}{T}\mathbf{J}_T)=\frac{1}{T^2}\mathbf{J}_T\mathbf{J}_T=\frac{1}{T^2}(\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T)(\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T)$$
$$=\frac{1}{T^2}\mathbf{i}_T(\mathbf{i}'_T\mathbf{i}_T)\mathbf{i}'_T=\frac{1}{T}\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T=\mathbf{B}_T$$

زیرا $\mathbf{i}'_T\mathbf{i}_T=T$ است.

۳- به‌عنوان مثال برای $\mathbf{Q}_T\mathbf{B}_T$ رابطه زیر را داریم:

$$\mathbf{Q}_T\mathbf{B}_T=(\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T)\mathbf{B}_T=\mathbf{B}_T-\mathbf{B}_T^2=\mathbf{B}_T-\mathbf{B}_T=0$$

زیرا $\mathbf{B}_T^2=\mathbf{B}_T$ است.

۴- به‌عنوان مثال برای $\mathbf{A}^2$ داریم:

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}=(a\mathbf{Q}+b\mathbf{B})(a\mathbf{Q}+b\mathbf{B})=a^2\mathbf{Q}^2+ab\mathbf{QB}+ab\mathbf{BQ}+b^2\mathbf{B}^2$$

چون $\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}$ متعامد و هم‌قوه هستند، $\mathbf{QB}=\mathbf{BQ}=0$، $\mathbf{Q}^2=\mathbf{Q}$ و $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$ است و لذا خواهیم داشت:

$$\mathbf{A}^2=a^2\mathbf{Q}+b^2\mathbf{B}$$

۱۱- اگر $\mathbf{A}=a\mathbf{Q}+b\mathbf{B}$ باشد با توجه به (۲۲-۱۴) معکوس $\mathbf{A}$ برابر است با:

$$r=-1 \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}=a^{-1}\mathbf{Q}+b^{-1}\mathbf{A}=\frac{1}{a}\mathbf{Q}+\frac{1}{b}\mathbf{B} \qquad (۲۲-۱۵)$$

این رابطه برای $\mathbf{Q}_T$ و $\mathbf{B}_T$ نیز برقرار است:

$$(a\mathbf{Q}_T+b\mathbf{B}_T)^{-1}=\frac{1}{a}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{b}\mathbf{B}_T \qquad (۲۲-۱۶)$$

۱۲- ماتریس $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{a}\mathbf{Q}+\frac{1}{b}\mathbf{B}$ را می‌توان به‌صورت حاصل‌ضرب $\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$ نوشت که $\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$ برابر است با:[1]

$$\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{Q}+\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{B}$$

$\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}$ از (۲۲-۱۴) به‌دست می‌آید که در آن $r=-\frac{1}{2}$ می‌باشد. همچنین رابطه فوق را برای $\mathbf{B}_T$ و $\mathbf{Q}_T$ به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(a\mathbf{Q}_T+\mathbf{B}_T)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{B}_T \qquad (۲۲-۱۷)$$

۱۳- دو ماتریس $\mathbf{L}$ و $\mathbf{M}$ را نیز به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\mathbf{L}$ ماتریس $nT\times nT$ است که «میانگین‌ساز کل» است. $\mathbf{M}$ نیز ماتریس $nT\times nT$ است که «انحراف از میانگین‌ساز کل» می‌باشد:

$$\mathbf{L}=\frac{1}{nT}\mathbf{J}_{nT}=\frac{1}{nT}\mathbf{i}_{nT}\mathbf{i}'_{nT} \qquad (۲۲-۱۸)$$

$$\mathbf{M}=\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{L} \qquad (۲۲-۱۹)$$

بنابراین، $\mathbf{Ly}$ بردار میانگین کل Y (یعنی $\bar{Y}_{oo}$) را می‌دهد که nTبار آن را تکرار می‌کند ($\bar{Y}_{oo}=\sum_i\sum_t Y_{it}/nT$). $\mathbf{My}$ نیز بردار $nT\times 1$ است که عناصر آن $Y_{it}-\bar{Y}_{oo}$ می‌باشد.

۱- معکوس $\mathbf{A}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{A}^{-\frac{1}{2}}=(\frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{Q}+\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{B})(\frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{Q}+\frac{1}{\sqrt{b}}\mathbf{B})$$
$$=\frac{1}{a}\mathbf{Q}^2+\frac{1}{\sqrt{ab}}\mathbf{QB}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\mathbf{BQ}+\frac{1}{b}\mathbf{B}^2=\frac{1}{a}\mathbf{Q}+\frac{1}{b}\mathbf{B}$$

زیرا $\mathbf{QB}=\mathbf{BB}=0$، $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$ و $\mathbf{Q}^2=\mathbf{Q}$ می‌باشد.

۱۴- ماتریس $\mathbb{D}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که معروف به ماتریس متغیرهای مجازی است:

$$\mathbb{D}=\mathbb{I}_n\otimes \mathbf{i}_T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۲-۲۰)$$

برای ماتریس $\mathbb{D}$ روابط زیر برقرار است:

$$\mathbb{D}'\mathbb{D}=(\mathbb{I}_n\otimes \mathbf{i}_T)'(\mathbb{I}_n\otimes \mathbf{i}_T)=\mathbf{i}_T'\mathbf{i}_T\otimes \mathbb{I}_n=T\mathbb{I}_n \qquad (۲۲-۲۱)$$

$$\mathbb{D}(\mathbb{D}'\mathbb{D})^{-1}\mathbb{D}'=\mathbb{D}(T\mathbb{I}_n)^{-1}\mathbb{D}'=\frac{1}{T}\mathbb{D}\mathbb{D}'=\frac{1}{T}(\mathbf{i}_T\mathbf{i}_T'\otimes \mathbb{I}_n)=\mathbb{I}_n\otimes \mathbb{B}_T=\mathbb{B} \qquad (۲۲-۲۲)$$

$$\mathbb{I}_{nT}-\mathbb{D}(\mathbb{D}'\mathbb{D})^{-1}\mathbb{D}'=\mathbb{I}_{nT}-\mathbb{B}=\mathbb{Q} \qquad (۲۲-۲۳)$$

۵-۲۲ مدل تجمیعی[1]

مدل تجمیعی بیانگر آن است که اثرات فردی وجود ندارد و همهٔ گروه‌ها یکسان هستند، لذا معادله رگرسیون به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y_{it}=\alpha+\beta X_{it}+\varepsilon_{it} \quad ; \quad i=1,\ldots,n \quad , \; t=1,\ldots,T \qquad (۲۲-۲۴)$$

این مدل را می‌توان با روش OLS برآورد نمود. بدین منظور لازم است که مجموع مجذور خطاها (RSS_{pooled}) را حداقل کنیم:

$$RSS_{pooled}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}e_{it}^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(Y_{iT}-\hat{Y}_{it})^2=\sum_i\sum_t(Y_{it}-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_{it})^2 \qquad (۲۲-۲۵)$$

1- pooled

با مشتق گیری نسبت به $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial RSS_{pooled}}{\partial\hat{\alpha}}=0 \;\Rightarrow\; \sum_i\sum_t(Y_{it}-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_{it})=0$$

$$\frac{\partial RSS_{pooled}}{\partial\hat{\beta}}=0 \;\Rightarrow\; \sum_i\sum_t(Y_{it}-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X_{it})X_{it}=0$$

با حل این دو معادله، تخمین‌زننده‌های تجمیعی به‌دست می‌آیند:

$$\hat{\alpha}_{pooled}=\overline{Y}_{oo}-\hat{\beta}\overline{X}_{oo} \qquad (۲۲-۲۶)$$

$$\hat{\beta}_{pooled}=\frac{\sum_i\sum_t x_{it}y_{it}}{\sum_i\sum_t x_{it}^2} \qquad (۲۲-۲۷)$$

$\overline{Y}_{oo}$ و $\overline{X}_{oo}$ بیانگر میانگین‌های کل و حروف کوچک نیز انحراف از میانگین کل را نشان می‌دهند:

$$\overline{X}_{oo}=\frac{\sum_i\sum_t X_{it}}{nT} \quad , \quad \overline{Y}_{oo}=\frac{\sum_i\sum_t Y_{it}}{nT} \qquad (۲۲-۲۸)$$

$$x_{it}=X_{it}-\overline{X}_{oo} \quad , \quad y_{it}=Y_{it}-\overline{Y}_{oo} \qquad (۲۲-۲۹)$$

واریانس جملهٔ خطا نیز برابر است با:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2=\frac{RSS_{pooled}}{nT-K}=\frac{\sum_i\sum_t e_{it}^2}{nT-K} \qquad (۲۲-۳۰)$$

K تعداد ضرایب برآوردی را نشان می‌دهد که در اینجا برابر با ۲ است.

همچنین واریانس $\hat{\beta}_{pooled}$ برابر است با:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_{pooled})=\frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{\sum_i\sum_t x_{it}^2} \qquad (۲۲-۳۱)$$

با تعمیم نتایج فوق برای مدل K متغیره خواهیم داشت:

$$Y_{it}=\alpha+\sum_{k=1}^{K}\beta_k X_{kit}+u_{it} \qquad (۲۲-۳۲)$$

فرم ماتریسی معادله فوق عبارت است از:

$$\mathbf{y}=\alpha\mathbf{i}_{nT}+\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{u} \qquad (۲۲-۳۳)$$

$$=[\mathbf{i}_{nT} \quad \mathbf{X}]\begin{bmatrix}\alpha\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}+\mathbf{u}=\mathbf{Z}\boldsymbol{\theta}+\mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{Z}=[\mathbf{i}_{nT} \quad \mathbf{X}] \quad , \quad \boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\alpha\\ \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$$

y و **u** بردارهای ستونی $nT\times 1$، **X** ماتریس متغیرهای توضیحی با ابعاد $nT\times K$، $\mathbf{i}_{nT}$ بردار ستونی $nT\times 1$ با عناصر واحد و α نیز اسکالر می‌باشد. مجموع مجذور خطاها عبارت است از:

$$RSS_{pooled}=\sum_i\sum_t e_{it}^2=\mathbf{e}'\mathbf{e}=(\mathbf{y}-\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol\theta})'(\mathbf{y}-\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol\theta})$$

$$=\mathbf{y}\mathbf{y}'-2\mathbf{y}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol\theta}+\hat{\boldsymbol\theta}'\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol\theta}$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\hat{\boldsymbol\theta}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial RSS_{pooled}}{\partial \hat{B}}=-2\mathbf{Z}'\mathbf{y}+2\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol\theta}=\mathbf{0}\Rightarrow \mathbf{Z}'\mathbf{Z}\hat{\boldsymbol\theta}=\mathbf{Z}'\mathbf{y}$$

با جایگذاری به جای **Z** و $\hat{\boldsymbol\theta}$ تخمین‌زننده‌های $\hat\alpha$ و $\hat{\boldsymbol\beta}$ به‌دست می‌آید:[1]

$$\begin{bmatrix}\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{i}_{nT} & \mathbf{i}'_{nT}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}'\mathbf{i}_{nT} & \mathbf{X}'\mathbf{X}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat\alpha\\ \hat{\boldsymbol\beta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}_{nT}\mathbf{y}\\ \mathbf{X}'\mathbf{y}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{i}_{nT}\hat\alpha+\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{y}\\ \mathbf{X}'\mathbf{i}_{nT}\hat\alpha+\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{X}'\mathbf{y}\end{matrix} \qquad (۲۲-۳۴)$$

از آن‌جا که $\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{i}_{nT}=nT$، $\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{X}=\bar{\mathbf{x}}_{\circ\circ}$ و $\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{y}=\bar{Y}_{\circ\circ}$ است، با حل معادلات فوق، $\hat\alpha$ و $\hat{\boldsymbol\beta}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat\alpha_{pooled}=\frac{1}{nT}\mathbf{i}'_{nT}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})=\bar{Y}_{\circ\circ}-\bar{\mathbf{X}}'_{\circ\circ}\hat{\boldsymbol\beta}=\bar{Y}_{\circ\circ}-\sum_{k=1}^{K}\hat\beta_k\bar{X}_{k\circ\circ} \qquad (۲۲-۳۵)$$

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{pooled}=(\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{M}\mathbf{y}) \qquad (۲۲-۳۶)$$

که $\mathbf{x}'_{\circ\circ}=[\bar{X}_{1\circ\circ}\ \ \bar{X}_{2\circ\circ}\ \cdots\ \bar{X}_{K\circ\circ}]$ و $\bar{X}_{k\circ\circ}=\frac{\sum_i\sum_t X_{kit}}{nT}$ است. $\mathbf{M}=\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{L}$ و $\mathbf{L}=\frac{1}{nT}\mathbf{i}_{nT}\mathbf{i}'_{nT}$ نیز در بخش (۴-۲۲) تعریف شده‌اند.

از آنجا که **M** یک ماتریس متقارن و خودتوان است، لذا رابطه $\mathbf{M}^2=\mathbf{M}'\mathbf{M}=\mathbf{M}\mathbf{M}=\mathbf{M}$ برقرار است. براین اساس می‌توان نشان داد که $\hat{\boldsymbol\beta}_{pooled}$ از برازش **My** روی **MX** به‌دست آمده است. اما توجه شود که انحراف از میانگین به‌صورت انحراف از «میانگین کل» می‌باشد، یعنی $y_{it}=Y_{it}-\bar{Y}_{\circ\circ}$ و $x_{kit}=X_{kit}-\bar{X}_{k\circ\circ}$.

۱- در اینجا از روابط زیر استفاده شده است:

$$\mathbf{Z}'\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}'_{nT}\\ \mathbf{X}'\end{bmatrix}[\mathbf{i}_{nT}\quad \mathbf{X}]=\begin{bmatrix}\mathbf{i}'_{nT}\mathbf{i}_{nT} & \mathbf{i}'_{nT}\mathbf{X}\\ \mathbf{X}'\mathbf{i}_{nT} & \mathbf{X}'\mathbf{X}\end{bmatrix}\quad,\quad \mathbf{Z}'\mathbf{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{i}'_{nT}\\ \mathbf{X}'\end{bmatrix}\mathbf{y}$$

۶-۲۲ مدل اثرات ثابت

در مدل اثرات ثابت فرض می‌شود که تفاوت‌های فردی یا گروهی را می‌توان در جملهٔ ثابت منعکس نمود. هر α_i یک ضریب مجهول است که بایستی برآورد گردد. α_i بیانگر اثر تمامی عواملی است که به‌صورت مقطعی بر Y_{it} تأثیر می‌گذارند، اما اثر این عوامل در طول زمان ثابت است. مثلاً اثر رشد پول بر تورم در طول زمان باثبات است ولی اثر آن بر نرخ رشد قیمت کالاهای مختلف، متفاوت است. همچنین در بازار سهام، اثر نرخ بهرهٔ بدون ریسک بر بازدهی سهام در طول زمان، ثابت است ولی برای سهام مختلف، متفاوت می‌باشد. فرض کنید که Y_i و X_i شامل T مشاهده برای گروه iام می‌باشد. در این حالت معادله (۳-۲۲) را داریم:

$$Y_{it}=\beta X_{it}+\alpha_i+\varepsilon_{it} \qquad (۲۲-۳۷)$$

α_i برای هر گروه، متفاوت است. به‌منظور برآورد α_i، برای هر گروه یک متغیر مجازی تعریف می‌شود. لذا با استفاده از متغیرهای مجازی می‌توان این مدل را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_{it}=\beta X_{it}+\alpha_1 D_1+\alpha_2 D_2+\ldots+\alpha_n D_n+\varepsilon_{it} \qquad (۲۲-۳۸)$$

به‌عنوان مثال D_1 برای گروه ۱ برابر ۱ و برای سایر گروه‌ها برابر صفر است. برای گروه دوم نیز $D_2=1$ و برای سایر گروه‌ها برابر صفر است.[1]

حال ضرایب مدل (۳۷-۲۲) یا (۳۸-۲۲) را می‌توان با حداقل نمودن مجموع مجذور خطاها، به‌دست آورد. از آنجا که این مدل معروف به مدل اثرات ثابت است لذا RSS آن را با RSS_{FE} نشان می‌دهیم. همچنین چون در این مدل از متغیرهای مجازی استفاده می‌شود و سپس روش OLS برای برآورد ضرایب آن به‌کار می‌رود، لذا آن را روش حداقل مربعات متغیرهای مجازی (LSDV)[2] نیز می‌گویند. بدین منظور مجموع مجذور خطاها را برای مدل (۳۷-۲۲) یا (۳۸-۲۲) می‌نویسیم:

۱- توجه شود که مدل (۴۰-۱۹) فاقد عرض از مبدأ است. اگر $Y_{it}=\alpha+\beta X_{it}+\alpha_i+\varepsilon_{it}$ باشد، آنگاه بایستی فقط $n-1$ متغیر مجازی تعریف نمود (فصل هفتم را ببینید).

2- least squares dummy variables

$$RSS_{LSDV}=RSS_{FE}=\sum_i\sum_t e_{it}^2 \qquad (۲۲-۳۹)$$

$$=\sum_i\sum_t(Y_{it}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}X_{it})^2$$

با مشتق‌گیری نسبت به $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial RSS_{FE}}{\partial \alpha_i}=-2\sum_t(Y_{it}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}X_{it})=0 \quad ; \quad i=1,\dots,n$$

$$\frac{\partial RSS_{FE}}{\partial \hat{\beta}}=-2\sum_i\sum_t(Y_{it}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}X_{it})X_{it}=0 \qquad (۲۲-۴۰)$$

با حل معادلات فوق، $\hat{\alpha}_i$ و $\hat{\beta}$ به‌دست می‌آیند:

$$\hat{\alpha}_i=\overline{Y}_{i0}-\hat{\beta}\overline{X}_{i0} \qquad (۲۲-۴۱)$$

$$\hat{\beta}_{LSDV}=\frac{\sum_i\sum_t(X_{it}-\overline{X}_{i0})(Y_{it}-\overline{Y}_{i0})}{\sum_i\sum_t(X_{it}-\overline{X}_{i0})^2} \qquad (۲۲-۴۲)$$

که $\overline{Y}_{i0}$ و $\overline{X}_{i0}$ میانگین‌های گروهی هستند:

$$\overline{Y}_{i0}=\frac{\sum_t Y_{it}}{T}$$

$$\overline{X}_{i0}=\frac{\sum_t X_{it}}{T}$$

ملاحظه می‌شود که نتایج فوق مانند مدل تجمیعی است با این تفاوت که به جای «میانگین‌های کل» از «میانگین‌های گروهی» استفاده شده است. در ادامه جزئیات بیشتر این تخمین‌زننده‌ها را بررسی خواهیم کرد.

مبحث فوق را می‌توان به حالت K متغیره تعمیم داد. بدین منظور ابتدا شکل ماتریسی مدل (۲۲-۳۸) را می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix}Y_{11}\\Y_{12}\\\vdots\\Y_{1T}\\Y_{21}\\Y_{22}\\\vdots\\Y_{2T}\\\vdots\\Y_{n1}\\Y_{n2}\\\vdots\\Y_{nT}\end{bmatrix}=\beta\begin{bmatrix}X_{11}\\X_{12}\\\vdots\\X_{1T}\\X_{21}\\X_{22}\\\vdots\\X_{2T}\\\vdots\\X_{n1}\\X_{n2}\\\vdots\\X_{nT}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\1&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\\varepsilon_{12}\\\vdots\\\varepsilon_{1T}\\\varepsilon_{21}\\\varepsilon_{22}\\\vdots\\\varepsilon_{2T}\\\vdots\\\varepsilon_{n1}\\\varepsilon_{n2}\\\vdots\\\varepsilon_{nT}\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۴۳)$$

و یا به طور خلاصه عبارت است از:

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\beta+\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۲-۴۴)$$

ابعاد بردارها و ماتریس‌ها در این مدل عبارت است از:

(۴۳-۴۵)

$\mathbf{y}:nT\times1 \qquad \mathbf{X}:nT\times1 \qquad \beta:1\times1$

$\mathbf{D}:nT\times n \qquad \boldsymbol{\alpha}:n\times1 \qquad \boldsymbol{\varepsilon}:nT\times1$

این مدل معروف به مدل حداقل مربعات متغیر مجازی (LSDV)[1] است. این مدل یک رگرسیون کلاسیک است که دارای n ضریب α و ۱ ضریب β است. اگر تعداد متغیرهای توضیحی برابر K باشد، در این صورت تعداد ضرایب برابر با $n+K$ خواهد بود. اگر K متغیر توضیحی داشته باشیم آنگاه در مدل (۲۲-۴۴) به جای بردار $\mathbf{X}$، ماتریسی با ابعاد $nT\times K$ داریم که $\boldsymbol{\beta}$ نیز $K\times1$ خواهد بود. در این صورت، شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{D}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۲-۴۶)$$

ابعاد هر یک از اجزای این مدل عبارت است از:

(۲۲-۴۷)

$\mathbf{y}:nT\times1 \qquad \mathbf{X}:nT\times K \qquad \boldsymbol{\beta}:K\times1$

$\mathbf{D}:nT\times n \qquad \boldsymbol{\alpha}:n\times1 \qquad \boldsymbol{\varepsilon}:nT\times1$

1- least squares dummy variable

گروهی را با $z_i'\alpha$ و متوسط آن را با $E(z_i'\alpha)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $u_i = z_i'\alpha - E(z_i'\alpha)$ می‌باشد.
در واقع u_i شامل مجموعه عواملی است (یعنی $z_i'\alpha$) که در رگرسیون نیستند ولی مختص هر گروه می‌باشند.

برای این مدل، فروض زیر برقرار است:

۱) صفر بودن امید ریاضی: $E(\varepsilon_{it}|\mathbf{X}) = E(u_i|\mathbf{X}) = 0$

۲) ε_{it} واریانس همسانی: $\text{var}(\varepsilon_{it}|\mathbf{X}) = E(\varepsilon_i^2|\mathbf{X}) = \sigma_\varepsilon^2$

۳) u_i واریانس همسانی: $\text{var}(u_i|\mathbf{X}) = E(u_i^2|\mathbf{X}) = \sigma_u^2$ (۲۲-۷۹)

۴) ε_{it} و u_i عدم همبستگی: $\text{cov}(\varepsilon_{it}, u_j) = E(\varepsilon_{it}u_j|\mathbf{X}) = 0 \;;\;$ برای هر i، t و j

۵) ε_{it} عدم خودهمبستگی: $\text{cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}|\mathbf{X}) = 0 \;;\;$ برای هر $i \neq j$ و $t \neq s$

۶) u_i عدم خودهمبستگی: $\text{cov}(u_i, u_j) = E(u_i u_j|\mathbf{X}) = 0 \;;\;$ برای هر $i \neq j$

فرض ۶ بیانگر آن است که تفاوت‌های فردی یک گروه با گروه دیگر، همبستگی ندارد زیرا تصادفی هستند.

اگر $v_{it} = \varepsilon_{it} + u_i$ باشد، طبق فروض ۱ تا ۶ خواهیم داشت:

$$E(v_{it}^2|\mathbf{X}) = E[(\varepsilon_{it} + u_i)^2|\mathbf{X}] = E[(\varepsilon_{it}^2 + u_i^2)|\mathbf{X}] = \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 \qquad (۲۲\text{-}۸۰)$$

$$E(v_{it}v_{is}|\mathbf{X}) = E[(\varepsilon_{it} + u_i)(\varepsilon_{is} + u_i)|\mathbf{X})] = E(u_i^2) = \sigma_u^2 \;\;;\;\; t \neq s$$

$$E(v_{it}v_{js}|\mathbf{X}) = E[(\varepsilon_{it} + u_i)(\varepsilon_{js} + u_j)|\mathbf{X})] = 0 \;\;;\;\; \text{برای هر } t \text{ و } s \text{ و } i \neq j$$

اگر بردار $\mathbf{v}_i = [v_{i1}\; v_{i2} \cdots v_{iT}]$ باشد، در این صورت واریانس $\mathbf{v}_i$ عبارت است از:

T مشاهده است، لذا برای گروه iام خواهیم داشت:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 \\ \sigma_u^2 & \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix}_{T\times T}$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۲\text{-}۸۲)$$

$$= \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_T + \sigma_u^2 \mathbf{i}_T \mathbf{i}_T' = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}_T + T\sigma_u^2 \mathbf{B}_T$$

در اینجا از رابطهٔ (۲۲-۸) استفاده شده است که به‌صورت $\mathbf{B}_T = \frac{1}{T}\mathbf{J}_T$ می‌باشد.

طبق رابطه (۲۲-۱۱) از $\mathbf{Q}_T = \mathbf{I}_T - \mathbf{B}_T$ استفاده کرده و $\mathbf{\Sigma}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{\Sigma} = \sigma_\varepsilon^2(\mathbf{Q}_T + \mathbf{B}_T) + T\sigma_u^2\mathbf{B}_T = \sigma_\varepsilon^2\mathbf{Q}_T + (\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_u^2)\mathbf{B}_T \qquad (۲۲\text{-}۸۳)$$

از آنجا که $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_j$ مستقل‌اند و $\mathbf{\Sigma}$ نیز ماتریس واریانس $\mathbf{v}_i$ می‌باشد، لذا برای تمامی $\mathbf{v}_i$ ها (یعنی برای nT مشاهده)، ماتریس واریانس عبارت است از:

$$\Omega = \text{var}(\mathbf{V}) = E(\mathbf{VV}') = \begin{bmatrix} \text{var}(\mathbf{v}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{var}(\mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \text{var}(\mathbf{v}_n) \end{bmatrix}_{nT\times nT}$$

طبق (۲۲-۲۳)، ماتریس $\mathbf{I}_{nT} - \mathbf{D}(\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}'$ معادل با ماتریس $\mathbf{Q}$ است:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{QX})\hat{\boldsymbol\beta} = \mathbf{X}'\mathbf{Qy} \;\Rightarrow\; \hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV} = (\mathbf{X}'\mathbf{QX})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Qy}) \qquad (۲۲\text{-}۵۳)$$

نتایج فوق برای رگرسیونی است که داده‌های آن با تبدیل $\mathbf{X}_* = \mathbf{QX}$ و $\mathbf{y}_* = \mathbf{Qy}$ به‌دست آمده‌اند. از آنجا که $\mathbf{Q}$ یک ماتریس خودتوان و متقارن است، لذا $\mathbf{Q}'\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ می‌باشد. بنابراین $\mathbf{X}_*'\mathbf{X}_* = (\mathbf{QX})'(\mathbf{QX}) = \mathbf{X}'\mathbf{QX}$ و $\mathbf{X}_*'\mathbf{y}_* = (\mathbf{QX})'(\mathbf{Qy}) = \mathbf{X}'\mathbf{Qy}$ است.

... گروهی α است. بدین ترتیب، α را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{\boldsymbol\alpha} = \begin{bmatrix} \hat\alpha_1 \\ \hat\alpha_2 \\ \vdots \\ \hat\alpha_n \end{bmatrix} = (\mathbf{D}'\mathbf{D})^{-1}\mathbf{D}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) = \frac{1}{T}\mathbf{D}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}) = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{1\circ} - \sum_{k=1}^{K}\hat\beta_k \bar{X}_{k1\circ} \\ \vdots \\ \bar{Y}_{n\circ} - \sum_{k=1}^{K}\hat\beta_k \bar{X}_{kn\circ} \end{bmatrix} \qquad (۲۲\text{-}۵۴)$$

1- within

$$=\begin{bmatrix}\Sigma & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Sigma & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n\otimes\Sigma \qquad (۲۲-۸۴)$$

که Σ و Ω به‌ترتیب $T\times T$ و $nT\times nT$ هستند.

تخمین‌زنندهٔ GLS

با توجه به اینکه ماتریس واریانس برای مدل (۲۲-۸۰) برابر با Ω است، لذا تخمین‌زنندهٔ GLS برای $\hat{\beta}$ عبارت است از:[1]

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y} \qquad (۲۲-۸۵)$$

همان‌طور که در فصل ششم و نهم دیدیم، روش GLS داده‌ها را تبدیل کرده و به آنها وزن می‌دهد. در اینجا نیز با توجه به $\Omega^{-1}=\Omega^{-\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}$، خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=(\mathbf{X}'\Omega^{-\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}=(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^*) \qquad (۲۲-۸۶)$$

که $\mathbf{X}^*=\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$ و $\mathbf{y}^*=\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}$ می‌باشد. توجه شود که $\mathbf{X}'\Omega^{-\frac{1}{2}}=(\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})'$ است، زیرا Ω متقارن است.

Ω^{-1} برابر است با:

$$\Omega^{-1}=\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Sigma^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma^{-1}\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n\otimes\Sigma^{-1} \qquad (۲۲-۸۷)$$

برای محاسبه Σ^{-1} از رابطه (۲۲-۸۳) که به‌صورت $\Sigma=\sigma_\varepsilon^2\mathbf{Q}_T+(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2)\mathbf{B}_T$ استفاده می‌کنیم. از طرف دیگر طبق خاصیت (۲۲-۱۶) خواهیم داشت:

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}\mathbf{B}_T \qquad (۲۲-۸۸)$$

همچنین براساس رابطه (۲۲-۱۷)، $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ عبارت است از:

۱- به فصل ششم و نهم مراجعه شود.

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}\mathbf{B}_T=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\mathbf{Q}_T+\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}\mathbf{B}_T\right] \qquad (۲۲-۸۹)$$

با توجه به رابطه (۲۲-۱۱) $\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T$ است:

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T+\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}\mathbf{B}_T\right]=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T-\theta\mathbf{B}_T) \qquad (۲۲-۹۰)$$

$$\theta=1-\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}$$

در این حالت، داده‌های تبدیل‌شده یعنی $\mathbf{y}_i^*$ و $\mathbf{X}_i^*$ برای گروه iام عبارت است از:

$$\mathbf{y}_i^*=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}_i=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T-\theta\mathbf{B}_T)\mathbf{y}_i=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\begin{bmatrix}Y_{i1}-\theta\bar{Y}_{i0}\\ Y_{i2}-\theta\bar{Y}_{i0}\\ \vdots\\ Y_{iT}-\theta\bar{Y}_{i0}\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۹۱)$$

$$\mathbf{X}_i^*=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}_i=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T-\theta\mathbf{B}_T)\mathbf{X}_i=\begin{bmatrix}X_{i1}-\theta\bar{X}_{i0}\\ X_{i2}-\theta\bar{X}_{i0}\\ \vdots\\ X_{iT}-\theta\bar{X}_{i0}\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۹۲)$$

اگر $\theta=1$ باشد، نتایج روش GLS با رگرسیون LSDV یکسان خواهد بود ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LSDV}$).

وقتی $\theta=1$ است، آنگاه $\sigma_\varepsilon=0$ خواهد بود و در این حالت، فقط اثرات u_i وجود دارد. در این حالت، مدل اثرات ثابت و مدل اثرات تصادفی را نمی‌توان از هم متمایز کرد. اگر $\theta=0$ باشد، بیانگر $\sigma_u^2=0$ است و بدان معنا است که اثرات تصادفی وجود ندارد.

برای بررسی ویژگی‌های تخمین‌زنندهٔ GLS، ابتدا Ω^{-1} را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\Omega^{-1}=\mathbf{I}_n\otimes\Sigma^{-1}=\mathbf{I}_n\otimes\left[\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}\mathbf{B}_T\right] \qquad (۲۲-۹۳)$$

با توجه به رابطه $\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T$، خواهیم داشت:

$$\Omega^{-1}=\mathbf{I}_n \otimes \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[\mathbf{Q}_T+(1-\theta)^2\mathbf{B}_T\right]$$

$$=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}[\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{B}] \quad , \quad \lambda=(1-\theta)^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2} \qquad (۲۲-۹۴)$$

با جایگذاری به‌جای Ω^{-1} خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}&=(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y})=\left(\mathbf{X}'(\mathbf{I}_{nT}-\theta\mathbf{B})\mathbf{X}\right)^{-1}\left(\mathbf{X}'(\mathbf{I}_{nT}-\theta\mathbf{B})\mathbf{y}\right)\\&=\left[\mathbf{X}'(\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{B})\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'(\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{B})\mathbf{y}\right]\\&=\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}\right]^{-1}\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{y}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{y}\right]\end{aligned} \qquad (۲۲-۹۵)$$

حال $\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}&=\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}\right]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{y})+\lambda\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}\right]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{y})\\&=\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}\right]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{y})\\&\quad+\lambda\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}\right]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{y})\\&=\mathbf{F}\hat{\boldsymbol\beta}_W+(\mathbf{I}-\mathbf{F})\hat{\boldsymbol\beta}_B\end{aligned} \qquad (۱۲-۹۶)$$

$$\mathbf{F}=\left[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}\right]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})=\left[\mathbf{WSS}_{xx}+\lambda\mathbf{BSS}_{xx}\right]^{-1}\mathbf{WSS}_{xx}$$

اگر λ تفاوت قابل توجهی با ۱ داشته باشد، تخمین‌زننده‌های OLS ناکارا خواهند بود. در مقایسه با GLS، روش OLS وزن بیشتری به تغییرات بین‌گروهی می‌دهد.

۱- اگر $\lambda=1$ باشد، در این صورت برآورد $\boldsymbol\beta$ با روش GLS مشابه با روش OLS در رگرسیون تجمیعی است، یعنی $\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=\hat{\boldsymbol\beta}_{Pooled}$ است که $\hat{\boldsymbol\beta}_{Pooled}$ با $\hat{\boldsymbol\beta}_T$ یکسان است. این وضعیت در صورتی برقرار است که $\sigma_u^2=0$ باشد که در این حالت، مدل رگرسیون کلاسیک قابل کاربرد است.

۲- اگر $\lambda=0$ باشد، در این صورت، این تخمین‌زنندهٔ GLS مشابه با تخمین‌زنندهٔ LSDV است که در حالت اثرات ثابت مورد استفاده قرار می‌گرفت. توجه شود که قبلاً نشان دادیم که تخمین‌زنندهٔ LSDV و تخمین‌زنندهٔ درون‌گروهی یکسان هستند ($\hat{\boldsymbol\beta}_W=\hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV}$). بدیهی است که $\lambda=0$ به معنای $\theta=1$ است که آن نیز معادل با $\sigma_\varepsilon^2=0$ می‌باشد. اگر $\sigma_\varepsilon^2=0$ باشد، در این صورت تمام تغییرات در عرض گروه‌ها (تغییرات بین‌گروهی) ناشی از تفاوت در u_iها است و چون آنها را در طول زمان ثابت فرض کرده‌ایم لذا معادل با رگرسیون LSDV است که در مدل اثرات ثابت به‌کار گرفته می‌شود. بدیهی است که این بحث که آیا اینها واقعاً اثرات ثابت هستند یا تصادفی، جای بررسی دارد.

۳- حالت دیگر آن است که $T\to\infty$ میل کند. در این صورت نیز $\theta=1$ می‌باشد. افزایش T می‌تواند u_i «مشاهده‌نشده» را «قابل مشاهده» کند. اگر تعداد مشاهدات گروه iام برابر T باشد، تخمین‌زنندهٔ $[\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta]$ با افزایش T یا n سازگار خواهد بود. بنابراین، معادله زیر را داریم:

$$Y_{it}-\mathbf{x}_{it}'\boldsymbol\beta-\alpha=u_i+\varepsilon_{it} \qquad (۲۲-۹۷)$$

که در این معادله، u_i «قابل مشاهده» می‌شود. میانگین گروهی عبارت است از:

$$\overline{Y}_{i\circ}-\mathbf{x}_{i\circ}'\boldsymbol\beta-\alpha=u_i+\overline{\varepsilon}_{i\circ} \qquad (۲۲-۹۸)$$

چون $\overline{\varepsilon}_{i\circ}$ به سمت صفر همگرا است لذا u_i برای ما آشکار می‌شود. لذا اگر T به سمت بی‌نهایت میل کند، u_i معادل با α_iD_i می‌شود که قبلاً راجع به آن بحث شد (D_iبردار ۱ برای گروه i و ۰ برای سایر گروه‌ها است).

اگر حجم نمونه‌ها(گروه‌ها)یکسان نباشد، به آن نامتوازن می‌گویند. در این‌صورت مشکل دیگری به مدل اثرات تصادفی اضافه می‌شود. مشکل اول در خصوص Ω است که ابعاد آن متفاوت می‌شود. همچنین ناهمسانی واریانس تشدید می‌شود، زیرا بلوک iام در ماتریس $\Omega^{-\frac{1}{2}}$ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\Omega_i^{-\frac{1}{2}}=\mathbf{I}_{T_i}-\theta_i\mathbf{B}_{T_i} \quad , \quad \theta_i=1-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T_i\sigma_u^2}} \qquad (۲-۹۹)$$

برای استفاده از روش GLS، می‌توان با برآورد واریانس روش FGLS[1] را به‌کار برد. بنابراین ابتدا لازم است که واریانس‌ها (یعنی تخمین σ_u^2 و σ_ε^2) را تخمین بزنیم. بدین منظور معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{رگرسیون کل}: Y_{it}=\mathbf{x}_{it}'\boldsymbol\beta+\alpha+\varepsilon_{it}+u_i \qquad (۲۲-۱۰۰)$$

$$\text{رگرسیون بین‌گروهی}: \overline{Y}_{i\circ}=\overline{\mathbf{x}}_{i\circ}'\boldsymbol\beta+\alpha+\overline{\varepsilon}_{i\circ}+u_i \qquad (۲۲-۱۰۱)$$

با محاسبهٔ تفاضل معادلات فوق، رگرسیون درون‌گروهی به‌دست می‌آید که u_i از آن حذف می‌شود و لذا جملهٔ خطای آن فقط شامل ε_{it} می‌باشد:

$$\text{رگرسیون درون‌گروهی}: Y_{it}-\overline{Y}_{i\circ}=(\mathbf{x}_{it}-\overline{\mathbf{x}}_{i\circ})'\boldsymbol\beta+(\varepsilon_{it}-\overline{\varepsilon}_{i\circ}) \qquad (۲۲-۱۰۲)$$

1- feasible GLS

برای تخمین σ_u^2، معادله (۱۰۲-۲۲) را با روش OLS برآورد کرده و باقیمانده‌های آن (e_{it}ها) را محاسبه می‌کنیم. این باقیمانده‌ها مربوط به رگرسیون درون‌گروهی یا همان LSDV است. اگر این باقیمانده‌ها را برای گروه iام در نظر بگیریم شامل e_{i1}، e_{i2}، ... و e_{iT} است که برای آنها رابطه زیر برقرار است:

$$E\left[\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_{it}-\bar{\varepsilon}_{i\circ})^2\right]=(T-1)\sigma_\varepsilon^2 \quad (۱۰۳-۲۲)$$

رابطه (۱۰۳-۲۲) بیانگر آن است که بر اساس باقیمانده‌های گروه iام می‌توان یک تخمین‌زنندهٔ نااریب برای σ_ε^2 به‌دست آورد. بنابراین با داشتن β، تخمین‌زنندهٔ نااریب σ_ε^2 براساس T مشاهده در گروه i طبق (۱۰۳-۲۲) عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(i)=\frac{\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i\circ})^2}{T-1} \quad (۱۰۴-۲۲)$$

از آنجا که برای محاسبهٔ e_{it}ها بایستی β را تخمین بزنیم لذا بایستی درجه آزادی را تعدیل کرده که با استفاده از باقیمانده‌های LSDV خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(i)=\frac{\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i\circ})^2}{T-K-1} \quad (۱۰۵-۲۲)$$

درجه آزادی تصحیح شدهٔ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ بیش از حد، کاهش یافته است، زیرا مشابه آن است که فرض کرده‌ایم α و β برای هر i مجدداً تخمین زده می‌شوند. در حالی که ضرایب تخمینی فقط شامل n ضریب α و K ضریب β می‌باشد. لذا تخمین‌زنندهٔ نااریب عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\hat{\sigma}_{LSDV}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i\circ})^2}{nT-n-K} \quad (۱۰۶-۲۲)$$

حال بایستی σ_u^2 را برآورد کنیم. بدین منظور به معادله (۱۰۰-۲۲) برمی‌گردیم که علی‌رغم همبستگی مشاهدات، یک مدل رگرسیون کلاسیک است که در آن تخمین‌زنندهٔ OLS برای شیب‌ها و واریانس، سازگار می‌باشد. لذا با استفاده از باقیمانده‌های رگرسیون (۱۰۰-۲۲)، واریانس آن که تخمین $\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ می‌باشد به‌دست می‌آید. اگر جملهٔ خطای این معادله را با $v_{it}=\varepsilon_{it}+u_i$

نشان دهیم در این صورت با استفاده از v_{it}ها می‌توان تخمین σ_v^2 (که برابر با $\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ است) را به‌دست آورد. توجه شود که این معادله به‌صورت یک مدل تجمیعی در نظر گرفته می‌شود و با برآورد آن، واریانس v_{it} را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{plim}\,\hat{\sigma}_{Pooled}^2=\text{plim}\frac{\hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{v}}}{nT-K-1}=\sigma_v^2=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2 \quad (۱۰۷-۲۲)$$

$\hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{v}}=\sum_i\sum_t\hat{v}_{it}^2$ است. بنابراین، $\hat{\sigma}_u^2$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}_u^2=\hat{\sigma}_{Pooled}^2-\hat{\sigma}_{LSDV}^2 \quad (۱۰۸-۲۲)$$

اما مشکل وقتی به‌وجود می‌آید که $\hat{\sigma}_u^2$ منفی شود. از طرف دیگر می‌دانیم که روش GLS نیازی به تخمین‌زنندهٔ نااریب واریانس ندارد، بلکه فقط بایستی سازگار باشد. یک راه آن است که درجه آزادی (۱۰۶-۲۲) و (۱۰۷-۲۲) را تغییر دهیم. اگر چنین کنیم، در آن صورت هر دو تخمین‌زنندهٔ واریانس ($\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ و $\hat{\sigma}_u^2$) غیر منفی خواهند شد، زیرا مجموع مجذورات در مدل LSDV (مدل غیرمقید) نمی‌تواند بزرگتر از مجموع مجذورات در رگرسیون تجمیعی (مدل مقید) باشد. تخمین‌زننده‌های دیگری نیز پیشنهاد شده است بر مبنای این اصل قرار داد که از دو مجموع مجذورات باقیمانده‌ها استفاده شود.

اگر برخی از متغیرهای توضیحی (X_{it}ها) وجود داشته باشند که در داخل گروه‌ها تغییر نکنند، در این صورت تخمین‌زنندهٔ LSDV را نمی‌توان حساب نمود. در این حالت، معمولاً یکی از متغیرهای توضیحی بیانگر یک متغیر مجازی است. چنین متغیرهایی همخطی کامل با متغیرهای مجازی خواهند داشت که اثرات ثابت را منعکس می‌کنند. این موضوع مانع از محاسبه تخمین‌زنندهٔ LSDV می‌گردد. در این حالت، هنوز امکان تخمین اجزاء واریانسِ اثرات تصادفی وجود دارد. تصور کنید که $[\hat{\beta},\hat{\alpha}]$ تخمین‌زننده‌های سازگار $[\beta,\alpha]$ باشند، از قبیل تخمین‌زنندهٔ *OLS*. در این صورت (۱۰۷-۲۲) تخمین‌زنندهٔ سازگار برای $m_{ee}=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ است. میانگین مجذور باقیمانده که با استفاده از رگرسیون میانگین‌های گروهی ($\bar{Y}_{i\circ}$) به‌دست می‌آید، می‌تواند به‌عنوان تخمین‌زننده سازگار برای $m_{**}=\sigma_u^2+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{T}$ به‌کار رود. بنابراین، خواهیم داشت:

معادله (۴۶-۲۲) در واقع به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y_{it}=\sum_{k=1}^{K}\beta_k X_{kit}+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j D_j+\varepsilon_{it} \qquad (۲۲-۴۸)$$

اگر n کوچک باشد، این مدل را می‌توان با روش OLS برای تخمین K ضریب X و n ضریب ثابت (α_i ها) مورد استفاده قرار دارد که مشابه یک رگرسیون $K+n$ متغیره می‌باشد. اگر n بزرگ باشد، تعداد ضرایب این مدل بسیار زیاد خواهد شد. اما با استفاده از تقسیم‌بندی رگرسیون، می‌توان محاسبات را کوتاه‌تر کرد. مدل (۴۴-۲۲) را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\mathbf{y}=[\mathbf{X}\ \ \mathbf{D}]\begin{bmatrix}\boldsymbol\beta\\ \boldsymbol\alpha\end{bmatrix}+\boldsymbol\varepsilon=\mathbf{Z}\boldsymbol\theta+\boldsymbol\varepsilon \ ;\ \mathbf{Z}=[\mathbf{X}\ \ \mathbf{D}]\ ,\ \boldsymbol\theta=\begin{bmatrix}\boldsymbol\beta\\ \boldsymbol\alpha\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۴۹)$$

تخمین $\boldsymbol\theta$ عبارت است از:

$$(\mathbf{Z'Z})\hat{\boldsymbol\theta}=\mathbf{Z'y}\ \Rightarrow\ \hat{\boldsymbol\theta}=(\mathbf{Z'Z})^{-1}\mathbf{Z'y} \qquad (۲۲-۵۰)$$

با توجه‌به $\mathbf{Z'Z}=\begin{bmatrix}\mathbf{X'}\\ \mathbf{D'}\end{bmatrix}[\mathbf{X}\ \ \mathbf{D}]=\begin{bmatrix}\mathbf{X'X} & \mathbf{X'D}\\ \mathbf{D'X} & \mathbf{D'D}\end{bmatrix}$ به‌جای $\mathbf{Z'Z}$، $\hat{\boldsymbol\theta}$ و $\mathbf{Z'}$ در (۵۰-۲۲) قرار می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X'X} & \mathbf{X'D}\\ \mathbf{D'X} & \mathbf{D'D}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol\beta}\\ \hat{\boldsymbol\alpha}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X'y}\\ \mathbf{D'y}\end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol\beta}+(\mathbf{X'D})\hat{\boldsymbol\alpha}=\mathbf{X'y} & (۱۹-۵۱)\\ (\mathbf{D'X})\hat{\boldsymbol\beta}+(\mathbf{D'D})\hat{\boldsymbol\alpha}=\mathbf{D'y} & (۱۹-۵۲)\end{matrix}$$

از (۵۲-۲۲) $\hat{\boldsymbol\alpha}$ را حساب کرده و در (۵۱-۲۲) قرار داده و $\hat{\boldsymbol\beta}$ را به‌دست می‌آوریم:

$$(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol\beta}+(\mathbf{X'D})[(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'y}-(\mathbf{D'D})^{-1}(\mathbf{D'X})\hat{\boldsymbol\beta}]=\mathbf{X'y}$$
$$[(\mathbf{X'X})-(\mathbf{X'D})(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'X}]\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{X'y}-(\mathbf{X'D})(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'y}$$
$$\mathbf{X'}[\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{D}(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'}]\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{X'}[\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{D}(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'}]\mathbf{y}$$

طبق (۲۳-۲۲)، ماتریس $\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{D}(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'}$ معادل با ماتریس $\mathbf{Q}$ است:

$$(\mathbf{X'QX})\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{X'Qy}\ \Rightarrow\ \hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV}=(\mathbf{X'QX})^{-1}(\mathbf{X'Qy}) \qquad (۲۲-۵۳)$$

نتایج فوق برای رگرسیونی است که داده‌های آن با تبدیل $\mathbf{X_*}=\mathbf{QX}$ و $\mathbf{y_*}=\mathbf{Qy}$ به‌دست آمده‌اند. از آنجا که $\mathbf{Q}$ یک ماتریس خودتوان و متقارن است، لذا $\mathbf{Q'Q}=\mathbf{Q}$ می‌باشد. بنابراین $\mathbf{X'_*X_*}=(\mathbf{QX})'(\mathbf{QX})=\mathbf{X'QX}$ و $\mathbf{X'_*y_*}=(\mathbf{QX})'(\mathbf{Qy})=\mathbf{X'Qy}$ است.

بنابراین، $\mathbf{Qy}$ و $\mathbf{QX}$ «انحراف از میانگین گروهی Y و X» می‌باشند. لذا تخمین $\hat{\boldsymbol\beta}$ در (۵۳-۲۲)، معادل با رگرسیون $\mathbf{Qy}$ روی $\mathbf{QX}$ است. به‌عبارت دیگر بیانگر رگرسیون $Y_{it}-\bar{Y}_{i\circ}$ روی $X_{it}-\bar{X}_{i\circ}$ می‌باشد. این تخمین‌زننده معروف به تخمین‌زنندهٔ درون‌گروهی[1] است که در بخش‌های بعدی بررسی خواهد شد. به‌هرحال آنچه که به‌عنوان تخمین‌زنندهٔ $\boldsymbol\beta$ به‌صورت (۵۳-۲۲) به‌دست آمد معروف به تخمین‌زنندهٔ حداقل مربعات متغیرهای مجازی (LSDV) است که با $\hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV}$ نشان داده می‌شود. بنابراین، تفاوت $\hat{\boldsymbol\beta}_{Pooled}$ و $\hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV}$ در این است که اولی از «میانگین کل» و دومی از «میانگین گروهی» استفاده می‌کند. به‌همین دلیل است که در $\hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV}$ تفاوت‌های فردی (گروهی) لحاظ شده است ولی در $\hat{\boldsymbol\beta}_{Pooled}$ این تفاوت‌ها لحاظ نمی‌شود.

ضرایب متغیرهای مجازی را می‌توان از معادلات نرمال و رگرسیون مقطعی به‌دست آورد. با استفاده از (۵۲-۲۲) خواهیم داشت:

$$(\mathbf{D'D})\hat{\boldsymbol\alpha}=\mathbf{D'y}-(\mathbf{D'X})\hat{\boldsymbol\beta}=\mathbf{D'}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})\Rightarrow\hat{\boldsymbol\alpha}=(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})$$

اما ماتریس $\mathbf{D'D}$ طبق (۲۱-۲۲) برابر با $T\mathbf{I}_n$ است.

از طرف دیگر، با ضرب ماتریس $\mathbf{D'}$ در هر متغیری، حاصل‌جمع آن متغیر به‌دست خواهد آمد. به‌عنوان مثال با ضرب $\mathbf{D'}$ در $\mathbf{y}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{D'y}=\begin{bmatrix}\sum_{t=1}^{T}Y_{1t}\\ \vdots\\ \sum_{t=1}^{T}Y_{nt}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \bar{\mathbf{y}}_\circ=\frac{1}{T}\mathbf{D'y}=\begin{bmatrix}\bar{Y}_{1\circ}\\ \bar{Y}_{2\circ}\\ \vdots\\ \bar{Y}_{n\circ}\end{bmatrix}$$

بنابراین، $\frac{1}{T}\mathbf{D'y}$ میانگین‌های گروهی $\mathbf{y}$ و $\frac{1}{T}\mathbf{D'X}$ نیز میانگین‌های گروهی X است. بدین‌ترتیب، $\hat{\boldsymbol\alpha}$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\hat{\boldsymbol\alpha}=\begin{bmatrix}\hat\alpha_1\\ \hat\alpha_2\\ \vdots\\ \hat\alpha_n\end{bmatrix}=(\mathbf{D'D})^{-1}\mathbf{D'}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})=\frac{1}{T}\mathbf{D'}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol\beta})=\begin{bmatrix}\bar{Y}_{1\circ}-\sum_{k=1}^{K}\hat\beta_k\bar{X}_{k1\circ}\\ \vdots\\ \bar{Y}_{n\circ}-\sum_{k=1}^{K}\hat\beta_k\bar{X}_{kn\circ}\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۵۴)$$

1- within

۲۲-۷ آزمون معنادار بودن اثرات ثابت

برای آزمون معنادار بودن ضریب α_i (آزمون فرضیه $\alpha_i = 0$) می‌توان از نسبت t استفاده نمود. این فرضیه صرفاً در خصوص یک گروه خاص می‌باشد. اگر بخواهیم اثرات گروهی را به‌صورت یکجا آزمون کنیم، در این صورت می‌توان از آزمون F استفاده نمود. در این حالت، آزمون می‌کنیم که آیا اثرات گروهی، متفاوت است (یعنی α_iها متفاوتند) و یا یکسان هستند (یعنی α_iها برابرند). بدین‌ترتیب، فرضیه‌ها به‌صورت $H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha$ است. تحت فرضیه H_0 معادله (۵۵-۲۲) را داریم که در مقابلِ معادله (۵۶-۲۲) آزمون می‌شود:

$$\text{(LSDV) رگرسیون غیرمقید}: Y_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k X_{kit} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i D_i + \varepsilon_{it} \rightarrow RSS_{UR}, R^2_{UR} \qquad (۲۲\text{-}۵۵)$$

$$\text{(Pooled) رگرسیون مقید}: Y_t = \sum_{k=1}^{K} \beta_k X_{kit} + \alpha + \varepsilon_{it} \rightarrow RSS_R = RSS_{pooled}\ ,\ R^2_R = R^2_{pooled} \qquad (۲۲\text{-}۵۶)$$

اولی رگرسیون LSDV است که تفاوت‌های گروهی را لحاظ می‌کند و لذا آن را رگرسیون غیرمقید می‌گوییم. دومی رگرسیون تجمیعی است که تفاوت‌های گروهی را در نظر نمی‌گیرد و α_iها را یکسان فرض می‌کند و لذا آن را رگرسیون مقید می‌گوییم. برای هر یک از این معادلات، RSS و R^2 را حساب کرده و نسبت F را تشکیل می‌دهیم[1]:

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_{UR})/(n-1)}{RSS_{UR}/nT-K-n} = \frac{nT-K-n}{n-1}\,\frac{R^2_R - R^2_{UR}}{1-R^2_{UR}} \qquad (۲۲\text{-}۵۷)$$

بزرگ بودن F بدان معنا است که فرضیه H_0 رد می‌شود و لذا اثرات ثابت، معنادار است و α_iها یکسان نیستند. به‌عبارت دیگر تفاوت‌های فردی یا گروهی، معنادار است.

۲۲-۸ تخمین‌زننده‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی

سه نوع معادله رگرسیون را می‌توان تعریف کرد:

۱- رگرسیون تجمیعی[2]: رگرسیون تجمیعی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y_{it} = \sum_{k=1}^{K} \beta_k X_{kit} + \alpha + \varepsilon_{it} = \mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha + \varepsilon_{it} \qquad (۲۲\text{-}۵۸)$$

۱- فصل پنجم را ببینید.

2- pooled

$$\mathbf{x}'_{it} = (X_{1it}\ \ldots\ X_{kit})\ ,\ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_K\end{bmatrix}$$

و یا

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \alpha \mathbf{i}_{nT} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۲\text{-}۵۹)$$

که $\mathbf{y}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ بردارهای ستونی $nT\times 1$ و $\mathbf{X}$ ماتریس $nT\times K$ و α اسکالر است.

۲- رگرسیون بین‌گروهی[1]: رگرسیون بین‌گروهی براساس میانگین‌های گروه تعریف می‌شود. در واقع اگر (۵۸-۲۲) را روی t جمع زده و میانگین آن را حساب کنیم، میانگین Y و X برای هر گروه به‌دست می‌آید:

$$\bar{Y}_{i\circ} = \sum_{k=1}^{K} \beta_k \bar{X}_{ki\circ} + \alpha + \bar{\varepsilon}_{i\circ} = \bar{\mathbf{x}}'_{i\circ}\boldsymbol{\beta} + \alpha + \bar{\varepsilon}_{i\circ} \qquad (۲۲\text{-}۶۰)$$

$$\bar{\mathbf{x}}'_{i\circ} = \left[\bar{X}_{1i\circ}\ \ldots\ \bar{X}_{Ki\circ}\right]\ ,\ \bar{Y}_{i\circ} = \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_{it}}{T}\ ,\ \bar{X}_{ki\circ} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{kit}}{T}$$

معادله (۶۰-۲۲) شامل n مشاهده است، زیرا برای هر گروه یک مشاهده (میانگین) وجود دارد. در واقع میانگین هر گروه، نمایندهٔ مشاهدات آن گروه است.

معادله فوق را به‌صورت دیگری نیز می‌توان به‌دست آورد. با توجه به اینکه عملگر $\mathbf{B}$ «میانگین‌ساز گروهی» است، با ضرب طرفین (۵۹-۲۲) در $\mathbf{B}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{By} = \mathbf{BX}\boldsymbol{\beta} + \alpha \mathbf{i}_{nT} + \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۲\text{-}۶۱)$$

توجه شود که چون $\alpha \mathbf{i}_{nT}$ ثابت است لذا $\mathbf{B}\alpha = \alpha \mathbf{i}_{nT}$ می‌باشد.

۳- رگرسیون درون‌گروهی[2]: رگرسیون درون‌گروهی برای داخل هر گروه تعریف می‌شود و به‌صورت انحراف از میانگینِ هر گروه می‌باشد. رگرسیون درون‌گروهی از تفاوت (۵۸-۲۲) و (۶۰-۲۲) به‌دست می‌آید:

$$(Y_{it} - \bar{Y}_{i\circ}) = \sum_{k=1}^{K} \beta_k (X_{kit} - \bar{X}_{ki\circ}) + (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_{i\circ}) = (\mathbf{x}_{it} - \bar{\mathbf{x}}_{i\circ})'\boldsymbol{\beta} + (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_{i\circ}) \qquad (۲۲\text{-}۶۲)$$

1- between
2- within

و یا می‌توان از فرم ماتریسی نیز استفاده نمود ((۶۱-۲۲) را از (۵۹-۲۲) کم می‌کنیم):

$$\mathbf{y}-\mathbf{B}\mathbf{y}=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}-\mathbf{B}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}-\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow (\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{B})\mathbf{y}=(\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{B})\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{B})\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۲-۶۳)$$

که با استفاده از $\mathbf{Q}=\mathbf{I}_{nT}-\mathbf{B}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{Q}\mathbf{y}=\mathbf{Q}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{Q}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (۲۲-۶۴)$$

Q «انحراف از میانگین‌ساز گروهی» است که به صورت (۱۲-۲۲) و (۱۳-۲۲) تعریف شده است. هر سه رگرسیون را می‌توان با روش OLS تخمین زد. تخمین‌زننده‌های OLS سازگارند، ولی کارا نیستند. در اینجا تمرکز بحث بر تخمین $\boldsymbol{\beta}$ است.

حال براساس تقسیم‌بندی فوق می‌توان سه نوع تغییرات (مجموع مجذورات انحراف از میانگین) را تعریف نمود[1]. در اینجا، برای رعایت سادگی، فقط یک متغیر توضیحی را در نظر می‌گیریم.

۱- تغییرات کل (TSS): تغییرات کل بیانگر مجموع مجذورات انحراف از میانگین کل برای هر یک از متغیرها است. بدین منظور ابتدا میانگین کل را برای Y_{it} و X_{it} به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{X}_{\circ\circ}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}X_{kit}}{nT}$$

$$\overline{Y}_{\circ\circ}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}Y_{it}}{nT}$$

بنابراین، تغییرات کل عبارت است از:

$$TSS_{xx}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(X_{it}-\overline{X}_{\circ\circ})^{2}=(\mathbf{MX})'(\mathbf{MX})=\mathbf{X}'\mathbf{MX} \qquad (۲۲-۶۵)$$

$$TSS_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(X_{it}-\overline{X}_{\circ\circ})(Y_{it}-\overline{Y}_{\circ\circ})=(\mathbf{MX})'(\mathbf{My})=\mathbf{X}'\mathbf{My} \qquad (۲۲-۶۶)$$

M «انحراف از میانگین‌ساز کل» است.

۱- برای نام‌گذاری این سه نوع تغییر، از **T** برای کل (Total)، B برای بین‌گروهی (Between)، W برای درون‌گروهی (Within) و همچنین از SS برای مجموع مجذورات (Sum of Squares) استفاده شده است. لذا TSS، BSS و WSS به ترتیب تغییرات کل، بین‌گروهی و درون‌گروهی را نشان می‌دهند.

۲- تغییرات درون‌گروهی (WSS): تغییرات درون‌گروهی بیانگر مجموع مجذور انحراف از میانگین گروه می‌باشد. میانگین Y_{it} و X_{it} برای گروه iام عبارت است از:

$$\overline{X}_{i\circ}=\frac{\sum_{t}X_{it}}{T}$$

$$\overline{Y}_{i\circ}=\frac{\sum_{t=1}^{T}Y_{it}}{T} \quad ; \quad i=1,\dots,n$$

براین اساس، تغییرات درون‌گروهی عبارت است از:

$$WSS_{xx}=\sum_{i}\sum_{t}(X_{it}-\overline{X}_{i\circ})^{2}=(\mathbf{QX})'(\mathbf{QX})=\mathbf{X}'\mathbf{QX} \qquad (۲۲-۶۷)$$

$$WSS_{xy}=\sum_{i}\sum_{t}(X_{it}-\overline{X}_{i\circ})(Y_{it}-\overline{Y}_{i\circ})=(\mathbf{QX})'(\mathbf{Qy})=\mathbf{X}'\mathbf{Qy}$$

Q «انحراف از میانگین‌ساز گروهی» است.

۳- تغییرات بین‌گروهی(BSS): تغییرات بین گروهی بیانگر مجموع مجذورات انحراف میانگین هر گروه از میانگین کل هر یک از متغیرها می‌باشد.

$$BSS_{xx}=\sum_{i}\sum_{t}(\overline{X}_{i\circ}-\overline{X}_{\circ\circ})^{2}=T\sum_{i}(\overline{X}_{i\circ}-\overline{X}_{\circ\circ})^{2} \qquad (۲۲-۶۸)$$

$$BSS_{xy}=\sum_{i}\sum_{t}(\overline{X}_{i\circ}-\overline{X}_{\circ\circ})(\overline{Y}_{i\circ}-\overline{Y}_{\circ\circ})=T\sum_{i}(\overline{X}_{i\circ}-\overline{X}_{\circ\circ})(\overline{Y}_{i\circ}-\overline{Y}_{\circ\circ})$$

۴- رابطه تغییرات کل با تغییرات درون‌گروهی و برون‌گروهی: تغییرات کل برابر با تغییرات بین‌گروهی به‌علاوهٔ تغییرات درون‌گروهی است[1]:

$$TSS_{xx}=WSS_{xx}+BSS_{xx} \qquad (۲۲-۶۹)$$

حال براساس معادلاتی که تعریف شد می‌توان سه نوع تخمین را برای بردار $\boldsymbol{\beta}$ در رگرسیون Kمتغیره، ارائه نمود:

۱- تخمین $\boldsymbol{\beta}$ در معادله رگرسیون کل (تجمیعی) برابر است با:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{T}=(\mathbf{TSS}_{xx})^{-1}\mathbf{TSS}_{xy}=(\mathbf{X}'\mathbf{MX})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{My}) \qquad (۲۲-۷۰)$$
$$=(\mathbf{WSS}_{xx}+\mathbf{BSS}_{xx})^{-1}(\mathbf{WSS}_{xy}+\mathbf{BSS}_{xy})$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{T}$ معادل با $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{Pooled}$ است.

۱- این رابطه را می‌توان به‌سادگی اثبات نمود. بدین منظور لازم است که در (۳۰-۱۹) به عبارت داخل پرانتز میانگین‌های گروهی (یعنی $\overline{X}_{i\circ}$ یا $\overline{Y}_{i\circ}$) را اضافه و کم کرده و با ساده نمودن آن، نتیجه موردنیاز به دست خواهد آمد.

۲- تخمین β در معادله رگرسیون درون‌گروهی برابر است با:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_W = (\mathbf{WSS}_{xx})^{-1}\mathbf{WSS}_{xy} = (\mathbf{X'QX})^{-1}(\mathbf{X'Qy}) \qquad (۲۲-۷۱)$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_W$ معادل با $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LSDV}$ است. توجه شود که $\mathbf{Q'}=\mathbf{Q}$ و $\mathbf{Q}^2=\mathbf{Q}$ است.

۳- تخمین β در معادله رگرسیون بین‌گروهی برابر است با:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_B &= (\mathbf{BSS}_{xx})^{-1}\mathbf{BSS}_{xy} = (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}) \\ &= [(\mathbf{BX})'(\mathbf{BX})]^{-1}[(\mathbf{BX})'(\mathbf{By})] \qquad (۲۲-۷۲) \\ &= (\mathbf{X'BX})^{-1}(\mathbf{X'By})\end{aligned}$$

$\mathbf{B'}=\mathbf{B}$ و $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$ است. $\hat{\boldsymbol{\beta}}_B$ از رگرسیون $\mathbf{By}$ (میانگین گروهی Y_{it}) روی $\mathbf{BX}$ (میانگین گروهی X_{it} ها) به‌دست می‌آید.

حال برای سادگی، حالت یک متغیره را در نظر بگیرید که تخمین ضرایب عبارت است از:

$$\hat{\beta}_T = (TSS_{xx})^{-1}(TSS_{xy}) = \frac{\sum_i\sum_t (X_{it}-\bar{X}_{\circ\circ})(Y_{it}-\bar{Y}_{\circ\circ})}{\sum_i\sum_t (X_{it}-\bar{X}_{\circ\circ})^2} \qquad (۲۲-۷۳)$$

$$\hat{\beta}_W = (WSS_{xx})^{-1}(WSS_{xy}) = \frac{\sum_i\sum_t (X_{it}-\bar{X}_{i\circ})(Y_{it}-\bar{Y}_{i\circ})}{\sum_i\sum_t (X_{it}-\bar{X}_{i\circ})^2} \qquad (۲۲-۷۴)$$

$$\hat{\beta}_B = (BSS_{xx})^{-1}(BSS_{xy}) = \frac{\sum_i (\bar{X}_{i\circ}-\bar{X}_{\circ\circ})(\bar{Y}_{i\circ}-\bar{Y}_{\circ\circ})}{\sum_i\sum_t (\bar{X}_{i\circ}-\bar{X}_{\circ\circ})^2} \qquad (۲۲-۷۵)$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که تخمین کل برابر با متوسط وزنی تخمین ضرایب درون‌گروهی و بین‌گروهی است. بدین منظور $\hat{\beta}_T$ را با استفاده از (۲۲-۴۱) به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_T &= \frac{TSS_{xy}}{TSS_{xx}} = \frac{WSS_{xy}+BSS_{xy}}{WSS_{xx}+BSS_{xx}} \qquad (۲۲-۷۶) \\ &= \frac{WSS_{xx}\frac{WSS_{xy}}{WSS_{xx}} + BSS_{xx}\frac{BSS_{xy}}{BSS_{xx}}}{TSS_{xx}} \\ &= \frac{WSS_{xx}}{TSS_{xx}}\hat{\beta}_W + \frac{BSS_{xx}}{TSS_{xx}}\hat{\beta}_B\end{aligned}$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که تخمین‌زنندهٔ β با روش OLS در مدل تجمیعی ($\hat{\beta}_{pooled}$) برابر با متوسط تخمین‌زننده‌های درون‌گروهی و بین‌گروهی است. با توجه به $\hat{\beta}_T = \hat{\beta}_{pooled}$ و $\hat{\beta}_W = \hat{\beta}_{LSDV}$، رابطه (۲۲-۷۶) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\beta}_{pooled} = f\hat{\beta}_{LSDV} + (1-f)\hat{\beta}_B \quad , \quad f = \frac{WSS_{xx}}{TSS_{xx}} \qquad (۲۲-۷۷)$$

اگر $f=1$ باشد، آنگاه $\hat{\beta}_{pooled} = \hat{\beta}_{LSDV}$ است و نشان می‌دهد که مدل اثرات ثابت و تجمیعی، تفاوتی ندارند زیرا در این حالت، اثرات بین‌گروهی (تفاوت‌های فردی) ناچیز است.

۲۲-۹ مدل اثرات تصادفی

مدل اثرات ثابت، امکان بررسی اثرات فردی مشاهده‌نشده را که با متغیرهای توضیحی همبستگی دارند، فراهم می‌کند. در چنین شرایطی می‌توان تفاوت‌های فردی را به‌عنوان انتقال تابع رگرسیون تصور نمود. این مدل عمدتاً برای بررسی خصوصیات فردی یا گروهی واحدهای مورد مطالعه، قابل کاربرد است و لذا نمی‌توان نتایج آن را به واحدهای خارج از نمونه تعمیم داد. زیرا «اثرات ثابت» مختص هر فرد یا گروه است که سایر افراد یا گروه‌ها، فاقد آن هستند. به همین دلیل است که آن را اثرات ثابت می‌نامند، یعنی خصوصیات فردی در طول زمان تغییر نمی‌کند. اگر اثرات فردی یا گروهی اکیداً با متغیرهای توضیحی همبستگی نداشته باشد، در این صورت بایستی جملات ثابت فردی (α_i) را به نحوی مدل‌سازی نمود تا به‌صورت تصادفی در بین گروهها توزیع شود. در اینجا خصوصیات فردی یا گروهی، ارتباطی با متغیرهای توضیحی ندارند، زیرا تصادفی هستند. مثلاً در بررسی خصوصیات بنگاه به این نتیجه می‌رسیم که با هم دارای تفاوت‌های قابل توجهی هستند ولی این تفاوت‌ها به‌صورت تصادفی به‌وجود آمده است، زیرا عوامل بسیاری زیادی در ایجاد آنها نقش داشته‌اند. اگر بر این باور باشیم که گروهها از یک جامعه بزرگ نمونه‌گیری شده‌اند، به نظر می‌آید که این روش، مناسب است. یکی از نتایج مهم این روش آن است که تعداد ضرایب را تقلیل می‌دهد. زیرا در مدل اثرات ثابت بایستی n متغیر مجازی تعریف کنیم که درجه آزادی را کاهش می‌دهد.

حال فرمول‌بندی زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{it}=\sum_{k=1}^{K}\beta_k X_{kit}+(\alpha+u_i)+\varepsilon_{it}=\mathbf{x}'_{it}\boldsymbol{\beta}+(\alpha+u_i)+\varepsilon_{it} \qquad (۲۲-۷۸)$$

$$\mathbf{x}'_{it}=\begin{bmatrix}X_{1it} & X_{2it} & \dots & X_{Kit}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_K\end{bmatrix}$$

در این مدل، K متغیر توضیحی به‌علاوهٔ یک جمله ثابت (α) داریم. در این مدل، جمله ثابت (α) بیانگر «میانگین ناهمگنی‌ها یا تفاوت‌های مشاهده‌نشده» است. ناهمگنی‌های فردی یا گروهی را با $\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha}$ و متوسط آن را با $E(\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha})$ نشان می‌دهیم. بنابراین $u_i=\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha}-E(\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha})$ می‌باشد. در واقع u_i شامل مجموعه عواملی است (یعنی $\mathbf{z}'_i\boldsymbol{\alpha}$) که در رگرسیون نیستند ولی مختص هر گروه می‌باشند.

برای این مدل، فروض زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
&\text{۱) صفر بودن امید ریاضی: } E(\varepsilon_{it}|\mathbf{X})=E(u_i|\mathbf{X})=0\\
&\text{۲) } \varepsilon_{it} \text{ واریانس همسانی: } \operatorname{var}(\varepsilon_{it}|\mathbf{X})=E(\varepsilon_i^2|\mathbf{X})=\sigma_\varepsilon^2\\
&\text{۳) } u_i \text{ واریانس همسانی: } \operatorname{var}(u_i|\mathbf{X})=E(u_i^2|\mathbf{X})=\sigma_u^2\\
&\text{۴) } \varepsilon_{it} \text{ و } u_i \text{ عدم همبستگی: } \operatorname{cov}(\varepsilon_{it},u_j)=E(\varepsilon_{it}u_j|\mathbf{X})=0\;;\quad \text{برای هر } i\text{، } t \text{ و } j\\
&\text{۵) } \varepsilon_{it} \text{ عدم خودهمبستگی: } \operatorname{cov}(\varepsilon_{it},\varepsilon_{js})=E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{js}|\mathbf{X})=0\;;\quad \text{برای هر } i\neq j \text{ و } t\neq s\\
&\text{۶) } u_i \text{ عدم خودهمبستگی: } \operatorname{cov}(u_i,u_j)=E(u_iu_j|\mathbf{X})=0\;;\quad \text{برای هر } i\neq j
\end{aligned} \qquad (۲۲-۷۹)$$

فرض ۶ بیانگر آن است که تفاوت‌های فردی یک گروه با گروه دیگر، همبستگی ندارد زیرا تصادفی هستند.

اگر $v_{it}=\varepsilon_{it}+u_i$ باشد، طبق فروض ۱ تا ۶ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&E(v_{it}^2|\mathbf{X})=E[(\varepsilon_{it}+u_i)^2|\mathbf{X}]=E[(\varepsilon_{it}^2+u_i^2)^2|\mathbf{X}]=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2\\
&E(v_{it}v_{is}|\mathbf{X})=E[(\varepsilon_{it}+u_i)(\varepsilon_{is}+u_i)|\mathbf{X})]=E(u_i^2)=\sigma_u^2\;;\quad t\neq s\\
&E(v_{it}v_{js}|\mathbf{X})=E[(\varepsilon_{it}+u_i)(\varepsilon_{js}+u_j)|\mathbf{X})]=0\;;\qquad \text{برای هر } t \text{ و } s \text{ و } i\neq j
\end{aligned} \qquad (۲۲-۸۰)$$

اگر بردار $\mathbf{v}_i=[v_{i1}\ v_{i2}\cdots v_{iT}]$ باشد، در این صورت واریانس $\mathbf{v}_i$ عبارت است از:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\operatorname{var}(\mathbf{v}_i)=E(\mathbf{v}_i\mathbf{v}'_i|\mathbf{X})=E\begin{bmatrix}v_{i1}\\ \vdots\\ v_{iT}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{i1} & \cdots & v_{iT}\end{bmatrix}$$

$$=E\begin{bmatrix}v_{i1}^2 & v_{i1}v_{i2} & \cdots & v_{i1}v_{iT}\\ v_{i2}v_{i1} & v_{i2}^2 & \cdots & v_{i2}v_{iT}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ v_{iT}v_{i1} & v_{iT}v_{i2} & \cdots & v_{iT}^2\end{bmatrix}_{T\times T} \qquad (۲۲-۸۱)$$

از آنجا که $E(v_{it}^2|\mathbf{X})=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ و $E(v_{it}v_{is}|\mathbf{X})=\sigma_u^2$ است و با توجه به اینکه گروه iام دارای T مشاهده است، لذا برای گروه iام خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2\\ \sigma_u^2 & \sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2 & \cdots & \sigma_u^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_u^2 & \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2\end{bmatrix}_{T\times T}$$

$$=\sigma_\varepsilon^2\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}+\sigma_u^2\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۸۲)$$

$$=\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_T+\sigma_u^2\mathbf{i}_T\mathbf{i}'_T=\sigma_\varepsilon^2\mathbf{I}_T+T\sigma_u^2\mathbf{B}_T$$

در اینجا از رابطهٔ (۸-۲۲) استفاده شده است که به‌صورت $\mathbf{B}_T=\frac{1}{T}\mathbf{J}_T$ می‌باشد.

طبق رابطه (۱۱-۲۲) از $\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T$ استفاده کرده و $\boldsymbol{\Sigma}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\boldsymbol{\Sigma}=\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{Q}_T+\mathbf{B}_T)+T\sigma_u^2\mathbf{B}_T=\sigma_\varepsilon^2\mathbf{Q}_T+(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2)\mathbf{B}_T \qquad (۲۲-۸۳)$$

از آنجا که $\mathbf{v}_i$ و $\mathbf{v}_j$ مستقل‌اند و $\boldsymbol{\Sigma}$ نیز ماتریس واریانس $\mathbf{v}_i$ می‌باشد، لذا برای تمامی $\mathbf{v}_i$ ها (یعنی برای nT مشاهده)، ماتریس واریانس عبارت است از:

$$\boldsymbol{\Omega}=\operatorname{var}(\mathbf{V})=E(\mathbf{V}\mathbf{V}')=\begin{bmatrix}\operatorname{var}(\mathbf{v}_1) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \operatorname{var}(\mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \operatorname{var}(\mathbf{v}_n)\end{bmatrix}_{nT\times nT}$$

$$=\begin{bmatrix}\Sigma & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Sigma & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n\otimes\Sigma \qquad (۲۲-۸۴)$$

که Σ و Ω به‌ترتیب $T\times T$ و $nT\times nT$ هستند.

تخمین‌زنندهٔ GLS

با توجه به اینکه ماتریس واریانس برای مدل (۸۰-۲۲) برابر با Ω است، لذا تخمین‌زنندهٔ GLS برای $\hat{\beta}$ عبارت است از[1]:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y} \qquad (۲۲-۸۵)$$

همان‌طور که در فصل ششم و نهم دیدیم، روش GLS داده‌ها را تبدیل کرده و به آنها وزن می‌دهد. در اینجا نیز با توجه به $\Omega^{-1}=\Omega^{-\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}$، خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=(\mathbf{X}'\Omega^{-\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\Omega^{-\frac{1}{2}}\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}=(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^*) \qquad (۲۲-۸۶)$$

که $\mathbf{X}^*=\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}$ و $\mathbf{y}^*=\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}$ می‌باشد. توجه شود که $\mathbf{X}'\Omega^{-\frac{1}{2}}=(\Omega^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X})'$ است، زیرا Ω متقارن است.

Ω^{-1} برابر است با:

$$\Omega^{-1}=\begin{bmatrix}\Sigma^{-1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Sigma^{-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma^{-1}\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n\otimes\Sigma^{-1} \qquad (۲۲-۸۷)$$

برای محاسبه Σ^{-1} از رابطه (۸۳-۲۲) که به‌صورت $\Sigma=\sigma_\varepsilon^2\mathbf{Q}_T+(\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2)\mathbf{B}_T$ استفاده می‌کنیم. از طرف دیگر طبق خاصیت (۱۶-۲۲) خواهیم داشت:

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}\mathbf{B}_T \qquad (۲۲-۸۸)$$

همچنین براساس رابطه (۱۷-۲۲)، $\Sigma^{-\frac{1}{2}}$ عبارت است از:

۱- به فصل ششم و نهم مراجعه شود.

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}\mathbf{B}_T=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\mathbf{Q}_T+\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}\mathbf{B}_T\right] \qquad (۲۲-۸۹)$$

با توجه به رابطه (۱۱-۲۲) $\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T$ است:

$$\Sigma^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\left[\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T+\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}\mathbf{B}_T\right]=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T-\theta\mathbf{B}_T) \qquad (۲۲-۹۰)$$

$$\theta=1-\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}}$$

در این حالت، داده‌های تبدیل‌شده یعنی $\mathbf{y}_i^*$ و $\mathbf{X}_i^*$ برای گروه iام عبارت است از:

$$\mathbf{y}_i^*=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{y}_i=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T-\theta\mathbf{B}_T)\mathbf{y}_i=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\begin{bmatrix}Y_{i1}-\theta\overline{Y}_{i\circ}\\ Y_{i2}-\theta\overline{Y}_{i\circ}\\ \vdots\\ Y_{iT}-\theta\overline{Y}_{i\circ}\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۹۱)$$

$$\mathbf{X}_i^*=\Sigma^{-\frac{1}{2}}\mathbf{X}_i=\frac{1}{\sigma_\varepsilon}(\mathbf{I}_T-\theta\mathbf{B}_T)\mathbf{X}_i=\begin{bmatrix}X_{i1}-\theta\overline{X}_{i\circ}\\ X_{i2}-\theta\overline{X}_{i\circ}\\ \vdots\\ X_{iT}-\theta\overline{X}_{i\circ}\end{bmatrix} \qquad (۲۲-۹۲)$$

اگر $\theta=1$ باشد، نتایج روش GLS با رگرسیون LSDV یکسان خواهد بود ($\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LSDV}$). وقتی $\theta=1$ است، آنگاه $\sigma_\varepsilon=0$ خواهد بود و در این حالت، فقط اثرات u_i وجود دارد. در این حالت، مدل اثرات ثابت و مدل اثرات تصادفی را نمی‌توان از هم متمایز کرد. اگر $\theta=0$ باشد، بیانگر $\sigma_u^2=0$ است و بدان معنا است که اثرات تصادفی وجود ندارد.

برای بررسی ویژگی‌های تخمین‌زنندهٔ GLS، ابتدا Ω^{-1} را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$\Omega^{-1}=\mathbf{I}_n\otimes\Sigma^{-1}=\mathbf{I}_n\otimes\left[\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\mathbf{Q}_T+\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2}\mathbf{B}_T\right] \qquad (۲۲-۹۳)$$

با توجه به رابطه $\mathbf{Q}_T=\mathbf{I}_T-\mathbf{B}_T$، خواهیم داشت:

$$\Omega^{-1}=\mathbf{I}_n \otimes \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\left[Q_T+(1-\theta)^2\mathbf{B}_T\right]$$

$$=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}[\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{B}] \quad , \quad \lambda=(1-\theta)^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2+T\sigma_u^2} \qquad (۲۲-۹۴)$$

با جایگذاری به‌جای Ω^{-1} خواهیم داشت:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{y})=(\mathbf{X}'(\mathbf{I}_{nT}-\theta\mathbf{B})\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'(\mathbf{I}_{nT}-\theta\mathbf{B})\mathbf{y})$$
$$=[\mathbf{X}'(\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{B})\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'(\mathbf{Q}+\lambda\mathbf{B})\mathbf{y}] \qquad (۲۲-۹۵)$$
$$=[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}]^{-1}[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{y}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{y}]$$

حال $\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{y})+\lambda[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{y})$$
$$=[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{y})$$
$$+\lambda[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{y}) \qquad (۱۲-۹۶)$$
$$=\mathbf{F}\hat{\boldsymbol\beta}_W+(\mathbf{I}-\mathbf{F})\hat{\boldsymbol\beta}_B$$

$$\mathbf{F}=[\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{B}\mathbf{X}]^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{Q}\mathbf{X})=[\mathbf{WSS}_{xx}+\lambda\mathbf{BSS}_{xx}]^{-1}\mathbf{WSS}_{xx}$$

اگر λ تفاوت قابل توجهی با ۱ داشته باشد، تخمین‌زننده‌های OLS ناکارا خواهند بود. در مقایسه با GLS، روش OLS وزن بیشتری به تغییرات بین گروهی می‌دهد.

۱- اگر $\lambda=1$ باشد، در این صورت برآورد $\boldsymbol\beta$ با روش GLS مشابه با روش OLS در رگرسیون تجمیعی است، یعنی $\hat{\boldsymbol\beta}_{GLS}=\hat{\boldsymbol\beta}_{Pooled}$ است که $\hat{\boldsymbol\beta}_{Pooled}$ با $\hat{\boldsymbol\beta}_T$ یکسان است. این وضعیت در صورتی برقرار است که $\sigma_u^2=0$ باشد که در این حالت، مدل رگرسیون کلاسیک قابل کاربرد است.

۲- اگر $\lambda=0$ باشد، در این صورت، این تخمین‌زنندهٔ GLS مشابه با تخمین‌زنندهٔ LSDV است که در حالت اثرات ثابت مورد استفاده قرار می‌گرفت. توجه شود که قبلاً نشان دادیم که تخمین‌زنندهٔ LSDV و تخمین‌زنندهٔ درون‌گروهی یکسان هستند ($\hat{\boldsymbol\beta}_W=\hat{\boldsymbol\beta}_{LSDV}$). بدیهی است که $\lambda=0$ به معنای $\theta=1$ است که آن نیز معادل با $\sigma_\varepsilon^2=0$ می‌باشد. اگر $\sigma_\varepsilon^2=0$ باشد، در این صورت تمام تغییرات در عرض گروهها (تغییرات بین‌گروهی) ناشی از تفاوت در u_iها است و چون آنها را در طول زمان ثابت فرض کرده‌ایم لذا معادل با رگرسیون LSDV است که در مدل اثرات ثابت به‌کار گرفته می‌شود. بدیهی است که این بحث که آیا اینها واقعاً اثرات ثابت هستند یا تصادفی، جای بررسی دارد.

۳- حالت دیگر آن است که $T\to\infty$ میل کند. در این صورت نیز $\theta=1$ می‌باشد. افزایش T می‌تواند u_i «مشاهده‌نشده» را «قابل مشاهده» کند. اگر تعداد مشاهدات گروه iام برابر T باشد، تخمین‌زنندهٔ $[\boldsymbol\alpha,\boldsymbol\beta]$ با افزایش T یا n سازگار خواهد بود. بنابراین، معادله زیر را داریم:

$$Y_{it}-\mathbf{x}_{it}'\boldsymbol\beta-\alpha=u_i+\varepsilon_{it} \qquad (۲۲-۹۷)$$

که در این معادله، u_i «قابل مشاهده» می‌شود. میانگین گروهی عبارت است از:

$$\overline{Y}_{i\circ}-\mathbf{x}_{i\circ}'\boldsymbol\beta-\alpha=u_i+\overline{\varepsilon}_{i\circ} \qquad (۲۲-۹۸)$$

چون $\overline{\varepsilon}_{i\circ}$ به سمت صفر همگرا است لذا u_i برای ما آشکار می‌شود. لذا اگر T به سمت بی‌نهایت میل کند، u_i معادل با α_iD_i می‌شود که قبلاً راجع به آن بحث شد (D_i بردار ۱ برای گروه i و ۰ برای سایر گروه‌ها است).

اگر حجم نمونه‌ها(گروه‌ها)یکسان نباشد، به آن نامتوازن می‌گویند. در این‌صورت مشکل دیگری به مدل اثرات تصادفی اضافه می‌شود. مشکل اول در خصوص Ω است که ابعاد آن متفاوت می‌شود. همچنین ناهمسانی واریانس تشدید می‌شود، زیرا بلوک iام در ماتریس $\Omega^{-\frac{1}{2}}$ به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\Omega_i^{-\frac{1}{2}}=\mathbf{I}_{T_i}-\theta_i\mathbf{B}_{T_i} \quad , \quad \theta_i=1-\frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma_\varepsilon^2+T_i\sigma_u^2}} \qquad (۲-۹۹)$$

برای استفاده از روش GLS، می‌توان با برآورد واریانس روش FGLS[1] را به‌کار برد. بنابراین ابتدا لازم است که واریانس‌ها (یعنی تخمین σ_u^2 و σ_ε^2) را تخمین بزنیم. بدین منظور معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{رگرسیون کل}: Y_{it}=\mathbf{x}_{it}'\boldsymbol\beta+\alpha+\varepsilon_{it}+u_i \qquad (۲۲-۱۰۰)$$

$$\text{رگرسیون بین‌گروهی}: \overline{Y}_{i\circ}=\overline{\mathbf{x}}_{i\circ}'\boldsymbol\beta+\alpha+\overline{\varepsilon}_{i\circ}+u_i \qquad (۲۲-۱۰۱)$$

با محاسبهٔ تفاضل معادلات فوق، رگرسیون درون‌گروهی به‌دست می‌آید که u_i از آن حذف می‌شود و لذا جملهٔ خطای آن فقط شامل ε_{it} می‌باشد:

$$\text{رگرسیون درون‌گروهی}: Y_{it}-\overline{Y}_{i\circ}=(\mathbf{x}_{it}-\overline{\mathbf{x}}_{i\circ})'\boldsymbol\beta+(\varepsilon_{it}-\overline{\varepsilon}_{i\circ}) \qquad (۲۲-۱۰۲)$$

1- feasible GLS

برای تخمین σ_u^2، معادله (۲۲-۱۰۲) را با روش OLS برآورد کرده و باقیمانده‌های آن (e_{it}ها) را محاسبه می‌کنیم. این باقیمانده‌ها مربوط به رگرسیون درون‌گروهی یا همان LSDV است. اگر این باقیمانده‌ها را برای گروه iام در نظر بگیریم شامل e_{i1}، e_{i2}، ... و e_{iT} است که برای آنها رابطه زیر برقرار است:

$$E\left[\sum_{t=1}^{T}(\varepsilon_{it}-\bar{\varepsilon}_{i\circ})^2\right]=(T-1)\sigma_\varepsilon^2 \qquad (۲۲\text{-}۱۰۳)$$

رابطه (۲۲-۱۰۳) بیانگر آن است که بر اساس باقیمانده‌های گروه iام می‌توان یک تخمین‌زنندهٔ نااریب برای σ_ε^2 به‌دست آورد. بنابراین با داشتن β، تخمین‌زنندهٔ نااریب σ_ε^2 براساس T مشاهده در گروه i طبق (۲۲-۱۰۳) عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(i)=\frac{\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i\circ})^2}{T-1} \qquad (۲۲\text{-}۱۰۴)$$

از آنجا که برای محاسبهٔ e_{it}ها بایستی β را تخمین بزنیم لذا بایستی درجه آزادی را تعدیل کرده که با استفاده از باقیمانده‌های LSDV خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2(i)=\frac{\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i\circ})^2}{T-K-1} \qquad (۲۲\text{-}۱۰۵)$$

درجه آزادی تصحیح شدهٔ $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ بیش از حد، کاهش یافته است، زیرا مشابه آن است که فرض کرده‌ایم α و β برای هر i مجدداً تخمین زده می‌شوند. در حالی که ضرایب تخمینی فقط شامل n ضریب α و K ضریب β می‌باشد. لذا تخمین‌زنندهٔ نااریب عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2=\hat{\sigma}_{LSDV}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}(e_{it}-\bar{e}_{i\circ})^2}{nT-n-K} \qquad (۲۲\text{-}۱۰۶)$$

حال بایستی σ_u^2 را برآورد کنیم. بدین منظور به معادله (۲۲-۱۰۰) برمی‌گردیم که علی‌رغم همبستگی مشاهدات، یک مدل رگرسیون کلاسیک است که در آن تخمین‌زنندهٔ OLS برای شیب‌ها و واریانس، سازگار می‌باشد. لذا با استفاده از باقیمانده‌های رگرسیون (۲۲-۱۰۰)، واریانس آن که تخمین $\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ می‌باشد به‌دست می‌آید. اگر جملهٔ خطای این معادله را با $v_{it}=\varepsilon_{it}+u_i$

نشان دهیم در این صورت با استفاده از v_{it}ها می‌توان تخمین σ_v^2 (که برابر با $\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ است) را به‌دست آورد. توجه شود که این معادله به‌صورت یک مدل تجمیعی در نظر گرفته می‌شود و با برآورد آن، واریانس v_{it} را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{plim}\,\hat{\sigma}_{Pooled}^2=\text{plim}\frac{\hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{v}}}{nT-K-1}=\sigma_v^2=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2 \qquad (۲۲\text{-}۱۰۷)$$

$\hat{\mathbf{v}}'\hat{\mathbf{v}}=\sum_i\sum_t\hat{v}_{it}^2$ است. بنابراین، $\hat{\sigma}_u^2$ برابر است با:

$$\hat{\sigma}_u^2=\hat{\sigma}_{Pooled}^2-\hat{\sigma}_{LSDV}^2 \qquad (۲۲\text{-}۱۰۸)$$

اما مشکل وقتی به‌وجود می‌آید که $\hat{\sigma}_u^2$ منفی شود. از طرف دیگر می‌دانیم که روش GLS نیازی به تخمین‌زنندهٔ نااریب واریانس ندارد، بلکه فقط بایستی سازگار باشد. یک راه آن است که درجه آزادی (۲۲-۱۰۶) و (۲۲-۱۰۷) را تغییر دهیم. اگر چنین کنیم، در آن صورت هر دو تخمین‌زنندهٔ واریانس ($\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ و $\hat{\sigma}_u^2$) غیر منفی خواهند شد، زیرا مجموع مجذورات در مدل LSDV (مدل غیرمقید) نمی‌تواند بزرگتر از مجموع مجذورات در رگرسیون تجمیعی (مدل مقید) باشد. تخمین‌زننده‌های دیگری نیز پیشنهاد شده است بر مبنای این اصل قرار داد که از دو مجموع مجذورات باقیمانده‌ها استفاده شود.

اگر برخی از متغیرهای توضیحی (X_{it}ها) وجود داشته باشند که در داخل گروه‌ها تغییر نکنند، در این صورت تخمین‌زنندهٔ LSDV را نمی‌توان حساب نمود. در این حالت، معمولاً یکی از متغیرهای توضیحی بیانگر یک متغیر مجازی است. چنین متغیرهایی همخطی کامل با متغیرهای مجازی خواهند داشت که اثرات ثابت را منعکس می‌کنند. این موضوع مانع از محاسبه تخمین‌زنندهٔ LSDV می‌گردد. در این حالت، هنوز امکان تخمین اجزاء واریانس اثرات تصادفی وجود دارد. تصور کنید که $[\hat{\beta},\hat{\alpha}]$ تخمین‌زننده‌های سازگار $[\beta,\alpha]$ باشند، از قبیل تخمین‌زنندهٔ OLS. در این صورت (۲۲-۱۰۷) تخمین‌زنندهٔ سازگار برای $m_{ee}=\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2$ است. میانگین مجذور باقیمانده که با استفاده از رگرسیون میانگین‌های گروهی ($\bar{Y}_{i\circ}$) به‌دست می‌آید، می‌تواند به‌عنوان تخمین‌زننده سازگار برای $m_{**}=\sigma_u^2+\frac{\sigma_\varepsilon^2}{T}$ به‌کار رود. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{T}{T-1}(m_{ee} - m_{**}) \quad (22\text{-}109)$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{T}{T-1}m_{**} - \frac{1}{T-1}m_{ee} = wm_{**} + (1-w)m_{ee} \quad (22\text{-}110)$$

$w > 1$ است. مانند قبل، این تخمین‌زننده ممکن است موجب تخمین منفی از σ_u^2 شود که تصریح این مدل را زیر سؤال می‌برد.

۲۲-۱۰ آزمون اثرات تصادفی

بروش و پاگان (۱۹۸۰) آزمون ضریب لاگرانژ (LM) را برای مدل اثرات تصادفی براساس باقیمانده‌های OLS توصیه می‌کنند. فرضیه اثرات تصادفی را به‌صورت زیر طرح می‌کنیم:

$$H_0 : \sigma_u^2 = 0 \quad (22\text{-}111)$$

$$H_1 : \sigma_u^2 \neq 0$$

فرضیهٔ H_0 بیانگر عدم وجود اثرات تصادفی است، لذا H_0 به‌معنی نامناسب بودن مدل تجمیعی و مناسب بودن مدل اثرات تصادفی است. بنابراین، رد H_0 به‌معنی وجود اثرات تصادفی است.

برای آزمون فرضیه فوق، LM به‌صورت زیر تعریف می‌شود[1] که برای محاسبه آن از باقیمانده‌های مدل تجمیعی استفاده می‌شود:

$$LM = \frac{nT}{2(T-1)}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(\sum_{t=1}^{T}e_{it})^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}e_{it}^2} - 1\right]^2$$

$$= \frac{nT}{2(T-1)}\left[\frac{T^2\sum_{i=1}^{n}\bar{e}_{i\circ}^2}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}e_{it}} - 1\right]^2 = \frac{nT}{2(T-1)}\left[\frac{T^2\bar{e}_{i\circ}'\bar{e}_{i\circ}}{e'e} - 1\right]^2 \quad (22\text{-}112)$$

تحت فرضیهٔ H_0، LM توزیع کای‌دو با درجه آزادی ۱ دارد. بزرگ بودن LM بدان معنا است که $T^2\sum_i \bar{e}_{i\circ}^2 > \sum_i\sum_t e_{it}^2$ می‌باشد.

۱- فصل نهم را ببینید.

برای آزمون فوق، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱- ابتدا معادله موردنظر (مدل تجمیعی) را با روش OLS برآورد می‌کنیم.

۲- باقیمانده‌ها (e_{it}ها) را حساب می‌کنیم.

۳- مجموع مجذور باقیمانده‌ها $(\sum_i\sum_t e_{it}^2 = e'e)$ را حساب می‌کنیم.

۴- برای هر گروه، میانگین باقیمانده‌ها را حساب می‌کنیم. به‌عنوان مثال برای گروه i عبارت است از:

$$\bar{e}_{i\circ} = \frac{\sum_{t=1}^{T}e_{it}}{T} \quad (22\text{-}113)$$

۵- میانگین باقیمانده‌های هر گروه را به توان ۲ رسانده و جمع می‌زنیم:

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{e}_{i\circ}^2 = \bar{e}_\circ'\bar{e}_\circ \quad (22\text{-}114)$$

$$\bar{e}' = [\bar{e}_{1\circ}, \bar{e}_{2\circ}, \cdots, \bar{e}_{n\circ}]$$

۶- براساس نتایج مرحله ۳ و ۵ مقدار LM را حساب کرده و با عدد بحرانی $\chi^2_{0.05,1} = 3/84$ مقایسه می‌کنیم. اگر $LM \geq 3/84$ باشد، در این صورت فرضیه H_0 رد می‌شود و نتیجه می‌گیریم که مدل رگرسیون ساده که شامل یک جمله ثابت است (مدل تجمیعی) نامناسب بوده و بایستی از مدل اثرات تصادفی استفاده نمود. اما باید این قضاوت را محتاطانه اظهار کنیم، زیرا در مقابل مدل اثرات تصادفی، رقیب دیگری به نام مدل اثرات ثابت وجود دارد که این آزمون نمی‌تواند آنها را از هم متمایز کند.

اگر تخمین‌زننده‌های واریانس را داشته باشیم روش GLS را می‌توان برای تخمین ضرایب مدل به‌کار برد. بدین منظور نیاز به اجزای واریانس داریم. تخمین‌زنندهٔ نااریب σ_ε^2 عبارت از تخمین‌زننده واریانس جمله خطا در رگرسیون درون‌گروهی (LSDV) است:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_i\sum_t e_{it}^2}{nT - K - n} \quad (22\text{-}115)$$

توجه شود که K شامل ضرایب متغیرهای توضیحی است که شامل جمله ثابت نمی‌باشد.

با استفاده از باقیمانده‌های OLS در رگرسیون تجمیعی، خواهیم داشت:

$$\hat{\sigma}_v^2=\widehat{\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2}=\frac{\sum_i\sum_t e_{it}^2}{nT-K} \qquad (22-116)$$

K شامل تمام ضرایب (ضرایب متغیرهای توضیحی و جملهٔ ثابت) است. بدین ترتیب $\hat{\sigma}_u^2$ عبارت است از:

$$\hat{\sigma}_u^2=(\widehat{\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2})-\sigma_\varepsilon^2 \qquad (22-117)$$

برای استفاده از GLS، $\hat{\theta}$ برابر است با:

$$\hat{\theta}=1-\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2+T\,\hat{\sigma}_u^2}} \qquad (22-118)$$

به‌عنوان مثال اگر $\sigma_\varepsilon^2=0/003$، $\widehat{\sigma_\varepsilon^2+\sigma_u^2}=0/015$ باشد، در نتیجه $\hat{\sigma}_u^2=0/012$ خواهد شد. این بدان معنا است که تغییرات درون‌گروهی ($\hat{\sigma}_u^2$) حدود ۸۰درصد تغییرات جمله خطا را توضیح می‌دهد، در حالی که بقیه آن، یعنی ۲۰درصد ناشی از تغییرات بین‌گروهی است.

۲۲-۱۱ آزمون هاسمن برای مدل اثرات تصادفی

یکی از فروض مهم مدل داده‌های ترکیبی مربوط به همبستگی اثرات فردی با متغیرهای توضیحی است. در مدل اثرات ثابت، همبستگی وجود دارد ولی در مدل اثرات تصادفی، همبستگی وجود ندارد. از طرف دیگر در مدل اثرات ثابت، تخمین $\hat{\beta}$ را براساس رگرسیون درون‌گروهی و یا LSDV به‌دست می‌آوریم که در واقع به‌صورت انحراف از میانگین گروه‌ها بوده و اثرات فردی (چه ثابت که با α_i نشان داده می‌شود و چه تصادفی که با u_i نشان داده می‌شود) حذف می‌گردد و لذا $\hat{\beta}_W$ یا $\hat{\beta}_{LSDV}$ نااریب و سازگار است.

براساس ایدهٔ فوق، آزمون هاسمن (۱۹۷۸) ارائه شده است. شرط کارایی و سازگاری $\hat{\beta}_{GLS}$ در مدل $Y_{it}=X_{it}\beta+\alpha_i+\varepsilon_{it}$ این است که $E(u_iX_{it})=0$ برای هر t باشد (یا $E(X'u)=0$). اگر X_{it} درون‌زا باشد و موجب $E(u_iX_{it})\neq 0$ شود، آنگاه GLS ناسازگار خواهد بود.

$$\hat{\beta}_{GLS}=(X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}y)=\beta+(X'\Omega^{-1}X)^{-1}(X'\Omega^{-1}v) \qquad (22-119)$$

که $y=X\beta+v$ و $v=u+\varepsilon$ است. حال به‌جای $\Omega^{-1}=\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}(Q+\lambda B)$ قرار می‌دهیم (در اینجا $\lambda=(1-\theta)^2$ است):

$$\hat{\beta}_{GLS}=\beta+[X'(Q+\lambda B)X]^{-1}[X'(Q+\lambda B)v] \qquad (22-120)$$

عبارت داخل کروشهٔ دوم برابر است با:

$$[X'(Q+\lambda B)(u+\varepsilon)]=X'Qu+\lambda X'Bu+X'(Q+\lambda B)\varepsilon \qquad (22-121)$$

با توجه به $Q=I-B$ و $Bu=u$ (زیرا B «میانگین‌ساز گروهی» است و u_i برای گروه iام یکسان است) خواهیم داشت:

$$X'(I-B)u+\lambda X'u+X'(Q+\lambda B)\varepsilon=\lambda X'u+X'(Q+\lambda B)\varepsilon \qquad (22-122)$$

بنابراین، چون ε و X مستقل‌اند، لذا امید ریاضی جمله آخر برابر صفر است ولی $E(X'u)\neq 0$ می‌باشد و لذا $\hat{\beta}_{GLS}$ سازگار نمی‌باشد.

$$\text{plim}\,\hat{\beta}_{GLS}=\beta+[X'(Q+\lambda B)X]^{-1}\text{plim}(X'u)\neq\beta \qquad (22-123)$$

از طرف دیگر، اگر X و u مستقل باشند (یعنی X_{it} برون‌زا باشند) آنگاه $\text{plim}(X'u)=0$ است و $\hat{\beta}_{GLS}$ سازگار خواهد بود.

اگر u_i با X_{it} همبستگی داشته باشد نمی‌توان از روش GLS استفاده کرد، زیرا در این صورت ناسازگار خواهد بود. در این حالت از تخمین‌زننده‌های درون گروهی یا LSDV استفاده می‌شود که سازگار هستند. بنابراین، دو نتیجه مهم زیر را داریم:

۱- اگر همهٔ متغیرهای توضیحی برون‌زا باشند، در این صورت استفاده از GLS بهتر است، زیرا سازگار و کارا است.

۲- وقتی همهٔ متغیرهای توضیحی درون‌زا باشند، تخمین‌های درون گروهی بهتر هستند، زیرا سازگارند.

بنابراین، آزمون هاسمن (۱۹۷۸) به‌صورت فرضیه $H_0:E(u_iX_{it})=0$ مطرح می‌شود که بیانگر آن است که اثرات تصادفی برقرار است و در غیر این صورت با اثرات ثابت مواجهایم. طبق مباحث فوق، تحت فرضیه‌های H_0 و H_1 شرایط زیر را داریم:

	$\hat{\beta}_{GLS}$	$\hat{\beta}_{LSDV}$
$H_0: E(u_i, X_i)=0$ $\lambda=0$	سازگار کارا	سازگار کارا
$H_1: E(u_i, X_i)\neq 0$ $\lambda\neq 0$	ناسازگار	سازگار

همان‌طور که دیدیم، روش GLS از وزن‌های کارای θ استفاده می‌کند، در حالی که روش LSDV از $\theta=1$ استفاده می‌کند. بنابراین، تحت فرضیه H_0 (عدم همبستگی) این دو تخمین نباید تفاوت نظام‌مندی داشته باشند. یک راه برای انجام این آزمون، استفاده از ماتریس کوواریانس بردار تفاضل $\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV}$ است که این تفاضل را با $\mathbf{q}$ نشان می‌دهیم. اگر اثرات تصادفی برقرار باشد، آنگاه $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ است، زیرا در مدل اثرات تصادفی $\hat{\beta}_{LSDV}$ و $\hat{\beta}_{GLS}$ هر دو سازگارند و نباید تفاوت معناداری داشته باشند. واریانس تفاضل $\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV}$ عبارت است از:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV})=\operatorname{var}(\hat{\beta}_{GLS})+\operatorname{var}(\hat{\beta}_{LSDV})-2\operatorname{cov}(\hat{\beta}_{GLS},\hat{\beta}_{LSDV}) \qquad (22\text{-}124)$$

نتیجه اساسی آزمون هاسمن آن است که کوواریانس تخمین‌زنندهٔ کارا با تفاضل آن از تخمین‌زنندهٔ ناکارا صفر است، یعنی:

$$\operatorname{cov}\left[\underbrace{(\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV})}_{\hat{q}},\hat{\beta}_{LSDV}\right]=E\left[(\hat{q}-q)(\hat{\beta}_{LSDV}-\beta)\right] \qquad (22\text{-}125)$$
$$=E\left\{\left[(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)+(\hat{\beta}_{LSDV}-\beta)\right]\left[\hat{\beta}_{LSDV}-\beta\right]\right\}$$
$$=E\left[(\hat{\beta}_{GLS}-\beta)(\hat{\beta}_{LSDV}-\beta)\right]-\operatorname{var}(\hat{\beta}_{LSDV})$$
$$=\operatorname{cov}(\hat{\beta}_{GLS},\hat{\beta}_{LSDV})-\operatorname{var}(\hat{\beta}_{LSDV})=\mathbf{0}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\operatorname{cov}(\hat{\beta}_{GLS},\hat{\beta}_{LSDV})=\operatorname{var}(\hat{\beta}_{LSDV}) \qquad (22\text{-}126)$$

با استفاده از نتایج فوق، واریانس $\hat{\mathbf{q}}$ برابر است با:

$$\operatorname{var}(\hat{q})=\operatorname{var}(\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV})=\operatorname{var}(\hat{\beta}_{GLS})-\operatorname{var}(\hat{\beta}_{LSDV})=\Phi \qquad (22\text{-}127)$$

آزمون کای‌دو براساس آماره والد[1] عبارت است از:

[1] ۱- فصل نهم، بخش ۱۶-۹ و فصل دهم، بخش ۱۰-۱۰ را ببینید.

$$W=\hat{q}'\hat{\Phi}^{-1}\hat{q}=(\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV})'\hat{\Phi}^{-1}(\hat{\beta}_{GLS}-\hat{\beta}_{LSDV}) \qquad (22\text{-}128)$$

برای محاسبه $\hat{\Phi}$ از ماتریس کوواریانس تخمین‌زننده‌های شیب (ضرایب Xها) در مدل LSDV و ماتریس کوواریانس در مدل اثرات تصادفی (به استثنای عرض از مبدأ) استفاده می‌کنیم. تحت فرضیه صفر، W توزیع کای‌دو با درجه آزادی $K-1$ خواهد داشت ($K-1$ برابر با ضرایب Xها است). تحت فرضیه H_0، چون تخمین‌زنندهٔ GLS کاراتر از تخمین‌زنندهٔ درون‌گروهی (یا همان LSDV) است، لذا $\operatorname{var}(\beta_W)-\operatorname{var}(\hat{\beta}_{GLS})\geq \mathbf{0}$ می‌باشد.

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_{GLS})=\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{X}'\Omega^{-1}\mathbf{X})^{-1}=\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{X}'\mathbf{QX}+\lambda\mathbf{X}'\mathbf{BX})^{-1} \qquad (22\text{-}129)$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_W)=\sigma_\varepsilon^2(\mathbf{X}'\mathbf{QX})^{-1} \qquad (22\text{-}130)$$

اگر مقدار W کوچک باشد ($W\leq\chi^2_{1.05,K-1}$) در این صورت فرضیه H_0 رد نمی‌شود. یعنی این فرضیه که اثرات فردی با متغیرهای توضیحی همبستگی ندارد، رد نمی‌شود. بنابراین، چون اثرات فردی با متغیرهای توضیحی، همبستگی ندارد نتیجه می‌گیریم که اثرات فردی را بایستی به‌صورت اثرات تصادفی در نظر بگیریم و نه به‌صورت اثرات ثابت.

۱۲-۱۳ مدل اثرات دو طرفه

مباحثی که تاکنون مطرح گردید معروف به اثرات یک طرفه است. بدین معنی که فرض بر این بود که فقط تفاوت‌های فردی وجود دارد و این تفاوت‌ها در طول زمان، تغییر نمی‌کنند. اما ممکن است علاوه بر اثرات فردی یا گروهی، اثرات زمانی نیز وجود داشته باشد. بدین منظور مدل زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_{it}=\alpha+\beta X_{it}+\alpha_i+\lambda_t+\varepsilon_{it} \qquad (22\text{-}131)$$

α_i «اثرات ثابت گروهی» را نشان می‌دهد که در طول زمان برای هر گروه، ثابت است. λ_t نیز «اثرات ثابت زمانی» را نشان می‌دهد که در طول زمان تغییر می‌کند ولی برای همهٔ گروهها یکسان است. بنابراین، همان‌طور که α_i تفاوت‌های فردی را نشان می‌دهد، λ_t نیز تفاوت‌های زمانی را نشان می‌دهد. لذا λ_t بیانگر آن است که آیا در طول زمان، عواملی وجود دارند که به‌طور متوسط موجب تغییر خصوصیات فردی شده باشند.

دو نوع میانگین را می‌توان محاسبه نمود که عبارتند از:

۱- «میانگین گروهی» که فقط اثرات ثابت فردی را نشان می‌دهد:

$$\bar{Y}_{i\circ}=\beta\bar{X}_{i\circ}+\alpha_i+\bar{u}_{i\circ} \quad ; \quad \sum_{t=1}^{T}\lambda_t=0 \qquad (۲۲-۱۳۲)$$

۲- «میانگین زمانی» که فقط اثرات ثابت زمانی را نشان می‌دهد:

$$\bar{Y}_{\circ t}=\beta\bar{X}_{\circ t}+\lambda_t+\bar{u}_{\circ t} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=0 \qquad (۲۲-۱۳۳)$$

میانگین‌ها عبارتند از:

$$\bar{Y}_{i\circ}=\frac{\sum_t Y_{it}}{T}\ ,\ \bar{X}_{i\circ}=\frac{\sum_t X_{it}}{T} \qquad (۲۲-۱۳۴)$$

$$\bar{Y}_{\circ t}=\frac{\sum_i Y_{it}}{n}\ ,\ \bar{X}_{\circ t}=\frac{\sum_i X_{it}}{n} \qquad (۲۲-۱۳۵)$$

برای بررسی وجود اثرات فردی و زمانی بایستی از آزمون فرضیه استفاده کنیم. بدین منظور می‌توان آزمون‌های زیر را انجام داد:

۱- آزمون مدل اثرات ثابت فردی و زمانی در مقابل مدل تجمیعی

اولین آزمون را برای مقایسه مدل تجمیعی با مدل اثرات ثابت انجام می‌دهیم. فرضیه‌ها عبارتند از:

$H_\circ : \alpha_i = \lambda_t = 0$ (مدل تجمیعی) عدم وجود اثرات ثابت فردی و زمانی

$H_1 : \alpha_i, \lambda_t \neq 0$ وجود اثرات ثابت فردی و زمانی

در واقع فرضیه $H_\circ$ و H_1 را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$H_\circ : Y_{it}=\beta X_{it}+\alpha+\varepsilon_{it}$ مدل مقید (تجمیعی)

$H_1 : Y_{it}=\beta X_{it}+\alpha_i+\lambda_t+\varepsilon_{it}$ مدل غیرمقید

معادله اول که مدل تجمیعی است با روش OLS برآورد می‌شود. اما معادله دوم که مدل اثرات ثابت است با روش LSDV برآورد می‌شود که بایستی K ضریب برای X، n ضریب برای α_iها و

T ضریب برای λ_tها برآورد شود. برای هر یک از این معادلات RSS را حساب کرده و F را تشکیل می‌دهیم:

RSS_R : مدل مقید (تجمیعی) ، درجه آزادی $= nT-K$

RSS_{UR} : مدل غیرمقید (LSDV) ، درجه آزادی $= nT-n-T-K$

$$F=\frac{nT-n-T-K}{n+T}\,\frac{RSS_{UR}-RSS_R}{RSS_{UR}} \qquad (۲۲-۱۳۶)$$

اگر مقدار F محاسباتی از F جدول بزرگ‌تر باشد، آنگاه فرضیه $H_\circ$ رد می‌شود و بدان معنا است که اثرات ثابت فردی و زمانی وجود دارد.

۲- آزمون وجود اثرات ثابت فردی

در این آزمون، فقط وجود اثرات فردی را بررسی می‌کنیم:

$H_\circ : \alpha_i = 0\ ,\ \lambda_t \neq 0$ عدم وجود اثرات ثابت فردی

$H_1 : \alpha_i \neq 0\ ,\ \lambda_t \neq 0$ وجود اثرات ثابت فردی

فرضیه $H_\circ$ بیانگر عدم وجود اثرات ثابت و H_1 وجود اثرات ثابت فردی را نشان می‌دهد. در واقع فرضیه‌های $H_\circ$ و H_1 عبارتند از:

$H_\circ : Y_{it}=\beta X_{it}+\alpha+\lambda_t+\varepsilon_{it}$ مدل مقید

$H_1 : Y_{it}=\beta X_{it}+\alpha_i+\lambda_t+\varepsilon_{it}$ مدل غیرمقید

برای برآورد مدل مقید فقط نیاز به متغیرهای مجازی زمانی داریم. لذا درجه آزادی RSS_R برابر با $nT-T-K$ می‌باشد، در حالی که درجه آزادی مدل غیرمقید برابر با $nT-n-T-K$ است. برای مدل مقید می‌توان معادله انحراف از میانگین زمانی را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_{it}-\bar{Y}_{it}=\beta(X_{it}-\bar{X}_{\circ t})+(\varepsilon_{it}-\bar{\varepsilon}_{\circ t})$$

به‌منظور آزمون فرضیه $H_\circ$ مجدداً از آماده F استفاده می‌کنیم:

$$F=\frac{RSS_R-RSS_{UR}}{RSS_{UR}}\,\frac{nT-n-T-K}{n} \qquad (۲۲-۱۳۷)$$

اگر F محاسباتی از F جدول بیشتر باشد فرضیه $H_\circ$ رد می‌شود و لذا اثرات ثابت فردی وجود دارد.

۳- آزمون وجود اثرات ثابت زمانی

در این حالت، فرضیه‌ها عبارتند از:

$H_{\circ}: \lambda_t = \circ \quad , \quad \alpha_i \neq \circ$ عدم وجود اثرات ثابت زمانی

$H_{1}: \lambda_t \neq \circ \quad , \quad \alpha_i \neq \circ$ وجود اثرات ثابت زمانی

مشابه آزمون‌های قبلی، فرضیه $H_{\circ}$ و H_{1} را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$H_{\circ}: Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha_i + \varepsilon_{it}$ مدل مقید

$H_{1}: Y_{it} = \beta X_{it} + \alpha_i + \lambda_t + \varepsilon_{it}$ مدل غیرمقید

اولی بیانگر مدل مقید، و دومی بیانگر مدل غیرمقید است که مجموع مجذور خطاهای آنها به‌ترتیب با RSS_R و RSS_{UR} با درجه آزادی $nT-n-K$ و $nT-n-T-K$ می‌باشد.

برای مدل مقید می‌توان انحراف از میانگین گروهی را به‌صورت زیر نوشت:

$$Y_{it} - \overline{Y}_{it} = \beta(X_{it} - \overline{X}_{i\circ}) + (\varepsilon_{it} - \overline{\varepsilon}_{i\circ}) \qquad (۲۲-۱۳۸)$$

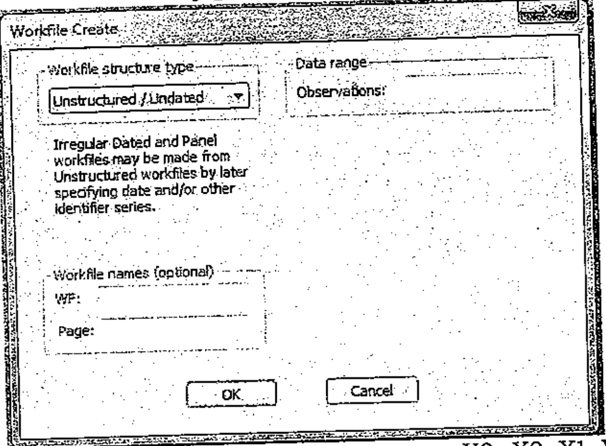
تخمین مدل داده‌های ترکیبی در Eviews فایل data7

به‌منظور ایجاد یک فایل کاری برای داده‌های ترکیبی، ابتدا تعداد سالها و گروه‌ها را مشخص می‌کنیم. در اینجا از یکی از مثال‌های Eviwes7 استفاده می‌کنیم که در مورد مصرف بنزین می‌باشد. متغیرها شامل: Y لگاریتم مصرف سرانه بنزین، X_1، X_2 و X_3 به‌ترتیب لگاریتم قیمت حقیقی بنزین، لگاریتم درآمد سرانه و لگاریتم تعداد اتومبیل سرانه می‌باشد. داده‌ها شامل دوره ۷۸-۱۹۶۰ و ۱۸ کشور اتریش، بلژیک، کانادا، دانمارک، فرانسه، آلمان، یونان، ایرلند، ایتالیا، ژاپن، هلند، نروژ، اسپانیا، سوئد، سوئیس، ترکیه، انگلستان و آمریکا است. بنابراین، تعداد مشاهدات برابر با ۳۴۲=۱۸×۱۹ می‌باشد. به‌منظور وارد کردن داده‌ها، ابتدا آنها را به‌صورت جدول زیر تنظیم می‌کنیم:

جدول مشاهدات

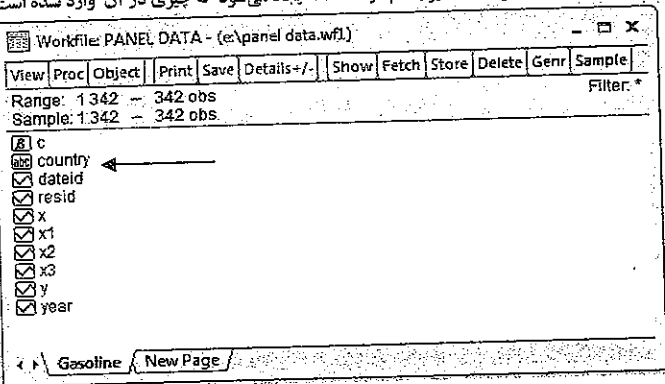
سال	کشور	شماره مشاهده	Y	X1	X2	X3
۱۹۶۰	اتریش	۱				
۱۹۶۱	اتریش	۲				
⋮	⋮	⋮				
۱۹۷۸	اتریش	۱۹				
۱۹۶۰	بلژیک	۲۰				
۱۹۶۱	بلژیک	۲۱				
⋮	⋮	⋮				
۱۹۷۸	بلژیک	۳۸				
⋮	⋮	⋮				
۱۹۶۰	آمریکا	۳۲۴				
۱۹۶۱	آمریکا	۳۲۵				
⋮	⋮	⋮				
۱۹۷۸	آمریکا	۳۴۲				

حال پنجره Workfile Create را از طریق file→new→workfile باز کرده و در قسمت Workfile Structure گزینه Unstructured/Undated را انتخاب می‌کنیم. سپس در قسمت Observation تعداد مشاهدات، یعنی ۳۴۲، را وارد می‌کنیم. با انتخاب OK فایل کاری ایجاد می‌شود.



حال داده‌های Y، X1، X2 و X3 را با دستور data و یا از برنامه‌های دیگری مانند Excel، وارد می‌کنیم.

دو سری دیگر نیز باید ایجاد کنیم: یکی برای سال و یکی برای کشورها. برای سال از دستور data year استفاده کرده و سالها را دقیقاً مشابه با ستون اول (ستون سال) از جدول مشاهدات، وارد می‌کنیم. اما برای کشور از دستور alpha country استفاده می‌کنیم. با اجرای این دستور یک متغیر به نام country ایجاد می‌شود که چیزی در آن وارد نشده است.



با دو بار کلیک روی متغیر country آن را باز کرده و در اولین ستون مقابل ردیف ۱ کلیک چپ کرده و گزینه Edite را انتخاب می‌کنیم. حال نام کشورها را دقیقاً مشابه با ستون کشور در جدول مشاهدات، وارد می‌کنیم (چون معمولاً ابتدا داده‌ها در نرم‌افزارهای دیگری مانند excel تنظیم می‌شوند، می‌توان نام کشورها را کپی نمود).

تا اینجا تمامی داده‌ها و اطلاعات مورد نیاز را وارد نرم‌افزار Eviews کرده‌ایم. در مرحله آخر بایستی داده‌های خام را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که Eviews آنها را به‌صورت داده‌های ترکیبی بشناسد. بدین منظور در پنجره Workfile از طریق Proc→Structure/Resize Current Page پنجره‌ای به نام Workfile Structure را باز می‌کنیم.

Workfile Structure

Workfile structure type: Unstructured / Undated

Data range: Observations: 342

OK Cancel

در قسمت workfile structure type با انتخاب گزینه Dated Panel پنجره زیر باز می‌شود.

Workfile Structure

Workfile structure type: Dated Panel

Panel identifier series
Cross section ID series: country
Date series: year

Observation inclusion/creation
Frequency: Auto detect
Start date: @first
End date: @last

☑ Balance between starts & ends
☐ Balance starts
☐ Balance ends
☐ Insert obs to remove date gaps so date follows regular frequency

OK Cancel

در این پنجره، در مقابل cross section ID series عبارت country و در مقابل date series عبارت year را می‌نویسیم. همچنین در سمت راست، در مقابل Frequency گزینه Annual را انتخاب می‌کنیم. سایر موارد توسط Eviews انتخاب شده‌است. با انتخاب OK، در قسمت Range و Sample هم سال و هم تعداد کشورها نشان داده می‌شود.

Workfile: PANEL DATA - (e:\panel data.wf1)

View | Proc | Object | Print | Save | Details+/- | Show | Fetch | Store | Delete | Genr | Sample

Range: 1960 1978 x 18 — 342 obs
Sample: 1960 1978 — 342 obs
Filter: *

c
country
dateid
dateid01
resid
x1
x2
x3
y
year

Gasoline / New Page

برای تخمین مدل‌های مبتنی بر داده‌های ترکیبی، ابتدا می‌توان از تخمین تجمیعی استفاده نمود که ضرایب را برای همه کشورها و سالها به‌صورت یکسان برآورد می‌کند. بدین منظور از مسیر Quick → Estimate Equation پنجره زیر را باز می‌کنیم:

Equation Estimation

Specification | Panel Options | Options

Equation specification
Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

y c x1 x2 x3

Estimation settings
Method: LS - Least Squares (LS and AR)
Sample: 1960 1978

OK Cancel

در پنجره فوق، معادله مورد نظر را وارد کرده و با انتخاب OK نتایج را به‌دست می‌آوریم:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/16/12 Time: 10:07
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.391326	0.116934	20.45017	0.0000
X1	-0.891798	0.030315	-29.41796	0.0000
X2	0.889962	0.035806	24.85523	0.0000
X3	-0.763373	0.018608	-41.02325	0.0000

R-squared	0.854935	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.853648	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.209990	Akaike info criterion	-0.271888
Sum squared resid	14.90436	Schwarz criterion	-0.227037
Log likelihood	50.49289	Hannan-Quinn criter.	-0.254021
F-statistic	663.9993	Durbin-Watson stat	0.137461
Prob(F-statistic)	0.000000		

نتایج حاصله نشان می‌دهد که قیمت بنزین، تأثیر منفی، درآمد تأثیر مثبت بر مصرف بنزین داشته‌اند.

حال می‌توانیم هر یک از روش‌های تخمین را برای داده‌های ترکیبی به‌کار ببریم. بدین منظور در پنجره فوق (پنجره Equation) از طریق منوی Estimate مجدداً پنجره Equation Estimation را باز کرده که با انتخاب Panel Options پنجره زیر باز می‌شود.

Equation Estimation

Specification | Panel Options | Options

Effects specification
Cross-section: None
Period: None

Weights
GLS Weights: No weights

Coef covariance method
Ordinary
No d.f. correction

OK | Cancel

در قسمت Effect specification می‌توان مدل اثرات ثابت و تصادفی را هم برای مقاطع(گروه‌ها) و هم برای سال انتخاب نمود. در این قسمت دو گزینه Cross – section و Period وجود دارد که در مقابل هر یک از آنها می‌توان یکی از سه گزینه None ، Fixed و Random را انتخاب کرد که None بیانگر مدل OLS تجمیعی است که نتایج آن را بررسی کردیم.

در قسمت Weights می‌توان وزن‌های مورد نظر را برای روش GLS ، انتخاب نمود. توجه شود که روش GLS در زمانی به‌کار می‌رود که واریانس ناهمسانی وجود داشته باشد. به‌عنوان مثال اگر گزینه Cross – section weights را انتخاب کنیم، Eviews از روش GLS با این فرض استفاده می‌کند که واریانس ناهمسانی متعلق به مقاطع است. اگر Cross – section SUR را انتخاب کنیم، Eviews از روش GLS استفاده می‌کند که ناهمسانی واریانس را با توجه به همبستگی بین جملات خطای معادلات در بین مقطع‌ها، تخمین می‌زند. همچنین با انتخاب Period weights امکان ناهمسانی واریانس را در طول زمان، در نظر می‌گیرد. گزینه Period SUR نیز واریانس ناهمسانی را با توجه به همبستگی بین مشاهدات در داخل هر گروه منظور می‌کند.

برای تخمین مدل اثرات ثابت مقطعی در قسمت Cross – section گزینه Fixed را انتخاب می‌کنیم. نتایج این مدل نشان می‌دهد که ضرایب α (عرض از مبدأ) برای کشورهای مختلف، متفاوت است یا نه؟ در واقع برای کشورها یک متغیر مجازی در

نظر می‌گیرد که نشان‌دهنده تفاوت عرض از مبدأ برای کشورهای مختلف می‌باشد. نتایج تخمین این مدل عبارت است‌از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/02/12 Time: 11:12
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.402670	0.225309	10.66387	0.0000
X1	-0.321702	0.044099	-7.294964	0.0000
X2	0.662250	0.073386	9.024191	0.0000
X3	-0.640483	0.029679	-21.58045	0.0000

Effects Specification

Cross-section fixed (dummy variables)

R-squared	0.973366	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.971706	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.092330	Akaike info criterion	-1.867450
Sum squared resid	2.736491	Schwarz criterion	-1.631979
Log likelihood	340.3340	Hannan-Quinn criter.	-1.773645
F-statistic	586.5556	Durbin-Watson stat	0.326578
Prob(F-statistic)	0.000000		

برای مشاهده مقدار عرض از مبدأ برای هر یک از کشورها، در پنجره فوق مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

View → Fixed / Random Effects → Cross – section Effects

مقدار عرض از مبدأ برای هر یک از ۱۸ کشور عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA:...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | St

Cross-section Fixed Effects

		COUNTRY	Effect
1	1	AUSTRIA	-0.116914
2	2	BELGIUM	-0.237118
3	3	CANADA	0.639171
4	4	DENMARK	-0.013214
5	5	FRANCE	-0.197898
6	6	GERMANY	-0.252801
7	7	GREECE	-0.065560
8	8	IRELAND	0.189656
9	9	ITALY	-0.170122
10	10	JAPAN	-0.026742
11	11	NETHERLA	-0.167878
12	12	NORWAY	-0.185969
13	13	SPAIN	-0.720893
14	14	SWEDEN	0.623673
15	15	SWITZERL	-0.000167
16	16	TURKEY	0.107318
17	17	U.K.	-0.057222
18	18	U.S.A.	0.652581

برای تخمین مدل اثرات تصادفی مقطعی، در مقابل Cross section گزینه Random را انتخاب می‌کنیم. نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Panel EGLS (Cross-section random effects)
Date: 09/02/12 Time: 11:23
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342
Swamy and Arora estimator of component variances

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.996698	0.178235	11.20260	0.0000
X1	-0.420389	0.038657	-10.87482	0.0000
X2	0.554986	0.057174	9.706890	0.0000
X3	-0.606840	0.024672	-24.59636	0.0000

Effects Specification

	S.D.	Rho
Cross-section random	0.195545	0.8177
Idiosyncratic random	0.092330	0.1823

Weighted Statistics

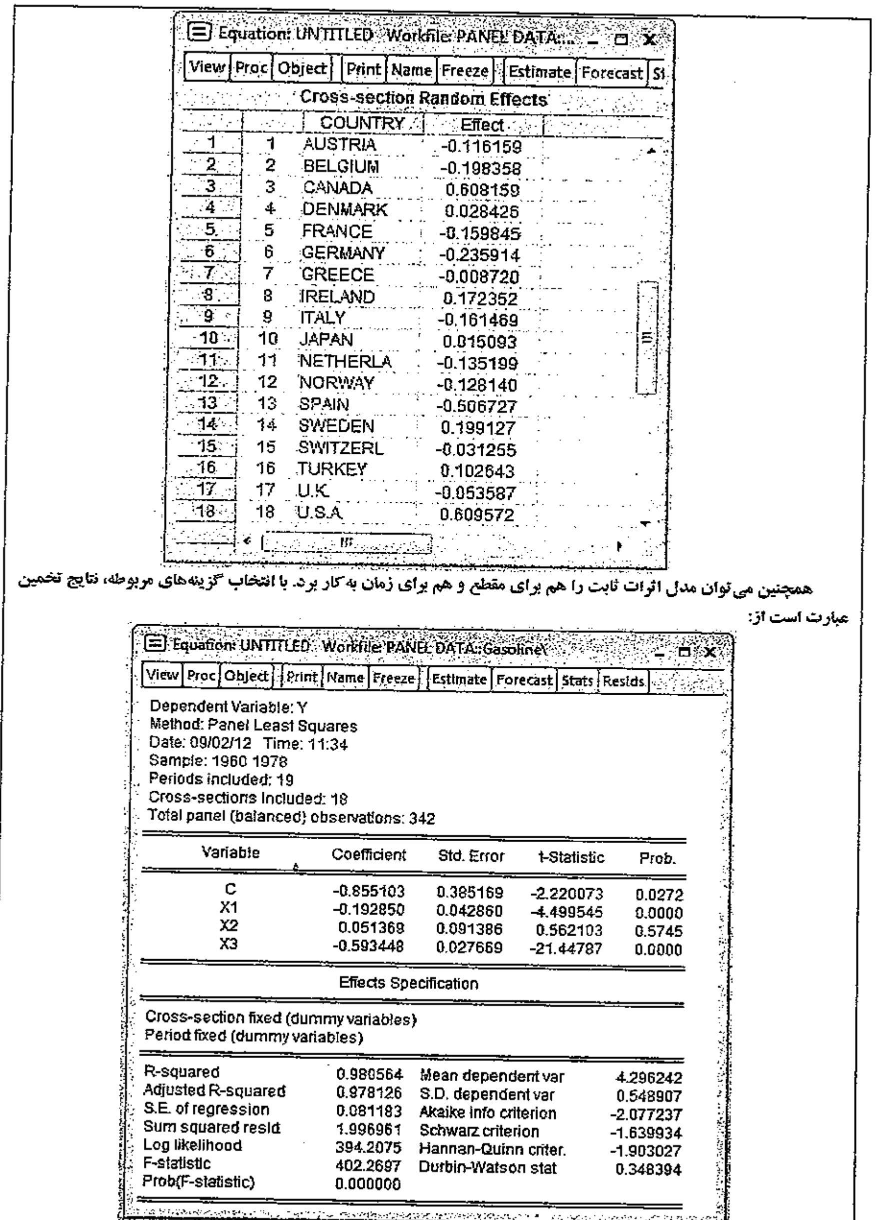
R-squared	0.829310	Mean dependent var	0.462676
Adjusted R-squared	0.827795	S.D. dependent var	0.230099
S.E. of regression	0.095485	Sum squared resid	3.081707
F-statistic	547.3996	Durbin-Watson stat	0.304481
Prob(F-statistic)	0.000000		

Unweighted Statistics

R-squared	0.730918	Mean dependent var	4.296242
Sum squared resid	27.64625	Durbin-Watson stat	0.033940

برای مشاهده مقدار عرض از مبدأ برای هر یک از ۱۸ کشور درپنجره فوق، مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

$$\text{View} \rightarrow \text{Fixed/Random Effects} \rightarrow \text{Cross-section Effects}$$



Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | St

Cross-section Random Effects

		COUNTRY	Effect
1	1	AUSTRIA	-0.116159
2	2	BELGIUM	-0.198358
3	3	CANADA	0.608159
4	4	DENMARK	0.028426
5	5	FRANCE	-0.159845
6	6	GERMANY	-0.235914
7	7	GREECE	-0.008720
8	8	IRELAND	0.172352
9	9	ITALY	-0.161469
10	10	JAPAN	0.015093
11	11	NETHERLA	-0.135199
12	12	NORWAY	-0.128140
13	13	SPAIN	-0.506727
14	14	SWEDEN	0.199127
15	15	SWITZERL	-0.031255
16	16	TURKEY	0.102643
17	17	U.K.	-0.053587
18	18	U.S.A.	0.609572

همچنین می‌توان مدل اثرات ثابت را هم برای مقطع و هم برای زمان به‌کار برد. با انتخاب گزینه‌های مربوطه، نتایج تخمین عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/02/12 Time: 11:34
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.855103	0.385169	-2.220073	0.0272
X1	-0.192850	0.042860	-4.499545	0.0000
X2	0.051369	0.091386	0.562103	0.5745
X3	-0.593448	0.027669	-21.44787	0.0000

Effects Specification

Cross-section fixed (dummy variables)
Period fixed (dummy variables)

R-squared	0.980564	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.978126	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.081183	Akaike info criterion	-2.077237
Sum squared resid	1.996961	Schwarz criterion	-1.639934
Log likelihood	394.2075	Hannan-Quinn criter.	-1.903027
F-statistic	402.2697	Durbin-Watson stat	0.348394
Prob(F-statistic)	0.000000		

تخمین عرض از مبدأ برای هر یک از کشورها عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL::...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Fore

Cross-section Fixed Effects

		COUNTRY	Effect
1	1	AUSTRIA	-0.118630
2	2	BELGIUM	-0.106496
3	3	CANADA	1.005419
4	4	DENMARK	0.177704
5	5	FRANCE	-0.093499
6	6	GERMANY	-0.099080
7	7	GREECE	-0.331990
8	8	IRELAND	-0.017817
9	9	ITALY	-0.356862
10	10	JAPAN	-0.081437
11	11	NETHERLA	-0.064242
12	12	NORWAY	0.005258
13	13	SPAIN	-0.530809
14	14	SWEDEN	-0.156173
15	15	SWITZERL	0.154628
16	16	TURKEY	-0.476621
17	17	U.K.	-0.012869
18	18	U.S.A.	1.103515

تخمین عرض از مبدأ برای هر یک از سال‌ها عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL::...

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Fore

Period Fixed Effects

		DATEID01	Effect
		DATEID01	Effect
1	1	1960-01-01	-0.228886
2	2	1961-01-01	-0.187916
3	3	1962-01-01	-0.184637
4	4	1963-01-01	-0.164141
5	5	1964-01-01	-0.122891
6	6	1965-01-01	-0.104752
7	7	1966-01-01	-0.061056
8	8	1967-01-01	-0.030053
9	9	1968-01-01	0.001191
10	10	1969-01-01	0.014113
11	11	1970-01-01	0.046194
12	12	1971-01-01	0.075312
13	13	1972-01-01	0.103250
14	14	1973-01-01	0.140821
15	15	1974-01-01	0.099052
16	16	1975-01-01	0.133506
17	17	1976-01-01	0.142005
18	18	1977-01-01	0.156816
19	19	1978-01-01	0.172070

و بالاخره تخمین مدل اثرات تصادفی هم برای مقطع و هم برای زمان عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Panel EGLS (Two-way random effects)
Date: 09/02/12 Time: 11:37
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.040793	0.191508	10.65642	0.0000
X1	-0.404936	0.040369	-10.03087	0.0000
X2	0.564562	0.060854	9.277343	0.0000
X3	-0.609360	0.025970	-23.46409	0.0000

Effects Specification

	S.D.	Rho
Cross-section random	0.195805	0.8533
Period random	0.000000	0.0000
Idiosyncratic random	0.081183	0.1467

Weighted Statistics

R-squared	0.830920	Mean dependent var	0.406814
Adjusted R-squared	0.829419	S.D. dependent var	0.226658
S.E. of regression	0.094439	Sum squared resid	3.014522
F-statistic	553.6835	Durbin-Watson stat	0.307280
Prob(F-statistic)	0.000000		

Unweighted Statistics

R-squared	0.717170	Mean dependent var	4.296242
Sum squared resid	29.05882	Durbin-Watson stat	0.031877

آزمون اثرات ثابت

آزمون اثرات ثابت را می‌توان هم برای مقطع و هم برای زمان، انجام داد. بدین منظور ابتدا مدل اثرات ثابت مقطعی و زمانی را برآورد می‌کنیم. سپس برای آزمون اثرات ثابت در مقابل اثرات تصادفی، مسیر زیر را در پنجره نتایج انتخاب می‌کنیم:

View → Fixed / Random Effects Testing → Redundant Fixed Effects – Likelihood Ratio

نتایج در پنجره زیر نشان داده شده است. این نتایج به‌گونه‌ای است که سه فرضیه را آزمون می‌کند:

۱- اثرات ثابت مقطعی، صفر است.
۲- اثرات ثابت زمانی، صفر است.
۳- اثرات ثابت مقطعی و زمانی، صفر است.

در واقع فرضیه H_0 بیانگر عدم وجود اثرات ثابت است که طبق آن عرض از مبدأ، ثابت می‌باشد که بیانگر یک رگرسیون مقید می‌باشد. نتایج تخمین چهار قسمت دارد. در قسمت اول، آماره های آزمون (F و χ^2)ارائه شده‌اند. مقدار F و χ^2 برای آزمون اثرات ثابت مقطعی، به ترتیب برابر ۱۱۳/۳۵ و ۶۸۲/۶۳ می باشد که در ناحیه بحرانی قرار دارند(مقادیر احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است)، لذا فرضیه صفر را رد می‌کند و بدان معنا است که اثرات ثابت مقطعی وجود دارد. بدین ترتیب کشورها از لحاظ مصرف بنزین با هم تفاوت معناداری دارند. همچنین مقادیر F =۶/۲۳ و χ^2 =۱۰۷/۷۵ برای آزمون اثرات ثابت زمانی نیز نشان

می‌دهد که فرضیه صفر رد می‌شود و لذا اثرات ثابت زمانی، معنادار است. این نتیجه نشان می‌دهد که مصرف بنزین در هر یک از کشورها، در طول زمان دچار تغییر شده است. بالاخره مقادیر F و χ^2 برای آزمون همزمان اثرات ثابت مقطعی و زمانی به ترتیب ۵۵/۹۵ و ۶۸۷/٤ است که فرضیه صفر را رد می‌کند و لذا اثرات ثابت هم در بین مقاطع (کشورها) و هم برای هر کشور در طول زمان وجود دارد.

نتایج آزمون اثرات ثابت سه قسمت دیگر نیز دارد که بخش دوم مربوط به برآورد مدل اثرات ثابت زمانی، بخش سوم مربوط به برآورد مدل اثرات ثابت مقطعی و بخش چهارم نیز مربوط به برآورد مدل اثرات ثابت زمانی و مقطعی است.

بخش اول: نتایج آزمون اثرات ثابت

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Redundant Fixed Effects Tests
Equation: Untitled
Test cross-section and period fixed effects

Effects Test	Statistic	d.f.	Prob.	
Cross-section F	113.351303	(17,303)	0.0000	اثرات ثابت مقطعی
Cross-section Chi-square	682.635958	17	0.0000	اثرات ثابت مقطعی
Period F	6.233849	(18,303)	0.0000	اثرات ثابت زمانی
Period Chi-square	107.747064	18	0.0000	اثرات ثابت زمانی
Cross-Section/Period F	55.955615	(35,303)	0.0000	اثرات ثابت مقطعی و زمانی
Cross-Section/Period Chi-square	687.429282	35	0.0000	اثرات ثابت مقطعی و زمانی

بخش دوم: برآورد مدل اثرات ثابت زمانی

Cross-section fixed effects test equation:
Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/02/12 Time: 11:43
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.440637	0.129822	18.79980	0.0000
X1	-0.899147	0.031187	-28.83043	0.0000
X2	0.899896	0.037078	24.27015	0.0000
X3	-0.764240	0.019190	-39.82420	0.0000

Effects Specification

Period fixed (dummy variables)

R-squared	0.856954	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.847567	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.214308	Akaike info criterion	-0.180641
Sum squared resid	14.69692	Schwarz criterion	0.066043
Log likelihood	52.88955	Hannan-Quinn criter.	-0.082369
F-statistic	91.28810	Durbin-Watson stat	0.129532
Prob(F-statistic)	0.000000		

بخش سوم: برآورد مدل اثرات ثابت مقطعی

Period fixed effects test equation:
Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/02/12 Time: 11:43
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.402670	0.225309	10.66387	0.0000
X1	-0.321702	0.044099	-7.294964	0.0000
X2	0.662250	0.073386	9.024191	0.0000
X3	-0.640483	0.029679	-21.58045	0.0000

Effects Specification

Cross-section fixed (dummy variables)

R-squared	0.973366	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.971706	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.092330	Akaike info criterion	-1.867450
Sum squared resid	2.736491	Schwarz criterion	-1.631979
Log likelihood	340.3340	Hannan-Quinn criter.	-1.773645
F-statistic	586.5556	Durbin-Watson stat	0.326578
Prob(F-statistic)	0.000000		

بخش چهارم: برآورد مدل اثرات ثابت مقطعی و زمانی

Cross-section and period fixed effects test equation:
Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/02/12 Time: 11:43
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.391326	0.116934	20.45017	0.0000
X1	-0.891798	0.030315	-29.41796	0.0000
X2	0.889962	0.035806	24.85523	0.0000
X3	-0.763373	0.018608	-41.02325	0.0000

R-squared	0.854935	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.853648	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.209990	Akaike info criterion	-0.271888
Sum squared resid	14.90436	Schwarz criterion	-0.227037
Log likelihood	50.49289	Hannan-Quinn criter.	-0.254021
F-statistic	663.9993	Durbin-Watson stat	0.137461
Prob(F-statistic)	0.000000		

آزمون هاسمن

فرض اصلی مدل اثرات تصادفی آن است که اثرات تصادفی با متغیرهای توضیحی، همبستگی ندارد. روش عمومی برای آزمون این فرضیه را هاسمن(۱۹۷۸) ارائه کرده که برای مقایسه تخمین‌های اثرات ثابت و تصادفی ضرایب است. بدین منظور ابتدا مدل مورد نظر را با لحاظ کردن اثرات تصادفی مقطعی، تخمین می‌زنیم. سپس برای انجام آزمون هاسمن، در پنجرهٔ نتایج، مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

View → Fixed/Random Effects Testing → Correlateted Random Effect – Hausman Test

با اجرای دستور فوق، مدل را با لحاظ کردن اثرات ثابت، تخمین زده و آماره های آزمون را ارائه می‌کند. نتایج آزمون سه قسمت دارد: بخش اول نتیجه اصلی آزمون هاسمن را نشان می‌دهد. چون χ^2 بزرگ است و در ناحیه بحرانی قرار دارد(مقادیر احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است)، فرضیه H_0 مبنی بر مناسب بودن اثرات تصادفی، رد می‌شود. لذا مدل اثرات تصادفی نمی‌تواند مناسب باشد و مدل اثرات ثابت ترجیح داده می‌شود. بخش دوم جزئیات آزمون هاسمن را نشان می‌دهد که ضرایب تخمینی در مدل اثرات ثابت و تصادفی را مقایسه می‌کند و همچنین مقدار واریانس تفاضل ضرایب را نشان می‌دهد. چون مقدار احتمال برای هر یک از ضرایب، کوچکتر از ۰/۰۵ است لذا واریانس تفاضل، معنادار است. بخش سوم نیز برآورد مدل اثرات ثابت مقطعی را نشان می‌دهد.

بخش اول: آزمون هاسمن

Equation: UNTITLED Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Correlated Random Effects - Hausman Test
Equation: Untitled
Test cross-section random effects

Test Summary	Chi-Sq. Statistic	Chi-Sq. d.f.	Prob.
Cross-section random	26.495054	3	0.0000

بخش دوم: مقایسه تخمین ضرایب در مدل اثرات ثابت و تصادفی مقطعی

Cross-section random effects test comparisons:

Variable	Fixed	Random	Var(Diff.)	Prob.
X1	-0.321702	-0.420389	0.000450	0.0000
X2	0.662250	0.554986	0.002117	0.0197
X3	-0.640483	-0.606840	0.000272	0.0414

بخش سوم تخمین ضرایب در مدل اثرات ثابت مقطعی

Cross-section random effects test equation:
Dependent Variable: Y
Method: Panel Least Squares
Date: 09/02/12 Time: 12:01
Sample: 1960 1978
Periods included: 19
Cross-sections included: 18
Total panel (balanced) observations: 342

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	2.402670	0.225309	10.66387	0.0000
X1	-0.321702	0.044099	-7.294964	0.0000
X2	0.662250	0.073386	9.024191	0.0000
X3	-0.640483	0.029679	-21.58045	0.0000

Effects Specification

Cross-section fixed (dummy variables)

R-squared	0.973366	Mean dependent var	4.296242
Adjusted R-squared	0.971706	S.D. dependent var	0.548907
S.E. of regression	0.092330	Akaike info criterion	-1.867450
Sum squared resid	2.736491	Schwarz criterion	-1.631979
Log likelihood	340.3340	Hannan-Quinn criter.	-1.773645
F-statistic	586.5556	Durbin-Watson stat	0.326578
Prob(F-statistic)	0.000000		

۲۲-۱۲ آزمون ریشه واحد در داده‌های ترکیبی

آزمون‌های مختلفی برای بررسی وجود ریشه واحد در داده‌های ترکیبی ارائه شده است که برخی از آنها شامل لوین، لین و چو (LLC)[1] (۲۰۰۲)، برایتونگ[2] (۲۰۰۰)، ایم، پسران و شین[3] (IPS) (۲۰۰۳)، ADF-Fisher[4] و PP-Fisher[5] (مادلا و وُو[6] (۱۹۹۹) و چوئی[7] (۲۰۰۱)) و هادری[8] می‌باشد. هر چند این آزمون‌ها معروف به آزمون ریشه واحد در داده‌های ترکیبی هستند ولی در واقع می‌توان آنها را آزمون‌های ریشه واحد در سری‌های چندگانه دانست که برای داده‌های ترکیبی نیز به کار می‌روند.

1- Levin, Lin and Chu
2- Breitung
3- Im, Pesaran and Shin
4- Fisher-type test using Augment Dickey-Fuller
5- Fisher-type test using Augment Philips-Prawn
6- Maddala and Wu
7- Choi
8- Hadri

به طور کلی آزمون ریشه واحد در داده‌های ترکیبی مشابه سری‌های زمانی یک متغیره است که در فصل چهاردهم بررسی شد. بدین منظور برای سری Y_{it} فرایند AR(۱) را در نظر بگیرید:

$$Y_{it} = \phi_i Y_{it-1} + \alpha_i + \beta_i X_{it} + \gamma_i t + u_{it} \; ; \quad i = 1,\dots,n \quad t = 1,\dots,T \qquad (۲۲-۱۳۹)$$

اگر $|\phi_i| < 1$ باشد، Y_{it} مانا است و اگر $|\phi_i| = 1$ باشد، Y_{it} نامانا است.

برای ϕ_i دو فرض مطرح می‌شود:

۱- ریشه واحد مشترک: می‌توان فرض کرد که ϕ_i برای همه مقاطع یکسان است ($\phi_i = \phi$). آزمون‌های LLC، برایتونگ و هادری از این فرض استفاده می‌کنند.

۲- ریشه واحد مقطعی: فرض دیگر آن است که ϕ_i می‌تواند برای مقاطع، متفاوت باشد. این فرض توسط IPS، ADF-Fisher و PP-Fisher استفاده می‌شود.

۲۲-۱۲-۱ آزمون ریشه واحد مشترک

آزمون‌های LLC، برایتونگ و هادری فرض می‌کنند که یک ریشه واحد مشترک وجود دارد به طوری که ϕ_i در بین همه مقاطع یکسان است. در اینجا به‌عنوان نمونه، روش LLC را بررسی می‌کنیم. آزمون LLC معادله زیر را استفاده می‌کند که مشابه آزمون ریشه واحد در حالت معمولی است که در فصل نهم بررسی شد:

$$\Delta Y_{it} = \theta Y_{it-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \lambda_{ij} \Delta Y_{it-j} + \alpha_i + \beta_i X_{it} + \gamma_i t + u_{it} \qquad (۲۲-۱۴۰)$$

که $\theta = \phi - 1$ است. معادله فوق مشابه (۲۲-۱۳۹) است که به طرفین آن Y_{it-1} اضافه شده است و همچنین برای رفع خودهمبستگی، ΔY_{it-j}ها نیز به آن افزوده شده است. بدین ترتیب، آزمون ریشه واحد به‌صورت زیر مطرح می‌شود:

$H_0 : \theta = 0$

$H_1 : \theta < 0$

در رگرسیون فوق، عبارت $\alpha_i + \beta_i X_{it} + \gamma_i t$ را با $\mathbf{Z}'_{it}\boldsymbol{\delta}$ نشان می‌دهیم که $\mathbf{Z}_{it}$ شامل متغیرهای برون‌زا، روند و اثرات ثابت می‌باشد و $\boldsymbol{\delta}$ نیز بردار ضرایب مربوط به آنها را نشان می‌دهد.

روش LLC به دنبال تخمین θ با استفاده از معادله (۲۲-۹۸) است که خودهمبستگی نداشته باشد. آنها بحث خود را با تخمین دو مجموعه از معادلات شروع می‌کنند:

۱- برازش ΔY_{it} روی وقفه‌های ΔY_{it-j} (که $j=1,\dots,p_i$ است) و $\mathbf{Z}_{it}$ که ضرایب آن با $(\hat{\lambda},\hat{\delta})$ نشان داده می‌شود:

$$\Delta Y_{it}=\sum_{j=1}^{p_i}\hat{\lambda}_{ij}\Delta Y_{it-j}+\mathbf{Z}'_{it}\hat{\boldsymbol{\delta}} \quad\Rightarrow\quad \text{باقیمانده‌ها}=\overline{\Delta Y_{it}} \qquad (۲۲-۱۴۱)$$

۲- برازش Y_{it-1} روی وقفه‌های ΔY_{it-j} (که $j=1,\dots,p_i$ است) و $\mathbf{Z}_{it}$ که ضرایب آن با $(\dot{\lambda},\dot{\delta})$ نشان داده می‌شود:

$$Y_{it-1}=\sum_{j=1}^{p_i}\dot{\lambda}_{ij}\Delta Y_{it-j}+\mathbf{Z}'_{it}\dot{\boldsymbol{\delta}} \quad\Rightarrow\quad \text{باقیمانده‌ها}=\overline{Y}_{it} \qquad (۲۲-۱۴۲)$$

حال $\Delta\overline{Y}_{it}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم که بیانگر ΔY_{it} است که اثرات خودهمبستگی‌ها (یعنی اثرات ΔY_{it-j}ها) و اجزاء غیرتصادفی (یعنی $\mathbf{Z}_{it}$) از آن حذف شده است:

$$\overline{\Delta Y}_{it}=\Delta Y_{it}-\Delta\hat{Y}_{it}=\Delta Y_{it}-\sum_{j=1}^{p_i}\hat{\lambda}_{ij}\Delta Y_{it-j}-\mathbf{Z}'_{it}\hat{\boldsymbol{\delta}} \qquad (۲۲-۱۴۳)$$

مشابه رابطه فوق را برای Y_{it-1} نیز تعریف می‌کنیم:

$$\overline{Y}_{it-1}=Y_{it-1}-\hat{Y}_{it-1}=Y_{it}-\sum_{j=1}^{p_i}\dot{\lambda}_{ij}\Delta Y_{it-j}-\mathbf{Z}'_{it}\dot{\boldsymbol{\delta}} \qquad (۲۲-۱۴۴)$$

حال $\overline{\Delta Y}_{it}$ و $\overline{Y}_{it-1}$ را استاندارد می‌کنیم:

$$\Delta\widetilde{Y}_{it}=\frac{\overline{\Delta Y}_{it}}{s_i} \qquad \widetilde{Y}_{it-1}=\frac{\overline{Y}_{it-1}}{s_i} \qquad (۲۲-۱۴۵)$$

s_i انحراف معیار معادله رگرسیون (۲۲-۱۴۰) است. چون $\overline{\Delta Y}_{it}$ و $\overline{Y}_{it}$ بیانگر باقیمانده‌ها هستند، لذا میانگین آنها صفر است.

حال ضریب θ را از معادله رگرسیون تجمیعی زیر به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta\widetilde{Y}_{it}=\theta\widetilde{Y}_{it-1}+v_{it} \qquad (۲۲-۱۴۶)$$

روش LLC برای آزمون فرضیه $\theta=0$ یک آماره t را معرفی می‌کند که تعدیل شدهٔ آماره t مرسوم است.

۲۲-۱۲-۱ آزمون‌های ریشه واحد مقطعی

آزمون‌های ریشه واحد مقطعی شامل آزمون IPS، ADF−Fisher و PP−Fisher می‌باشد که امکان وجود ریشه واحد را برای هریک از مقاطع در نظر می‌گیرند، به‌گونه‌ای که ϕ_i می‌تواند برای هر یک از مقاطع، متفاوت باشد. در اینجا روش IPS را بررسی می‌کنیم.

ایم، پسران و شین (IPS) برای بررسی آزمون ریشه واحد مقطعی از معادله (۲۲-۹۸) شروع می‌کنند که در آن، θ_iها متفاوت هستند. لذا آزمون ریشه واحد مقطعی به‌صورت فرضیه زیر معرفی می‌شود:

$$H_0:\theta_i=0 \qquad \text{برای هر } i$$

$$H_1=\begin{cases}\theta_i=0 & i=1,2,\dots,n_1\\ \theta_i<0 & i=n_1+1,n_1+2,\dots,n\end{cases} \qquad (۲۲-۱۴۷)$$

فرضیه H_1 بدان معنا است که تعدادی از فرایندهای مقطعی می‌توانند مانا باشند. در واقع n_1 سری ممکن است مانا و بقیه نامانا باشند.

بعد از تخمین رگرسیون (۲۲-۹۸) برای هر یک از مقاطع ابتدا آماره t برای هر یک از θ_iها حساب می‌شود که با $t_{iT}(p_i)$ نشان داده می‌شود. سپس میانگین tهای انفرادی به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\bar{t}_{nT}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_{iT}(p_i)}{n} \qquad (۲۲-۱۴۶)$$

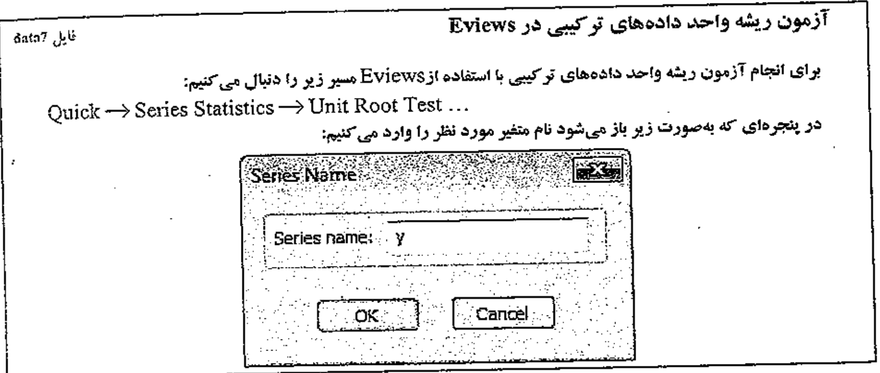
ایم، پسران و شیم (IPS) نشان می‌دهند که استاندارد شدهٔ $\bar{t}_{nT}$ توزیع مجانبی نرمال استاندارد دارد.

آزمون ریشه واحد داده‌های ترکیبی در Eviews — فایل data7

برای انجام آزمون ریشه واحد داده‌های ترکیبی با استفاده از Eviews مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Quick → Series Statistics → Unit Root Test ...

در پنجره‌ای که به‌صورت زیر باز می‌شود نام متغیر مورد نظر را وارد می‌کنیم:



با انتخاب OK، پنجره زیر با عنوان Panel Unit Root Test باز می‌شود.

Panel Unit Root Test

Test type: Summary

Test for unit root in:
- (•) Level
- ( ) 1st difference
- ( ) 2nd difference

Include in test equation:
- (•) Individual intercept
- ( ) Individual intercept and trend
- ( ) None

Lag length:
- (•) Automatic selection: Schwarz Info Criterion
- Max lags: *
- (Use * to indicate obs-based maximum lag length)
- ( ) User specified: 1

Spectral estimation:
- Kernel: Bartlett
- Bandwidth selection
- (•) Automatic: Newey-West
- ( ) User specified: 2

OK Cancel

در این پنجره در قسمت Test type چند گزینه وجود دارد: گزینه Summary خلاصه‌ای از انواع آزمون‌های ریشه واحد را ارائه می‌کند. شش گزینه دیگر وجود دارد که انواع آزمون‌های ریشه واحد را درداده‌های ترکیبی ارائه می‌کند که عبارتند از:

۱- Common Root-Levin, Lin, Chu

۲- Common Root-Breitung

۳- Individual Root-Im, Pesaran, Shin

۴- Individual Root-Fisher-ADF

۵- Individual Root-Fisher-PP

۶- Hadri

توجه شود که Common Root بیانگر آن است که آزمون‌های مربوطه بر این فرض استوار هستند که ساختار AR برای همه سری‌ها، مشترک است. در حالی که Individual Root آزمون‌های مربوطه را با این فرض به کار می‌برد که هر یک از سری‌ها می‌توانند از فرایند AR متفاوتی تبعیت کنند.

به هر حال از بین گزینه‌های مذکور معمولاً گزینه Summary را انتخاب می‌کنند که نتایج آزمون‌های ۱، ۳، ۴ و ۵ را ارائه می‌کند.

مانند آزمون ریشه واحد که در فصل چهاردهم بررسی شد می‌توان آزمون ریشه واحد را برای سطح، تفاضل مرتبه اول و تفاضل مرتبه دوم انجام داد. همچنین می‌توان به مدل موردنظر، عرض از مبدأ و روند را اضافه نمود. اگر عرض از مبدأ را انتخاب کنیم بدان معنا است که اثرات ثابت فردی را در نظر گرفته‌ایم.

در سمت چپ پنجره مذکور، بخش‌هایی وجود دارد که بستگی به نوع آزمونی است که در قسمت Test Type انتخاب می‌کنیم. برای آزمون‌هایی که مستلزم رگرسیون بر روی تفاضل‌های با وقفه (ΔY_{it-j}) هستند (مانند LLC، برایتونگ، IPS و ADF-Fisher)، گزینه‌هایی که در سمت راست پنجرهٔ مذکور وجود دارد مربوط به انتخاب تعداد وقفه‌ها است. برای آزمون‌هایی که مستلزم وزن‌دهی هستند (مانند LLC، PP-Fisher و H) گزینه‌های موجود مربوط به انتخاب نوع وزن‌ها هستند.

برای آزمون ریشه واحد یک گروه با یک مقطع، Eviews بر اساس معیارهای اطلاعات، (مانند آکائیک، شوارتز و ...)، حداکثر وقفه را برای ΔY_{it-j} ها در نظر می‌گیرد اما اگر بخواهیم تعداد وقفه را خود تعیین کنیم، می‌توانیم از گزینه User specified استفاده کنیم. در سمت راست قسمت پایین، گزینه Kernel برای وزن‌دهی به متغیرها است که در روش GLS به‌کار می‌رود.

با انتخاب OK، نتایج در پنجره زیر نشان داده می‌شود.

Series: Y Workfile: PANEL DATA::Gasoline\

View | Proc | Object | Properties | Print | Name | Freeze | Sample | Genr | Sheet | Graph | Stats

Panel Unit Root Test on Y

Panel unit root test: Summary
Series: Y
Date: 12/16/12 Time: 13:09
Sample: 1960 1978
Exogenous variables: Individual effects
User-specified lags: 1
Newey-West automatic bandwidth selection and Bartlett kernel
Balanced observations for each test

Method	Statistic	Prob.**	Cross-sections	Obs
Null: Unit root (assumes common unit root process)				
Levin, Lin & Chu t*	-4.34149	0.0000	15	255
Null: Unit root (assumes individual unit root process)				
Im, Pesaran and Shin W-stat	-2.69925	0.0035	15	255
ADF - Fisher Chi-square	54.6389	0.0039	15	255
PP - Fisher Chi-square	88.7040	0.0000	15	270

** Probabilities for Fisher tests are computed using an asymptotic Chi -square distribution. All other tests assume asymptotic normality.

نتایج فوق نشان می‌دهد که بر اساس LLC ریشه واحد مشترک وجود ندارد. همچنین آزمونهای IPS و ADF-Fisher و PP-Fisher نشان می‌دهند که ریشه واحد مقطعی وجود ندارد.

مسائل

۱-۲۲ در مدل اثر تصادفی توضیح دهید که چرا مدل باید با GLS تخمین زده شود نه با OLS؟

۲-۲۲ غفلت از ناهمگنی پارامترها در داده‌های تجمیعی چگونه ممکن است منجر به اریب در برآوردها شود. الگوی احتمالی اریب، در صورتی که عرض از مبدأ و شیب‌ها در بین مقاطع تغییر کند را بررسی کنید و به کمک شکل توضیح دهید.

۳-۲۲ تفاوت تخمین‌های اثرات تصادفی (Random Effects) و اثرات ثابت (Fixed Effects) را در داده‌های ترکیبی توضیح داده و منطق آزمون هاسمن را برای انتخاب این دو روش در تخمین داده‌های ترکیبی توضیح دهید.

۴-۲۲ منظور از مدل اثرات ثابت چیست؟

۵-۲۲ رگرسیون LSDV چیست؟

۶-۲۲ تفاوت داده‌های تجمیعی (Pooled) و ترکیبی (Panel) چیست؟

۷-۲۲ رگرسیون درون‌گروهی چه تفاوتی با رگرسیون بین‌گروهی دارد؟

۹-۲۲ در کدامیک از دو مدل تجمیعی و اثرات ثابت، مجموع مجذور خطاها (RSS) بیشتر است؟ چرا؟

۱۰-۲۲ آزمون ضریب لاگرانژ (LM) را برای تشخیص اثرات ثابت که توسط بروش و پاگان ارائه شده است، تشریح کنید؟

۱۱-۲۲ آزمون معنادار بودن اثرات ثابت را تشریح کنید؟

۱۲-۲۲ در برآورد ضرایب مدل داده‌های ترکیبی، چه وقت از روش GLS استفاده می‌شود؟

۱۳-۲۲ در چه صورتی روش GLS و LSDV در برآورد مدل داده‌های ترکیبی، یکسان است؟

۱۴-۲۲ به‌طور مستدل توضیح دهید که مبنای آزمون هاسمن برای بررسی وجود اثرات تصادفی چیست؟

۱۵-۲۲ آمارهای زیر در دسترس است:[1]

سال	امریکا		کانادا		انگلستان	
	دستمزد (ساعت/دلار)	بیکاری (درصد)	دستمزد (ساعت/دلار)	بیکاری (درصد)	دستمزد (ساعت/دلار)	بیکاری (درصد)
۱۹۸۰	۵۵/۶	۷/۱	۴۹/۰	۷/۲	۴۳/۳	۷/۰
۱۹۸۱	۶۶/۱	۷/۶	۱/۵۴	۷/۳	۴۴/۱	۱۰/۵
۱۹۸۲	۶۷/۰	۹/۷	۵۹/۶	۱۰/۶	۴۲/۲	۱۱/۳
۱۹۸۳	۶۸/۸	۹/۶	۶۳/۹	۱۱/۵	۳۹/۰	۱۱/۸
۱۹۸۴	۷۱/۲	۷/۵	۶۴/۳	۱۰/۹	۳۷/۲	۱۱/۷
۱۹۸۵	۷۵/۱	۷/۲	۶۳/۵	۱۰/۲	۳۹/۰	۱۱/۲
۱۹۸۶	۷۸/۵	۷/۰	۶۳/۳	۹/۲	۴۷/۸	۱۱/۲
۱۹۸۷	۸۰/۷	۶/۲	۶۸/۰	۸/۴	۶۰/۲	۱۰/۳
۱۹۸۸	۸۴/۰	۵/۵	۷۶/۰	۷/۳	۶۸/۳	۸/۶
۱۹۸۹	۸۶/۶	۵/۳	۸۴/۱	۷/۰	۶۷/۷	۷/۲
۱۹۹۰	۹۰/۸	۵/۶	۹۱/۵	۷/۷	۸۱/۷	۶/۹
۱۹۹۱	۹۵/۶	۶/۸	۱۰۰/۱	۹/۸	۹۰/۵	۸/۸
۱۹۹۲	۱۰۰	۷/۵	۱۰۰	۱۰/۶	۱۰۰	۱۰/۱
۱۹۹۳	۱۰۲/۷	۶/۹	۹۵/۵	۱۰/۷	۸۸/۷	۱۰/۵
۱۹۹۴	۱۰۵/۶	۶/۱	۹۱/۷	۹/۴	۹۲/۳	۹/۷
۱۹۹۵	۱۰۷/۹	۵/۶	۹۳/۳	۸/۵	۹۵/۹	۸/۷
۱۹۹۶	۱۰۹/۳	۵/۴	۹۳/۱	۸/۷	۹۵/۶	۸/۲
۱۹۹۷	۱۱۱/۴	۴/۹	۹۴/۴	۸/۲	۱۰۳/۳	۷/۰
۱۹۹۸	۱۱۷/۳	۴/۵	۹۰/۶	۷/۵	۱۰۹/۸	۶/۳
۱۹۹۹	۱۲۳/۲	۴/۰	۹۱/۹	۵/۷	۱۱۲/۲	۶/۱

الف) داده‌ها را وارد Eviews کنید.

ب) رابطه بیکاری و دستمزد را برای هر کشور به‌طور جداگانه تخمین بزنید.

پ) رگرسیون تجمیعی (pooled) را برآورد کنید.

1- Gujarati (2004)

ت) رگرسیون LSDV را برآورد کنید.

ث) آزمون اثرات ثابت را انجام دهید.

ج) آزمون هاسمن را انجام دهید.

چ) آزمون ریشه واحد را انجام دهید.

ضمیمه فصل بیست و دوم: برآورد مدل داده‌های ترکیبی در Stata

برآورد مدل‌های ترکیبی در Stata

فایل data7

ورود داده‌ها

ابتدا داده‌ها را بر حسب مقاطع، مرتب کرده و سپس آنها را وارد می‌کنیم. برای هر مقطع یک کد در نظر می‌گیریم که بهتر از ۱، ۲ و ... آنها را شماره‌گذاری کنیم. در مثالی که در اینجا استفاده می‌شود، ۱۸ کشور داریم که از ۱ تا ۱۸ آنها را شماره‌گذاری کرده و این کد را با i نشان می‌دهیم. بنابراین علاوه بر متغیرهای X_1، X_2، X_3 و Y متغیر دیگری به نام i داریم. همچنین، متغیر سال را برای هر یک از مقاطع (کشورها) ایجاد کرده‌ایم که در اینجا با year نشان داده شده است.

Data Editor (Edit) - [data7.dta]

File Edit View Data Tools

country[1] AUSTRIA

	country	year	i	y	x1	x2	x3
1	AUSTRIA	1960	1	4.173244	-.3345476	-6.474277	-9.76684
2	AUSTRIA	1961	1	4.100989	-.3513276	-6.426006	-9.608622
3	AUSTRIA	1962	1	4.073176	-.3795177	-6.407308	-9.457256
4	AUSTRIA	1963	1	4.059509	-.4142514	-6.370678	-9.343155
5	AUSTRIA	1964	1	4.037689	-.4453354	-6.322247	-9.23774
6	AUSTRIA	1965	1	4.033983	-.4970607	-6.294668	-9.123903
7	AUSTRIA	1966	1	4.047536	-.4668377	-6.252545	-9.019822
8	AUSTRIA	1967	1	4.052911	-.5058834	-6.234581	-8.934402
9	AUSTRIA	1968	1	4.045507	-.5224125	-6.206294	-8.847967
10	AUSTRIA	1969	1	4.046355	-.5591105	-6.15314	-8.788686
11	AUSTRIA	1970	1	4.080588	-.5965612	-6.081712	-8.7282
12	AUSTRIA	1971	1	4.10672	-.6544591	-6.043626	-8.635899
13	AUSTRIA	1972	1	4.126018	-.5963316	-5.981052	-8.538338
14	AUSTRIA	1973	1	4.19938	-.5944468	-5.895153	-8.487289
15	AUSTRIA	1974	1	4.018496	-.4660269	-5.852381	-8.430404
16	AUSTRIA	1975	1	4.029018	-.4641422	-5.869363	-8.382814
17	AUSTRIA	1976	1	3.985412	-.5000837	-5.811703	-8.322232
18	AUSTRIA	1977	1	3.931676	-.4219156	-5.833288	-8.249563
19	AUSTRIA	1978	1	3.92275	-.4696031	-5.762023	-8.21104
20	BELGIUM	1960	2	4.164016	-.1657096	-6.215091	-9.405527
21	BELGIUM	1961	2	4.124356	-.171731	-6.176843	-9.303149
22	BELGIUM	1962	2	4.075962	-.2222914	-6.129636	-9.21607

Variables: Filter variables here; Variable / Label; country, year, i, y, x1, x2, x3, d1, d2, d3

Properties: Variables — Name <5 selected>, Label <different va..., Type, Format, Value Label, Notes; Data

Ready | Vars: 24 Order: Dataset | Obs: 343 | Filter: Off | Mode: Edit | CAP | NUM

بعد از ورود داده‌ها، فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
tsset i year
```


رسم نمودار

نمودار هر مقطع را می‌توان به‌صورت جداگانه ترسیم نمود. بدین منظور اگر بخواهیم فقط برای یک مقطع، به‌عنوان مثال برای مقطع ۱، نمودار مربوط به متغیر y را رسم کنیم، از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

```
tsline y if==1
```

برای ترسیم نمودار همه مقطع‌ها به‌صورت یکجا از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

```
tsline y
```

علاوه بر این، می‌توان همه نمودارها را به‌صورت یکجا و در کنار هم، ترسیم نمود که از فرمان زیر استفاده می‌شود:

```
tsline y, overlay
```

ایجاد متغیرهای مجازی برای هر مقطع

اجرای فرمان زیر، برای هر مقطع یک متغیر مجازی می‌سازد:

```
tabulate i, gen (d)
```

بعد از اجرای فرمان فوق، جدولی را به‌صورت زیر در صفحه نتایج، مشاهده خواهید کرد:

. tabulate i, gen (d)

i (شماره مقاطع)	Freq. (تعداد مشاهدات هر مقطع)	Percent (درصد مشاهدات هر مقطع)	Cum. (درصد تجمعی)
1	19	5.56	5.56
2	19	5.56	11.11
3	19	5.56	16.67
4	19	5.56	22.22
5	19	5.56	27.78
6	19	5.56	33.33
7	19	5.56	38.89
8	19	5.56	44.44
9	19	5.56	50.00
10	19	5.56	55.56
11	19	5.56	61.11
12	19	5.56	66.67
13	19	5.56	72.22
14	19	5.56	77.78
15	19	5.56	83.33
16	19	5.56	88.89
17	19	5.56	94.44
18	19	5.56	100.00
Total	342 (کل مشاهدات)	100.00	

همچنین در قسمت معرفی متغیرها نیز جدول زیر را مشاهدات خواهید کرد که متغیرهای d1 تا d18 به آن اضافه شده است:

```
Variables
  Filter variables here
☑ Variable      Label
☑ country
☑ year
☑ i
☑ y
☑ x1
☑ x2
☑ x3
☑ d1      i==  1.0000
☑ d2      i==  2.0000
☑ d3      i==  3.0000
☑ d4      i==  4.0000
☑ d5      i==  5.0000
☑ d6      i==  6.0000
☑ d7      i==  7.0000
☑ d8      i==  8.0000
☑ d9      i==  9.0000
☑ d10     i==  10.0000
☑ d11     i==  11.0000
☑ d12     i==  12.0000
☑ d13     i==  13.0000
☑ d14     i==  14.0000
☑ d15     i==  15.0000
☑ d16     i==  16.0000
☑ d18     i==  18.0000
```

تخمین رگرسیون جداگانه برای هر مقطع

بدین منظور با اجرای فرمان زیر، رگرسیون مقطع اول (در اینجا کشور اول) برآورده می‌شود:

reg y x1 x2 x3 if i==1

نتیجهٔ تخمین، به‌صورت زیر می‌باشد:

```
. reg y x1 x2 x3 if i==1

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      19
-------------+------------------------------           F(  3,    15) =   13.76
       Model |  .063401095     3  .021133698           Prob > F      =  0.0001
    Residual |  .02304227     15  .001536151           R-squared     =  0.7334
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.6801
       Total |  .086443365    18  .004802409           Root MSE      =  .03919

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          x1 |  -.7931991   .1500861    -5.28   0.000      -1.1131   -.4732982
          x2 |   .7607207   .2114705     3.60   0.003     .3099821    1.211459
          x3 |  -.5198709     .13313    -4.60   0.000    -.7610018     -.27874
       _cons |   3.726605   .3730175     9.99   0.000     2.931537    4.521673
------------------------------------------------------------------------------
```

این روش را برای سایر مقطع‌ها (کشورها) می‌توان به کار برد.

تخمین رگرسیون تجمیعی (pooling)

بدین منظور از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

reg y x1 x2 x3

نتیجهٔ تخمین عبارت است از:


```
. reg y x1 x2 x3

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =     342
-------------+------------------------------           F(  3,   338) =  664.00
       Model |  87.8386024     3  29.2795341           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  14.9043581   338  .044095734           R-squared     =  0.8549
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.8536
       Total |  102.742961   341  .301299005           Root MSE      =  .20999

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          x1 |  -.8917979   .0303147   -29.42   0.000    -.9514272   -.8321685
          x2 |   .8899616   .0358058    24.86   0.000     .8195313    .9603919
          x3 |  -.7633727   .0186083   -41.02   0.000    -.7999754   -.7267701
       _cons |   2.391326   .1169343    20.45   0.000     2.161315    2.621336
------------------------------------------------------------------------------
```

برآورد مدل اثرات ثابت

بدین منظور از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

xtreg y x1 x2 x3, fe

نتیجه عبارت است از:

```
. xtreg y x1 x2 x3, fe

Fixed-effects (within) regression               Number of obs      =       342
Group variable: i                               Number of groups   =        18

R-sq:  within  = 0.8396                         Obs per group: min =        19
       between = 0.5755                                        avg =      19.0
       overall = 0.6150                                        max =        19

                                                F(3,321)           =    560.09
corr(u_i, Xb)  = -0.2468                        Prob > F           =    0.0000

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          x1 |  -.3217025   .0440992    -7.29   0.000    -.4084626   -.2349424
          x2 |   .6622498    .073386     9.02   0.000     .5178715    .8066282
          x3 |  -.6404829   .0296788   -21.58   0.000    -.6988726   -.5820933
       _cons |    2.40267   .2253094    10.66   0.000     1.959401     2.84594
-------------+----------------------------------------------------------------
     sigma_u |  .34841289
     sigma_e |  .09233034
         rho |  .93438173   (fraction of variance due to u_i)
------------------------------------------------------------------------------
F test that all u_i=0:     F(17, 321) =    83.96             Prob > F = 0.0000
```

مقدار F=۸۳/۹۶ که در پایین جدول فوق ارائه شده است (F لیمر) نشان می‌دهد که مقاطع با هم تفاوت معنادار دارند و لذا اثرات ثابت رد نمی‌شود. به‌عبارت دیگر رگرسیون تجمیعی، رد می‌شود.

برآورد مدل اثرات تصادفی

بدین منظور از فرمان زیر استفاده می‌کنیم:

xtreg y x1 x2 x3, re

عبارت re بیانگر اثرات تصادفی است (البته اگر آن را ننویسیم تأثیری نخواهد داشت). نتایج تخمین عبارت است از:

```
. xtreg y x1 x2 x3, re

Random-effects GLS regression                   Number of obs      =       342
Group variable: i                               Number of groups   =        18

R-sq:  within  = 0.8363                         Obs per group: min =        19
       between = 0.7099                                        avg =      19.0
       overall = 0.7309                                        max =        19

Random effects u_i ~ Gaussian                   Wald chi2(3)       =   1642.20
corr(u_i, X)       = 0 (assumed)                Prob > chi2        =    0.0000

------------------------------------------------------------------------------
           y |      Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
          x1 |  -.4203893   .0399781   -10.52   0.000     -.498745   -.3420336
          x2 |   .5549858   .0591282     9.39   0.000     .4390967    .6708749
          x3 |  -.6068402    .025515   -23.78   0.000    -.6568487   -.5568316
       _cons |   1.996699    .184326    10.83   0.000     1.635427    2.357971
-------------+----------------------------------------------------------------
     sigma_u |  .19554468
     sigma_e |  .09233034
         rho |  .81769856   (fraction of variance due to u_i)
------------------------------------------------------------------------------
```

آزمون ضریب لاگرانژ بروش- پاگان برای وجود اثرات تصادفی

این آزمون در دو مرحله انجام می‌شود:

۱- مدل اثرات تصادفی را تخمین می‌زنیم.

۲- فرمان xttest0 را برای انجام آزمون بروش- پاگان اجرا می‌کنیم که نتیجه آن عبارت است از:

```
. xttest0

Breusch and Pagan Lagrangian multiplier test for random effects

        y[i,t] = Xb + u[i] + e[i,t]

        Estimated results:
                         |       Var     sd = sqrt(Var)
                ---------+-----------------------------
                       y |    .301299       .5489071
                       e |   .0085249       .0923303
                       u |   .0382377       .1955447

        Test:   Var(u) = 0
                             chi2(1) =  1465.55
                         Prob > chi2 =     0.0000
```

چون مقدار آماره بروش- پاگان که برابر با LM=۱۴۶۵/۵۵ است در ناحیه بحرانی قرار دارد، لذا فرضیهٔ صفر (وجود اثرات تصادفی) رد می‌شود.

آزمون هاسمن برای وجود اثرات تصادفی

مراحل آزمون هاسمن عبارت است از:

۱- مدل اثرات ثابت را برآورد کرده و نتایج آن را ذخیره می‌کنیم. بدین منظور دو فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
xtreg y x1 x2 x3, fe
estimates store fe
```

۲- مدل اثرات تصادفی را برآورد کرده و نتایج آن را ذخیره می‌کنیم. بدین منظور دو فرمان زیر را اجرا می‌کنیم:

```
xtreg y x1 x2 x3, re
estimates store re
```

۳- آماره هاسمن را با اجرای فرمان زیر حساب می‌کنیم:

```
hausman fe re
```

نتایج عبارت است از:


```
. hausman fe re

                 ---- Coefficients ----
             |      (b)          (B)            (b-B)     sqrt(diag(V_b-V_B))
             |       fe           re         Difference          S.E.
-------------+----------------------------------------------------------------
          x1 |   -.3217025    -.4203893        .0986868        .0186143
          x2 |    .6622498     .5549858         .107264        .0434669
          x3 |   -.6404829    -.6068402       -.0336428        .0151597
------------------------------------------------------------------------------
                           b = consistent under Ho and Ha; obtained from xtreg
            B = inconsistent under Ha, efficient under Ho; obtained from xtreg

    Test:  Ho:  difference in coefficients not systematic

                  chi2(3) = (b-B)'[(V_b-V_B)^(-1)](b-B)
                          =      302.80
                Prob>chi2 =      0.0000
                (V_b-V_B is not positive definite)
```

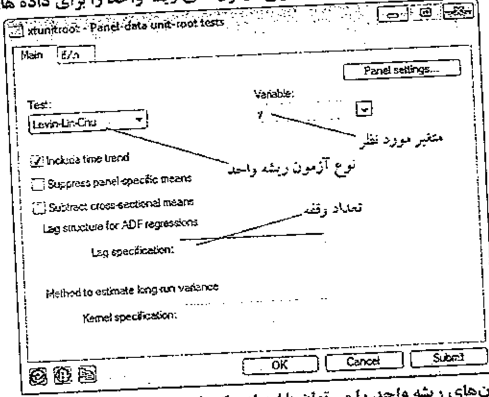
چون مقدار آماره هاسمن که برابر با ۳۰۲/۸۰ است در ناحیه بحرانی قرار دارد (احتمال کوچکتر از ۰/۰۵ است)، لذا فرضیه صفر (مناسب بودن مدل اثرات تصادفی) رد می‌شود.

آزمون ریشه واحد در داده‌های ترکیبی

برای انجام آزمون‌های ریشه واحد، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Statistics → Longitudinal/panel data → Unit-root tests

با اجرای فرمان فوق، پنجره زیر باز می‌شود که می‌توان انواع آزمون های ریشه واحد را برای داده های ترکیبی انجام داد:



از طرف دیگر، هر یک از آزمون‌های ریشه واحد را می‌توان با اجرای یک فرمان انجام داد:

لوین، لین و چو:

```
xtunitroot llc y, trend lags(p)
```

trend برای وجود روند و p تعداد وقفه‌ها است.

برایتونگ:

```
xtunitroot breitung y, trend lags(p)
```

هادری:

```
xtunitroot hadri, trend lags(p)
```

ایم، پسران و شین:

```
xtunitroot ips y, trend lags(p)
```

ADF- فیشر:

```
xtunitroot fisher y, dfuller lags(p)
```

PP- فیشر:

```
xtunitroot fisher y, pperron lags(p)
```

فصل بیست و سوم

متغیرهای وابسته محدود
(مدل‌های لاجیت و پروبیت)

۱-۲۳ مقدمه

در فصل هفتم متغیرهای مجازی را بررسی کردیم و دیدیم که یک متغیر توضیحی می‌تواند به‌صورت کیفی تعریف شود و مقادیر ۰ و ۱ بگیرد. هرچند که مشکل خاصی در تفسیر و تحلیل نتایج متغیرهای مجازی وجود ندارد ولی تفاوت‌هایی با متغیرهای معمولی دارد. در این فصل، بحث مشابهی را برای متغیر وابسته مطرح می‌کنیم که تحت عنوان متغیرهای وابستهٔ محدود می‌باشد. در این حالت، مقادیر متغیر وابسته محدود به ۰ و ۱ است و یا برابر با ۰، ۱، ۲ و... می‌باشد. علاوه بر این، متغیر وابسته ممکن است در اختیار کردن مقادیر خود، با محدودیت مواجه باشد. اینها موضوعاتی است که در این فصل و فصل بعدی بررسی خواهیم کرد.

به‌عنوان یک مثال ساده فرض کنید می‌خواهیم تأثیر عوامل مختلف بر اشتغال یا بیکاری (Y) را بررسی کنیم. بدین منظور افراد مورد مطالعه را با ۰ و ۱ مشخص می‌کنیم، بدین معنی که برای فرد شاغل $Y=1$ و برای فرد بیکار $Y=0$ است. از طرف دیگر، بیکاری تحت تأثیر عواملی از قبیل تحصیلات و آموزش، مهارت و سایر خصوصیات فردی قرار دارد. بنابراین، متغیر وابسته مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کند ولی متغیرهای توضیحی می‌توانند به‌طور معمول تعریف شوند.

به‌طور کلی، متغیر وابسته می‌تواند یک متغیر کیفی باشد که نتیجه تصمیم‌گیری‌های افراد را نشان می‌دهد. مثال‌هایی از این قبیل عبارتند از: فرد تصمیم دارد در بازار کار مشارکت کند یا نه، فرد تصمیم می‌گیرد مسکن بخرد یا نه (البته نتیجه چنین تصمیم‌هایی که در گذشته اتخاذ شده است، در حال حاضر بدین صورت است که مالک خانه است یا نه)، فرد به‌عنوان مصرف‌کننده تصمیم می‌گیرد از فروشگاه A خرید کند یا نه. هر یک از این تصمیمات و تصمیمات مشابه، وابسته به خصوصیات فردی است که این خصوصیات همان متغیرهای توضیحی می‌باشند.

هر یک از مثال‌های فوق بیانگر نوعی از تحلیل رگرسیون هستند که تاکنون با آن آشنا شده‌ایم. اما این مدل‌ها مسائل و مشکلات خاص خود را دارند. در هر یک از این موارد بایستی تصمیم یا پیامد موردنظر را به مجموعه‌ای از عوامل، مرتبط کنیم که مشابه تحلیل مرسوم رگرسیون است. پایه اصلی هر یک از این موارد را می‌توان در چارچوب کلی مدل‌های احتمال مورد بررسی قرار داد. بدین منظور فرض کنید می‌خواهیم وضعیت مشارکت (اشتغال) زنان را در بازار کار بررسی کنیم. اگر وضعیت اشتغال را با متغیر تصادفی Y نشان دهیم، آنگاه $Y=1$ بیانگر مشارکت در بازار کار (شاغل بودن) و $Y=0$ بیانگر عدم مشارکت (بیکاری) می‌باشد. در این صورت احتمال وقوع حادثه موردنظر (شاغل بودن) عبارت است از:

$$P\,(\text{شاغل بودن}) = P(Y=1) \tag{۲۳-۱}$$

احتمال مشارکت در بازار کار از سوی هر زن بستگی به خصوصیات وی دارد؛ مانند سن، تحصیلات، وضعیت تأهل، تعداد بچه‌ها، شاغل بودن یا نبودن همسر و غیره. لذا می‌توان احتمال فوق را تابعی از خصوصیات فردی (متغیرهای توضیحی) در نظر گرفت.

۲۳-۲ مدل‌های دوانتخابی

در بسیاری از موارد، متغیر وابسته (Y) مقدار ۰ و ۱ را اختیار می‌کند که بیانگر حالت دو انتخابی است: $Y=0$ عدم انتخاب موضوع موردنظر و $Y=1$ بیانگر انتخاب آن است. برای چنین مواردی می‌توان مدل احتمال زیر را معرفی کرد:

$$P(Y=1|\mathbf{x}_i)=F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) \qquad P(Y=0|\mathbf{x}_i)=1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) \tag{۲۳-۲}$$

بردار $\mathbf{x}'_i=[1\ X_{2i}\ \dots\ X_{Ki}]$ مجموعه عواملی است که احتمال وقوع Y وابسته به آنها است. $\boldsymbol{\beta}$ نیز ضرایب مربوط به تأثیرگذاری $\mathbf{x}_i$ را نشان می‌دهد. به‌عنوان مثال، اگر Y وضعیت اشتغال زنان را نشان دهد، آنگاه شاغل بودن تابعی از تحصیلات، سن، تأهل و تعداد بچه‌ها است. اینها متغیرهای تشکیل‌دهنده بردار $\mathbf{x}_i$ هستند. اینکه چه رابطه‌ای بین متغیرهای توضیحی (X_iها) و متغیر تصمیم‌گیری (Y_i) وجود دارد بستگی به شکل تابع $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$ دارد که ممکن است خطی یا غیرخطی باشد.

اگر بحث فوق را در چارچوب رگرسیون مطرح کنیم، آنگاه Y_i را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_i=E(Y|\mathbf{x}_i)+u_i=F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})+u_i \tag{۲۳-۳}$$

در واقع $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$ همان میانگین شرطی Y است. اگر برای تابع $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$ یک معادله خطی تعریف کنیم، آنگاه معادله (۲۳-۳) دقیقاً مشابه رگرسیون خطی چندمتغیره خواهد شد. به‌طور کلی برای $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$ توابع مختلفی معرفی می‌شود که در ادامه به بررسی آنها می‌پردازیم.

۲۳-۳ مدل احتمال خطی (LPM)[1]

در مدل احتمال خطی، برای $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$ یک معادله خطی تعریف می‌شود:

$$F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})=\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\dots+\beta_KX_{Ki} \tag{۲۳-۴}$$

$$\mathbf{x}'_i=[1\quad X_{2i}\quad \cdots\quad X_{Ki}]\ ,\ \boldsymbol{\beta}'=[\beta_1\quad \beta_2\quad \cdots\quad \beta_K]$$

مشابه تحلیل رگرسیون، امید ریاضی شرطی Y عبارت است از:

$$E(Y|\mathbf{x}_i)=F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})=\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\dots+\beta_KX_{Ki}$$

و مدل رگرسیون عبارت است از:

$$Y_i=E(Y|\mathbf{x})+u_i=\mathbf{x}'_i\boldsymbol{\beta}+u_i =\beta_1+\beta_2X_{2i}+\dots+\beta_KX_{Ki}+u_i \tag{۲۳-۵}$$

معادله فوق معروف به مدل احتمال خطی (LPM) است. مدل LMP یک مدل ساده است که مشابه تحلیل رگرسیون معمولی می‌باشد، اما دارای برخی کاستی‌ها و مشکلات است.

1- linear probability model

مدل (۵-۲۳) واریانس ناهمسانی دارد، زیرا با توجه به $u_i = Y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ می‌توان مقادیر u_i و احتمال‌های آن را به‌صورت زیر نوشت:

u_i	$1-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$	$-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$
مقادیر احتمال	$F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$	$1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$

(۶-۲۳)

بنابراین، امید ریاضی و واریانس u_i عبارت است از:

$$E(u_i|\mathbf{x}) = (1-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) + (-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})(1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})) = 0$$

$$\text{var}(u_i|\mathbf{x})E(u_i^2|\mathbf{x}) = (1-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2 F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) + (\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2(1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}(1-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \quad (۲۳\text{-}۷)$$

توجه شود که $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ است. بنابراین، (۴-۲۳) نشان می‌دهد که u_i واریانس ناهمسانی دارد، زیرا واریانس آن وابسته به متغیرهای توضیحی است.

مشکل دیگر مدل LPM این است که چون $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ بیانگر احتمال است، لذا بایستی بین ۰ و ۱ باشد. در تخمین‌های تجربی، ممکن است $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ خارج از فاصله $[0,1]$ قرار گیرد.

به‌هرحال، مشکل واریانس ناهمسانی را می‌توان با روش GLS حل نمود، اما مشکل دوم با توجه به خطی بودن مدل LPM، همچنان باقی است. بنابراین بایستی قیدی را روی تابع احتمال $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$ اعمال نماییم که بتواند آن را محدود به فاصله $[0,1]$ نماید.

برای حل مشکل واریانس ناهمسانی ابتدا بایستی واریانس u_i را برآورد کرده و سپس مدل (۵-۲۳) را تبدیل به مدلی بدون ناهمسانی واریانس نمود. بدین منظور ابتدا توجه کنید که برای Y_i جدول زیر را داریم:

Y_i	۰	۱
$P_i = P(y_i)$	$1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})$	$F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) = p_i$

$$E(Y|\mathbf{x}_i) = 0\times[1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) + 1\times F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})] = F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} = p_i$$
$$\text{var}(Y|\mathbf{x}_i) = F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})[1-F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})] = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}(1-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = p_i(1-p_i) \quad (۲۳\text{-}۸)$$

از طرف دیگر $\text{var}(Y|\mathbf{x}_i) = \text{var}(u_i)$ است. برای محاسبه واریانس، نیاز به p_i داریم که بایستی از تخمین آن استفاده کنیم که عبارت است از:

$$\hat{p}_i = \hat{Y}_i = \mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (۲۳\text{-}۹)$$

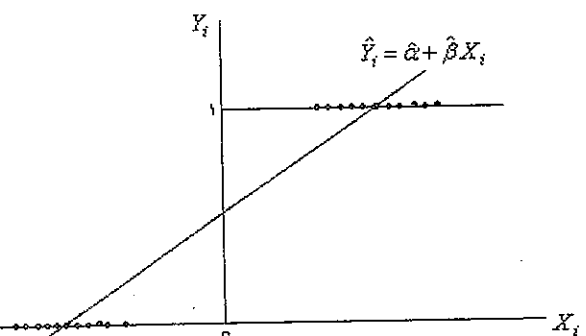
بنابراین، اگر Y_i را روی X_iها برازش کنیم یک معادله رگرسیون به‌دست می‌آید که با استفاده از آن می‌توان $\hat{p}_i$ و سپس واریانس Y_i یا u_i را که معادل با $\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)$ است، حساب نمود. با داشتن $\hat{p}_i$ طرفین معادله (۵-۲۳) را بر $\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}$ تقسیم کرده و آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}} = \beta_1\frac{1}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}} + \beta_2\frac{X_{2i}}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}} + \cdots + \beta_K\frac{X_{Ki}}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}} + \frac{u_i}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}}$$

$$Y_i^* = \beta_1 X_{i1}^* + \beta_2 X_{i2}^* + \cdots + \beta_K X_{Ki}^* + u_i^* \quad (۲۳\text{-}۱۰)$$

که $Y_i^* = \frac{Y_i}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}}$ ، $X_{ki}^* = \frac{X_{ki}}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}}$ و $u_i^* = \frac{u_i}{\sqrt{\hat{p}_i(1-\hat{p}_i)}}$ می‌باشد. واریانس u_i^* ثابت است و لذا می‌توان (۱۰-۲۳) را با روش OLS برآورد نمود. بدیهی است که اگر $\hat{p}_i$ برابر ۱ یا صفر باشد، آنگاه امکان تعریف (۱۰-۲۳) وجود ندارد.

برای حل مشکل دوم، بایستی احتمال‌ها یعنی $\hat{Y}_i$ یا $\hat{p}_i$ را محدود به فاصله $[0,1]$ کنیم. یک راه ساده آن است که هرگاه $\hat{Y}_i$ کوچکتر از صفر شد آن را برابر صفر و هرگاه بزرگتر از ۱ شد آن را برابر با ۱ قرار دهیم. در رگرسیون یک متغیره، برآورد مدل LPM به‌صورت $\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_i$ می‌باشد که در نمودار زیر نشان داده شده است.



نمودار ۱-۲۳: مدل احتمال خطی (LPM)

مثال ۱-۲۳: داده‌های فرضی X و Y به‌صورت زیر می‌باشد. فرض کنید Y وضعیت تملک خانه و X درآمد را نشان می‌دهد.

Y	X	Y	X
۱	۷۰	۰	۱۰
۱	۱۸۰	۱	۱۵۵
۰	۲۰	۱	۱۶۵
۱	۱۶۰	۰	۱۳۵
۱	۲۹۰	۰	۲۰
۱	۲۹۵	۱	۲۶۰
۰	۳۵	۱	۱۸۰
۱	۱۴۰	۰	۴۵
۰	۲۵	۱	۱۳۰
۱	۲۴۰	۱	۱۴۵
۱	۳۰۰	۱	۲۲۰
۰	۵	۱	۱۹۵
۱	۲۱۰	۰	۱۰
۱	۱۶۰	۱	۱۶۰
۱	۱۰۰	۰	۴۵
۰	۱۰	۱	۱۴۵
۱	۱۴۰	۱	۲۲۰
۱	۱۷۰	۱	۱۹۵
۰	۳۵	۱	۲۳۵
۱	۳۶۰	۱	۱۵۰
۱	۲۱۰	۱	۱۲۰
۰	۱۵	۱	۲۰۰
۱	۱۲۵	۱	۱۴۰
۱	۲۸۰	۱	۱۲۰
۱	۲۲۰	۰	۱۵

برآورد مدل LPM به‌صورت زیر است:

$$\hat{Y}_i = ۰/۱۲۷ + ۰/۰۰۴۱۷X_i \quad , \quad R^۲ = ۰/۶۵ \quad , \quad F = ۰/۸۸$$

همان‌طور که گفته شد، معادله فوق دارای واریانس ناهمسانی است که برای رفع آن بایستی از روش GLS استفاده نمود. بدین منظور نیاز به برآورد واریانس u_i داریم. واریانس u_i طبق (۷-۲۳) و (۹-۲۳) برابر است با:

$$\hat{\sigma}_i^۲ = \hat{p}_i(۱-\hat{p}_i) = \hat{Y}_i(۱-\hat{Y}_i)$$

$\hat{Y}_i$ را به‌ازای X_i های مختلف از معادله $\hat{Y}_i = ۰/۱۲۷ + ۰/۰۰۴۱۷X_i$ محاسبه کرده و سپس $\hat{\sigma}_i^۲$ و $\hat{\sigma}_i$ را به‌دست می‌آوریم که نتایج آن در جدول زیر ارائه شده است. ارقام حذف شده به خاطر آن است که احتمال نمی‌تواند منفی و بزرگ‌تر از ۱ باشد.

Y_i	$\hat{Y}_i$	$۱-\hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i(۱-\hat{Y}_i)$	$\hat{\sigma}_i$	Y_i	$\hat{Y}_i$	$۱-\hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i(۱-\hat{Y}_i)$	$\hat{\sigma}_i$
۱	۰/۴۱۹	۰/۵۸۱	۰/۲۴۳	۰/۴۹۳	۰	۰/۱۶۹	۰/۸۳۱	۰/۱۴۰	۰/۳۷۴
۱	۰/۸۷۸	۰/۱۲۲	۰/۱۰۷	۰/۳۲۸	۱	۰/۷۷۳	۰/۲۲۷	۰/۱۷۵	۰/۴۱۹
۰	۰/۲۱۰	۰/۷۹۰	۰/۱۶۶	۰/۴۰۸	۱	۰/۸۱۵	۰/۱۸۵	۰/۱۵۱	۰/۳۸۸
۱	۰/۷۹۴	۰/۲۰۶	۰/۱۶۳	۰/۴۰۴	۰	۰/۶۹۰	۰/۳۱۰	۰/۲۱۴	۰/۴۶۳
۱	۱/۳۳۶	−۰/۳۳۶			۰	۰/۲۱۰	۰/۷۹۰	۰/۱۶۶	۰/۴۰۸
۱	۱/۳۵۷	−۰/۳۵۷			۱	۱/۲۱۱	−۰/۲۱۱		
۰	۰/۲۷۳	۰/۷۲۷	۰/۱۹۸	۰/۴۴۵	۱	۰/۸۷۸	۰/۱۲۲	۰/۱۰۷	۰/۳۲۸
۱	۰/۷۱۱	۰/۲۸۹	۰/۲۰۶	۰/۴۵۳	۰	۰/۳۱۵	۰/۶۸۵	۰/۲۱۶	۰/۴۶۴
۰	۰/۲۳۱	۰/۷۶۹	۰/۱۷۸	۰/۴۲۲	۱	۰/۶۲۷	۰/۳۷۳	۰/۲۳۴	۰/۴۸۳
۱	۱/۱۲۸	−۰/۱۲۸			۱	۰/۷۳۲	۰/۲۶۸	۰/۱۹۶	۰/۴۴۳
۱	۱/۳۷۸	۰/۳۷۸			۱	۱/۰۴۴	−۰/۰۴۴		
۰	۰/۱۴۸	۰/۸۵۲	۰/۱۲۶	۰/۳۵۵	۱	۰/۹۴۰	۰/۰۶۰	۰/۰۵۶	۰/۲۳۷
۱	۱/۰۰۳	−۰/۰۰۳			۰	۰/۱۶۹	۰/۸۳۱	۰/۱۴۰	۰/۳۷۴
۱	۰/۷۹۴	۰/۲۰۶	۰/۱۶۳	۰/۴۰۴	۱	۰/۷۹۴	۰/۲۰۶	۰/۱۶۳	۰/۴۰۴
۱	۰/۵۵۴	۰/۴۵۶	۰/۲۴۸	۰/۴۹۸	۰	۰/۳۱۵	۰/۶۸۵	۰/۲۱۶	۰/۴۶۴
۰	۰/۱۶۹	۰/۸۳۱	۰/۱۴۰	۰/۳۷۴	۱	۰/۷۳۲	۰/۲۶۸	۰/۱۹۶	۰/۴۴۳
۱	۰/۷۱۱	۰/۲۸۹	۰/۲۰۶	۰/۴۵۳	۱	۱/۰۴۴	−۰/۰۴۴		
۱	۰/۸۳۶	۰/۱۶۴	۰/۱۳۷	۰/۳۷۰	۱	۰/۹۴۰	۰/۰۶۰	۰/۰۵۶	۰/۲۳۷
۰	۰/۲۷۳	۰/۷۲۷	۰/۱۹۸	۰/۴۴۵	۱	۱/۱۰۷	−۰/۱۰۷		
۱	۱/۲۱۱	−۰/۲۱۱			۱	۰/۷۵۳	۰/۲۴۸	۰/۱۸۶	۰/۴۳۳
۱	۱/۰۰۳	−۰/۰۰۳			۱	۰/۶۲۷	۰/۳۷۳	۰/۲۳۴	۰/۴۸۳
۱	۰/۱۹۰	۰/۸۱۰	۰/۱۵۴	۰/۳۹۲	۱	۰/۹۶۱	۰/۰۳۹	۰/۰۳۷	۰/۱۹۴
۱	۰/۶۴۸	۰/۳۵۲	۰/۲۲۸	۰/۴۷۸	۱	۰/۷۱۱	۰/۲۸۹	۰/۲۰۶	۰/۴۵۳
۱	۱/۲۹۵	−۰/۲۹۵			۱	۰/۶۲۷	۰/۳۷۳	۰/۲۳۴	۰/۴۸۳
۱	۱/۰۴۴	−۰/۰۴۴			۰	۰/۱۹۰	۰/۸۱۰	۰/۱۵۴	۰/۳۹۲

حال معادله زیر را برآورد می‌کنیم:

$$\frac{Y_i}{\hat{\sigma}_i} = \frac{\alpha}{\hat{\sigma}_i} + \beta\frac{X_i}{\hat{\sigma}_i} + \frac{u_i}{\hat{\sigma}_i}$$

نتیجهٔ تخمین عبارت است از:

$$\left(\frac{\hat{Y}_i}{\hat{\sigma}_i}\right) = -۰/۰۳۴\left(\frac{۱}{\hat{\sigma}_i}\right) + ۰/۰۰۵۹\left(\frac{X_i}{\hat{\sigma}_i}\right) \quad ; \quad R^۲ = ۰/۸۲$$

برآورد مدل LPM در Eviews

فایل data15

برآورد مدل LPM با Eviews مانند معادلات رگرسیون معمولی است که می‌توان آنها را با دستور LS Y C X برآورد نمود که نتایج زیر به‌دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: PROBIT2::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 01/30/13 Time: 14:20
Sample: 1 50
Included observations: 50
White heteroskedasticity-consistent standard errors & covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.127433	0.074253	1.716190	0.0926
X	0.004173	0.000418	9.975569	0.0000

R-squared	0.647065	Mean dependent var	0.720000
Adjusted R-squared	0.639712	S.D. dependent var	0.453557
S.E. of regression	0.272243	Akaike info criterion	0.274937
Sum squared resid	3.557589	Schwarz criterion	0.351418
Log likelihood	-4.873429	Hannan-Quinn criter.	0.304062
F-statistic	88.00222	Durbin-Watson stat	2.112323
Prob(F-statistic)	0.000000		

برای رفع واریانس ناهمسانی از منوی proc گزینه forecast را انتخاب کرده و Yf را حساب می‌کنیم که همان $\hat{Y}_i$ است. سپس با دستور genr متغیر $W_i = \sqrt{\hat{Y}_i(1-\hat{Y}_i)}$ را که برابر با $\hat{\sigma}_i$ است حساب می‌کنیم.

حال در پنجرهٔ فوق (پنجرهٔ Equation) با انتخاب مسیر زیر، بخش Options را باز می‌کنیم:

Estimate → Equation Estimation → options

Equation Estimation

Specification | Options

Coefficient covariance matrix: Estimation default
d.f. Adjustment
Weights — Type: None; Weight series; Scaling: EViews default
ARMA options — Starting coefficient values: OLS/TSLS; Backcast MA terms
Iteration control — Max iterations: 500; Convergence: 0.0001; Display settings
Derivatives — Select method to favor: Accuracy; Speed; Use numeric only
OK | Cancel

در پنجرهٔ فوق در قسمت weights (وزن‌ها) در مقابل گزینهٔ type عبارت Inverse std. dev. را انتخاب و در ذیل آن در قسمت weight series وزن موردنظر را به‌صورت $\frac{1}{W}$ وارد می‌کنیم. با انتخاب OK نتایج تخمین به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: PROBIT2::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 01/30/13 Time: 14:29
Sample (adjusted): 1 48
Included observations: 37 after adjustments
Weighting series: 1/W
Weight type: Inverse standard deviation (EViews default scaling)
White heteroskedasticity-consistent standard errors & covariance

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.034358	0.042034	-0.817403	0.4192
X	0.005890	0.000345	17.09076	0.0000

Weighted Statistics

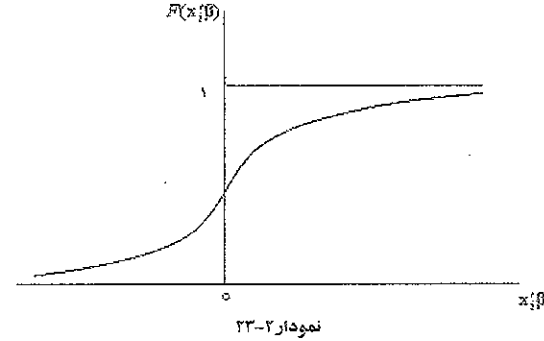
R-squared	0.819231	Mean dependent var	0.639304
Adjusted R-squared	0.814086	S.D. dependent var	0.564274
S.E. of regression	0.211363	Akaike info criterion	-0.217939
Sum squared resid	1.563605	Schwarz criterion	-0.130862

۲۳-٤ نظریه مطلوبیت تصادفی

در مدل احتمال خطی (LPM) دیدیم که یکی از مشکلات آن این است که هرگاه $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ افزایش می‌یابد احتمال Y_i ممکن است بزرگتر از ۱ و هرگاه که $F(\mathbf{x}_i,\boldsymbol{\beta})=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ کاهش می‌یابد ممکن است کوچکتر از صفر گردد. برای حل این مشکل مدل‌های دیگری معرفی شده است که بتواند شرایط زیر را تأمین کند:

$$\lim_{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\to\infty} P(Y=1|\mathbf{x}_i)=\lim_{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\to\infty} F(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=1$$
$$\lim_{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\to-\infty} P(Y=0|\mathbf{x}_i)=\lim_{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}\to-\infty} F(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=0 \qquad (۲۳-۱۱)$$

بدین ترتیب تابعی از $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ معرفی می‌شود که بتواند شرایط فوق را تأمین نماید. نمودار چنین تابعی به‌صورت زیر می‌باشد:



نمودار ۲-۲۳

برای حل این مشکلات، اولاً نیاز به یک معادله رگرسیون و ثانیاً نیاز به یک تابع احتمال داریم. نظریهٔ مطلوبیت تصادفی روشی است که بر مبنای آن می‌توان این دو موضوع را مرتبط کرده و مشکلات مدل LPM را حل نمود.

مطلوبیت تصادفی از نظریهٔ انتخاب استفاده می‌کند که می‌توان آن را در یک چارچوب «دو انتخابی» توصیف نمود. فرض کنید که هر فرد دو انتخاب دارد. بدیهی است که وی گزینه‌های خود را به‌گونه‌ای انتخاب خواهد کرد که مطلوبیتش (U_i) حداکثر شود. این موضوع برای فرد iام عبارت است از:

U_{1i} مطلوبیت حاصل از گزینه ۱
U_{0i} مطلوبیت حاصل از گزینه ۰

از طرف دیگر فرض کنید که اطلاعات مربوط به $i=1,\cdots,N$ فرد را داریم. اگر $U_{1i} \geq U_{0i}$ یا $U_{1i}-U_{0i} \geq 0$ باشد، آنگاه گزینه ۱ انتخاب خواهد شد. برای ادامه بحث، Y_i^* را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$Y_i^* = U_{1i} - U_{0i} \qquad (۲۳-۱۲)$$

اگر $Y_i^* \geq 0$ باشد، فرد iام گزینه ۱ و اگر $Y_i^* < 0$ باشد، گزینه ۰ را انتخاب خواهد کرد.

از آنجا که مطلوبیت، ترجیحات فرد را منعکس می‌کند، لذا مقداری که Y_i^* اختیار می‌کند، بستگی به خصوصیات فرد دارد. به‌عنوان مثال، اینکه زنان چقدر در بازار کار مشارکت دارند و مایل به اشتغال هستند، بستگی به ترجیحات آنها دارد. بدین معنی که از کار کردن مطلوبیت

بیشتری می‌برند یا از کار نکردن. لذا در چنین شرایطی، مقدار Y_i^* بستگی به خصوصیاتی مانند سن، تحصیلات، تعداد بچه، شغل همسر و غیره دارد. بنابراین برای Y_i^* می‌توان یک معادله به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$Y_i^* = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_K X_{Ki} + u_i \qquad (۲۳-۱۳)$$
$$= \sum_{k=1}^{K} \beta_k X_{ki} + u_i \ ; \ X_{1i} = 1$$

و یا

$$Y_i^* = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \ , \ \mathbf{x}_i' = [1 \ \ X_{2i} \ \cdots \ X_{Ki}] \ , \ \boldsymbol{\beta}' = [\beta_1 \ \cdots \ \beta_K] \qquad (۲۳-۱۴)$$

بنابراین در ادامه بحث، توجه داشته باشیم که $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ برابر با $\beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_K X_{Ki}$ است.

مدل فوق از لحاظ تئوری مشکلی ندارد، اما برای کاربردهای عملی بایستی آن را تخمین بزنیم. مشکل اصلی برای تخمین معادله فوق این است که Y_i^* یک متغیر غیرقابل مشاهده است.

برای حل این مشکل، متغیر قابل مشاهدهٔ Y_i را معرفی می‌کنیم. مثلاً Y_i مشارکت زنان در بازار کار است. اگر $Y_i = 1$ باشد، فرد i در بازار کار مشارکت دارد (یعنی شاغل است) و اگر $Y_i = 0$ باشد، فرد i در بازار کار مشارکت ندارد (یعنی بیکار است). لذا Y_i برای فرد iام قابل مشاهده است. رابطهٔ Y_i و Y_i^* به‌صورت زیر است:

۱- اگر $Y_i = 1$ باشد بدان معنا است که $Y_i^* \geq 0$ است.
۲- اگر $Y_i = 0$ باشد بدان معنا است که $Y_i^* < 0$ است.

بنابراین یک مدل اقتصادسنجی داریم که شامل دو جزء است:

۱- یک معادلهٔ رگرسیون برای متغیر غیرقابل مشاهدهٔ Y_i^* و
۲- یک معادله برای مرتبط ساختن متغیر غیرقابل مشاهدهٔ Y_i^* و متغیر قابل مشاهدهٔ Y_i.

یک راه معقول برای برقراری ارتباط Y_i^* و Y_i این است که از مفهوم احتمال استفاده کنیم:

$$P(Y_i = 1) = P(Y_i^* \geq 0) = P(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \geq 0) = P(u_i \geq -\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \qquad (۲۳-۱۵)$$

در مثال مذکور، احتمال مشارکت در بازار کار معادل با آن است که مطلوبیت داشتن شغل در مقایسه با نداشتن شغل (Y_i^*)، مثبت باشد و آن نیز معادل است با اینکه متغیر تصادفی u_i بزرگتر از $-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ باشد.

حال بایستی برای u_i یک تابع احتمال تعریف کرده و خصوصیات آن را بررسی نمود. بدین منظور، معمولاً از توابع نرمال و لاجستیک استفاده می‌کنند که معروف به مدل پروبیت و مدل لاجیت هستند.

۵-۲۳ مدل پروبیت

فرض کنید u_i توزیع نرمال داشته باشد. برای هر متغیری مانند Z که تابع چگالی احتمال آن نرمال استاندارد باشد می‌توان تابع توزیع یا تابع احتمال تجمعی را به‌صورت زیر معرفی کرد:

$$P(Z \le z)=\int_{-\infty}^{z}\varphi(z)dz=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(z) \qquad (۲۳-۱۶)$$

$\varphi(z)$ تابع چگالی و $\Phi(z)$ تابع توزیع را نشان می‌دهد.

اگر u_i توزیع نرمال داشته باشد، آنگاه خواهیم داشت[1]:

$$P(Y_i=1)=P(Y_i^*\ge 0)=P(u_i\ge -\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=1-P(u_i<\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$$
$$=1-\Phi(-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \qquad (۲۳-۱۷)$$

از طرف دیگر، رابطه زیر برقرار است:

$$P(Y_i=0)=P(Y_i^*<0)=1-P(Y_i=1)=1-\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=\Phi(-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) \qquad (۲۳-۱۸)$$

در اینجا با دو موضوع دیگر مواجه‌ایم: یکی تخمین $\boldsymbol{\beta}$ و دیگری تفسیر نتایج. ابتدا تخمین و سپس تفسیر نتایج را بررسی می‌کنیم.

برای تخمین ضرایب از روش حداکثر درستنمایی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که متغیر تصادفی Y_i توزیع دونقطه‌ای دارد:

Y_i	۰	۱
p_i	$1-\Phi_i$	Φ_i

(۲۳-۱۹)

که $\Phi_i=\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ است. توزیع مذکور را به صورت زیر نیز می‌توان نشان داد:

$$p_i=P(Y_i|\mathbf{x}_i)=\Phi_i^{Y_i}(1-\Phi_i)^{1-Y_i}\ ,\quad Y_i=0,1 \qquad (۲۳-۲۰)$$

تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\boldsymbol{\beta})=\prod_{i=1}^{N}P(Y_i|\mathbf{x}_i)=\prod_{i=1}^{N}\Phi_i^{Y_i}(1-\Phi_i)^{1-Y_i}$$

۱- توجه شود که نرمال استاندارد نسبت به صفر، قرینه است و لذا شرط $\Phi(z)=1-\Phi(-z)$ برقرار است.

و لگاریتم آن عبارت است از:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{N}[Y_i\ln\Phi_i+(1-Y_i)\ln(1-\Phi_i)]$$
$$=\sum_{i=1}^{N}Y_i\ln\Phi_i+\sum_{i=1}^{N}(1-Y_i)\ln(1-\Phi_i) \qquad (۲۳-۲۱)$$

با توجه به اینکه $Y_i=0,1$ است، می‌توان تابع درستنمایی را به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\ln L=\sum_{Y_i=0}\ln(1-\Phi_i)+\sum_{Y_i=1}\ln\Phi_i \qquad (۲۳-۲۲)$$

برای به‌دست آوردن تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی از (۲۱-۲۳) نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ مشتق می‌گیریم (در اینجا از رابطهٔ $\frac{d\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{d\boldsymbol{\beta}}=\varphi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\mathbf{x}_i$ استفاده می‌کنیم):

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i\frac{\varphi_i}{\Phi_i}-(1-Y_i)\frac{\varphi_i}{1-\Phi_i}\right]\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \qquad (۲۳-۲۳)$$

با استفاده از الگوریتم نیوتن[1]، می‌توان $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ را به‌صورت زیر به‌دست آورد:

۱- برای یافتن نقطه بهینهٔ تابع $f(x)$ ابتدا به ازای یک مقدار معین مانند x_n، تغییرات دلخواه x را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta x=x-x_n\Rightarrow x=x_n+p\ ;\ p=\Delta x$$

و لذا $f(x)=f(x_n+p)$ است. از طرف دیگر بسط مرتبهٔ دوم $f(x)$ حول x_n عبارت است از:

$$f(x)=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n)+\frac{f''(x_n)}{2}(x-x_n)^2$$

$x-x_n$ را با p نشان داده و به‌جای آن قرار می‌دهیم:

$$f(x)=f(x_n)+f'(x_n)p+\frac{f''(x_n)}{2}p^2$$

اگر تابع $f(x)$ به ازای x^* حداکثر باشد، خواهیم داشت:

$$f(x^*)=\max_x f(x)\equiv\max_p f(x_n+p)=\max_p\left[f(x_n)+f'(x_n)p+\frac{f''(x_n)}{2}p^2\right]$$

شرط حداکثر شدن تابع فوق نسبت به p عبارت است از:

$$\frac{df(x_n+p)}{dp}=f'(x_n)+f''(x_n)p=0\Rightarrow p=-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

بنابراین با توجه به رابطه $x=x_n+p$ می‌توان آن را به صورت مرحله‌ای نوشت:

$$x_{n+1}=x_n+p\Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

$$\hat{\beta}_{n+1}=\hat{\beta}_n-\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta d\beta'}\right]^{-1}_{\beta=\hat{\beta}_n}\left[\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right]_{\beta=\hat{\beta}_n} \qquad (۲۳-۲۴)$$

تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی که از روش فوق به‌دست می‌آید را با $\hat{\beta}_{ML}$ نشان می‌دهیم. $\hat{\beta}_{ML}$ توزیع مجانبی نرمال با خصوصیات زیر دارد[1]:

$$\hat{\beta}_{ML}\sim N\left(\beta,\mathbf{I}(\beta)^{-1}\right) \qquad (۲۳-۲۵)$$

$\mathbf{I}(\beta)$ معروف به ماتریس اطلاعات[2] است که برابر است با:

$$\mathbf{I}(\beta)=-E[\mathbf{H}(\beta)] \qquad (۲۳-۲۶)$$

$\mathbf{H}(\beta)$ ماتریس هشین تابع درستنمایی است که مؤلفه‌های آن، مشتق‌های جزئی مرتبه دوم می‌باشد:

$$\mathbf{H}(\beta)=\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'} \qquad (۲۳-۲۷)$$

در اینجا از قضیهٔ کرامر- رائو استفاده می‌شود.[3] این قضیه بیانگر آن است که واریانس تخمین‌زنندهٔ ناریب برای β، حداقل برابر است با:

$$\text{var}(\hat{\beta})\geq\left(-E[\mathbf{H}(\beta)]\right)^{-1}=\mathbf{I}(\beta)^{-1} \qquad (۲۳-۲۸)$$

هر تخمین‌زننده‌ای که شرط فوق را به‌صورت تساوی تأمین کند، کارا است و بهترین تخمین‌زنندهٔ ناریب خواهد بود. تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی چنین خاصیتی را دارد.

ماتریس $\mathbf{H}$ تقعر تابع درستنمایی را نشان می‌دهد. زیرا مشتق مرتبهٔ دوم، معیاری برای اندازه‌گیری تقعر است. برای اثبات واریانس $\hat{\beta}_{ML}$ ابتدا مشتق مرتبهٔ اول تابع درستنمایی را با $l'(\beta)=\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}$ نشان داده و آن را حول نقطهٔ بهینه با تقریب مرتبهٔ اول می‌نویسیم:

$$l'(\hat{\beta}_{ML})-l'(\beta)\cong\frac{\partial l'(\beta)}{\partial\beta'}(\hat{\beta}_{ML}-\beta)$$

از آنجاکه $l'(\hat{\beta}_{ML})=0$ است، خواهیم داشت:

$$\hat{\beta}_{ML}-\beta=-\left[\frac{\partial l'(\beta)}{\partial\beta'}\right]^{-1}l'(\beta)=-\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]^{-1}\left[\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right]$$

۱- فصل نهم بخش ۱۱-۹ را ببینید.

2- information matrix

۳- فصل نهم بخش ۱۳-۹ را ببینید.

با استفاده از رابطهٔ فوق، واریانس $\hat{\beta}_{ML}$ برابر است با:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{ML})=E\left[(\hat{\beta}_{ML}-\beta)(\hat{\beta}_{ML}-\beta)'\right]$$

$$=E\left\{\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]^{-1}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta'}\right)\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]^{-1}\right\}$$

$$=E\left\{[-\mathbf{I}(\beta)]^{-1}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta'}\right)[-\mathbf{I}(\beta)]^{-1}\right\} \qquad (۲۳-۲۹)$$

بنابراین، (۲۹-۲۳) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت[1]:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{ML})=[\mathbf{I}(\beta)]^{-1}=-\{E[\mathbf{H}(\beta)]\}^{-1}=-\left\{E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]\right\}^{-1} \qquad (۲۳-۳۰)$$

بدین‌ترتیب، واریانس تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برابر با «منفی ماتریس هشین انتظاری» است. اما در عمل از ماتریس هشین واقعی استفاده می‌شود. در فصل نهم دیدیم که واریانس $\hat{\beta}_{ML}$ به‌طور مجانبی برابر است با:

$$\text{var}(\hat{\beta}_{ML})=[\mathbf{I}(\beta)]^{-1}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta'}\right)[\mathbf{I}(\beta)]^{-1} \qquad (۲۳-۳۱)$$

که معروف به واریانس مستحکم $\hat{\beta}_{ML}$ می‌باشد که تخمین آن عبارت است از:

$$\widehat{\text{var}}(\hat{\beta}_{ML})=\hat{\mathbf{H}}^{-1}\hat{\mathbf{B}}\hat{\mathbf{H}}^{-1} \qquad (۲۳-۳۲)$$

که $\mathbf{B}=\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta'}\right)$ می‌باشد.

به‌هرحال ماتریس $\mathbf{H}$ برای مدل پروبیت با مشتق‌گیری از (۲۳-۲۳) نسبت‌به β به‌دست می‌آید:

۱- در فصل نهم رابطه زیر اثبات شده است:

$$E\left[\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\beta'}\right]=E\left[\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial\beta'}\right)\right]$$

که عبارت است از:[1]

$$\mathbf{H}=\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i\left[Y_i\frac{\varphi_i+\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\Phi_i^2}-(1-Y_i)\frac{\varphi_i-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}(1-\Phi_i)}{(1-\Phi_i)^2}\right]\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i' \qquad (۲۳-۳۳)$$

از طرف دیگر ثابت می‌شود که رابطه مجانبی زیر برقرار است:

$$\operatorname{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML})=\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{\varphi_i^2}{\Phi_i(1-\Phi_i)}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right]^{-1}$$

تفسیر نتایج مدل پروبیت

در هر معادله رگرسیون، $\boldsymbol{\beta}$ بیانگر اثرات نهایی متغیرهای توضیحی بر متغیر وابسته است. در راستای این مباحث دیدیم که متغیر وابسته بیانگر مطلوبیت است که غیرقابل مشاهده است. اما دیدیم که در مدل پروبیت $P(Y_i=1)=\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ است. با تخمین $\boldsymbol{\beta}$، این احتمال را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$p_i=P(Y_i=1|\mathbf{x}_i)=\Phi(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})=\Phi(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2i}+\dots+\hat{\beta}_KX_{Ki}) \qquad (۲۳-۳۴)$$

برای سادگی بحث، فرض کنید که فقط یک متغیر داشته باشیم و ضرایب $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_2$ به‌ترتیب برابر با ۰/۸- و ۰/۰۱ باشند.

$$p_i=P(Y_i=1|X_i)=\Phi(-0/8+0/01X_i)^{5}$$

۱- در توزیع نرمال که $\varphi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ است، مشتق نسبت به z برابر با $\varphi'(z)=-z\varphi(z)$ است و لذا خواهیم داشت:

$$\varphi'(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=\frac{d\varphi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{d\boldsymbol{\beta}'}=\left[\frac{d\varphi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{d(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right]\frac{d(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{d\boldsymbol{\beta}'}=[(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\varphi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]\mathbf{x}_i'$$

همچنین با توجه به $\frac{d\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}{d\boldsymbol{\beta}}=\varphi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\mathbf{x}_i'$، مشتق مرتبه دوم به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\mathbf{H}=\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\left\{\frac{\partial \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right\}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i\frac{\varphi_i}{\Phi_i}-(1-Y_i)\frac{\varphi_i}{1-\Phi_i}\right]\mathbf{x}_i\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\left[Y_i\frac{\varphi_i'\Phi_i-\varphi_i^2\mathbf{x}_i'}{\Phi_i^2}-(1-Y_i)\frac{\varphi_i'(1-\Phi_i)-\varphi_i(-\varphi_i\mathbf{x}_i')}{(1-\Phi_i)^2}\right]\mathbf{x}_i$$

اگر به‌جای φ' قرار داده و آن را ساده کنیم، رابطه (۲۱-۲۳) به‌دست می‌آید.

فرض کنید که Y_i بیانگر وضعیت تملک خانه باشد که $Y_i=1$ به‌معنی داشتن خانه و $Y_i=0$ به معنی نداشتن خانه است. X_i نیز درآمد فرد iام را نشان می‌دهد. احتمال داشتن خانه به‌ازای سطح درآمدهای مختلف برابر است با:

$$P(Y_i=1|X_i=40)=\Phi(-0/8+0/01(40))=\Phi(-0/4)=0/345$$

$$P(Y_i=1|X_i=80)=\Phi(-0/8+0/01(80))=\Phi(0)=0/5$$

$$P(Y_i=1|X_i=150)=\Phi(-0/8+0/01(150))=\Phi(0/7)=0/758$$

$$P(Y_i=1|X_i=200)=\Phi(-0/8+0/01(200))=\Phi(1/2)=0/885$$

نتایج فوق نشان می‌دهد که با افزایش درآمد، احتمال داشتن خانه، افزایش می‌یابد. فردی که درآمد او برابر با ۴۰ باشد، احتمال اینکه صاحب خانه باشد فقط ۰/۳۴ است، در حالی که فردی با درآمد ۲۰۰، احتمال اینکه صاحب خانه باشد حدود ۰/۸۸ است.

برای بررسی اثرات نهایی، اثر تغییر در X_i ها را بر Y اندازه‌گیری می‌کنیم. در این مدل‌ها که Y^* یک متغیر کیفی و غیرقابل مشاهده است، $\boldsymbol{\beta}$ اثر تغییرات X_i ها را اندازه‌گیری می‌کند. اگر $\boldsymbol{\beta}$ مثبت باشد، در این صورت مطلوبیت انتخاب گزینه ۱ همراه با افزایش $\mathbf{x}_i$، افزایش می‌یابد. اما سؤال این است که در واکنش به تغییر $\mathbf{x}_i$ X_i احتمال انتخاب گزینه ۱ چقدر افزایش می‌یابد. بدیهی است که $\boldsymbol{\beta}$ نمی‌تواند جوابگوی این سؤال باشد. اثر تغییر $\mathbf{x}_i$ بر احتمال اینکه $Y_i=1$ باشد، عبارت است از:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{d\mathbf{x}_i}=\frac{d\Phi(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})}{d(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})}\frac{d(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})}{d\mathbf{x}_i'}=\varphi(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad (۲۳-۳۵)$$

به‌عنوان مثال اثر تغییر در X_{ki} بر $P(Y_i=1)$ برابر است با:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_{ki}}=\varphi(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2i}+\dots+\hat{\beta}_KX_{Ki})\hat{\beta}_k \quad , \quad k=1,2,\dots,K \qquad (۲۳-۳۶)$$

اگر به مثال قبلی برگردیم اثر تغییر در درآمد بر احتمال تملک خانه برابر است با:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=\varphi(-0/8+0/01X_i)\,0/01$$

نتیجهٔ فوق نشان می‌دهد که به‌ازای مقادیر مختلف X، اثر نهایی X بر Y نیز تغییر می‌کند. یک معیار متوسط برای بیان اثر تغییرات X بر Y آن است که رابطه فوق را به‌ازای مقدار متوسط X حساب کنیم.

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_{ki}}=\varphi(\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2\overline{X}_2+\ldots+\hat{\beta}_K\overline{X}_K)\hat{\beta}_k \quad ; \quad k=1,2,\ldots,K \qquad (23\text{-}37)$$

در مثال قبلی اگر متوسط درآمد برابر با ۱۵۰ باشد، آنگاه احتمال داشتن خانه برابر با ۰/۷۵۸ است. حال اثر تغییر در درآمد بر تملک خانه برای یک فرد متوسط برابر است با:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=\varphi(-0/8+0/01\overline{X})0/01$$
$$=\varphi(-0/8+0/01\times150)\times0/01=\varphi(0/7)0/01=0/3123(0/01)=0/031$$

بنابراین اگر درآمد یک فرد متوسط، افزایش یابد، احتمال صاحب‌خانه شدن او حدود ۳/۱ درصد افزایش می‌یابد. اما کسی که درآمدش کمتر از متوسط است مثلاً برابر با ۴۰ است، احتمال خانه دار شدن او با افزایش درآمد، حدود ۳/۷ درصد افزایش خواهد یافت، زیرا:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=\varphi(-0/8+0/01\times40)0/01=\varphi(-0/4)0/01=0/3683(0/01)=0/03683$$

بیشترین تأثیر درآمد بر احتمال تملک خانه به‌ازای $\varphi(0)$ به‌دست می‌آید. زیرا در توزیع نرمال استاندارد $\varphi(0)$ بیشترین مقدار را دارد که برابر با $\varphi(0)=0/3989$ می‌باشد (تقریباً برابر با ۰/۴). بنابراین بیشترین تأثیری که X_{ki} می‌تواند بر احتمال $Y_i=1$ داشته باشد برابر است با:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_{ki}}=\varphi(0)\hat{\beta}_k\cong0/4\hat{\beta}_k \quad , \quad k=1,2,\ldots,K \qquad (23\text{-}38)$$

بنابراین بیشترین تأثیر مربوط به حالتی است $x_i'\hat{\beta}=0$ یا $\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2i}+\ldots+\hat{\beta}_KX_{Ki}=0$ باشد. به‌عنوان مثال در مثال تملک خانه، افزایش درآمد می‌تواند احتمال داشتن خانه را حداکثر ۴ درصد افزایش دهد، زیرا:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=\varphi(0)0/01=0/4(0/01)=0/04$$

$\varphi(0)$ به‌ازای $-0/8+0/01X_i=0$ به‌دست می‌آید که سطح درآمد $X_i=80$ می باشد. این بدان که بیشترین تأثیر درآمد بر احتمال تملک خانه در سطح درآمد ۸۰ می‌باشد. همچنین اگر کسی درآمد خیلی پایین یا درآمد خیلی بالا داشته باشد، اثر تغییر درآمدش بر احتمال تملک خانه تقریباً صفر است. مثلاً فردی که درآمدش برابر با ۵ باشد، اثر افزایش درآمدش بر احتمال صاحب خانه شدن فقط $\varphi(-0/8+0/01(5))(0/01)=0/003$ است. همچنین فردی که درآمدش برابر با ۳۵۰ است، اثر افزایش درآمد بر احتمال صاحب خانه شدن او فقط $\varphi(-0/8+0/01(350))(0/01)=0/0028$ است. این بدان معنا است که کسی که درآمدش ۳۵۰ است، احتمال داشتن خانه برای او برابر $p(Y_i=1|X_i=350)=\Phi(2/7)=0/9965$ است و لذا به احتمال زیاد وی صاحب خانه است و در نتیجه، افزایش درآمد تأثیر چندانی بر تملک خانه ندارد.

در مباحث فوق دیدیم که اگر X_i یک متغیر توضیحی معمولی باشد، تفسیر نتایج ساده است و نشان می‌دهد که با افزایش X_i (مثلاً یک واحد) Y چه تغییری می کند. مثلاً افزایش درآمد (ΔX_i) موجب افزایش در احتمال تملک خانه (ΔY) می‌شود. اما اگر X_i نیز یک متغیر مجازی باشد (مثلاً وضعیت تأهل) آنگاه X_i برابر ۰ و ۱ است. Y نیز اگر وضعیت اشتغال را نشان دهد، آنگاه $Y=0$ یا $Y=1$ است. حال تغییر در X_i به معنی این است که X_i از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد. اثر تغییر در X_i بر Y را به‌صورت زیر حساب می کنیم:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X_i}=P(Y=1|X_i=1,\overline{X}_{other})-P(Y=1|X_i=0,\overline{X}_{other})$$

مفهوم عبارت فوق آن است که احتمال مشارکت در نیروی کار، چقدر به‌خاطر تغییر در وضعیت تأهل افزایش می‌یابد. $\overline{X}_{other}$ بدان معنا است که برای سایر متغیرها مقدار متوسط آنها را در معادله رگرسیون قرار داده‌ایم.

۶-۱۹ مدل لاجیت

به‌جای تابع چگالی نرمال می‌توان از هر تابع دیگری که شرایط (۱۱-۲۳) را تأمین نماید استفاده نمود. یکی از توابعی که زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد، تابع لاجستیک است.

برای متغیر تصادفی Z تابع توزیع لاجستیک به‌صورت زیر می‌باشد:

$$G(Z)=\frac{1}{1+e^{-Z}}=\frac{e^Z}{1+e^Z} \qquad (23\text{-}39)$$

و تابع چگالی آن به‌صورت $g(Z)=G'(Z)=\frac{e^Z}{(1+e^Z)^2}=G(Z)(1-G(Z))$ می‌باشد.

مشابه تابع توزیع نرمال، احتمال آنکه $Y_i=1$ باشد برابر است با:

$$P(Y_i=1|\mathbf{x}_i')=G(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}}=\frac{e^{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}}{1+e^{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}} \quad (۲۳-۴۰)$$

و احتمال آنکه $Y_i=0$ باشد برابر است با:

$$P(Y_i=0|\mathbf{x}_i)=1-P(Y_i=1|\mathbf{x}_i)=\frac{1}{1+e^{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}} \quad (۲۳-۴۱)$$

برای تخمین $\boldsymbol{\beta}$، تابع درستنمایی را تشکیل می‌دهیم. (برای سادگی، $G(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ را با G_i نشان می‌دهیم):

$$L(\boldsymbol{\beta})=\prod_{i=1}^{n}G_i^{Y_i}(1-G_i)^{1-Y_i} \quad (۲۳-۴۲)$$

لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}[Y_i\ln G_i+(1-Y_i)\ln(1-G_i)] \quad (۲۳-۴۳)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left[-Y_i\ln(1+e^{-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}})+(1-Y_i)\ln(1+e^{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}})\right] \quad (۲۳-۴۴)$$

تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی در مدل لاجیت از حل معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{Y_i\frac{g_i}{G_i}-(1-Y_i)\frac{g_i}{1-G_i}\right\}\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \quad (۲۳-۴۵)$$

از آنجا که $g_i=G_i(1-G_i)$ است، لذا (۲۳-۴۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{i=1}^{n}[Y_i(1-G_i)-(1-Y_i)G_i]\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \quad (۲۳-۴۶)$$

معادله (۲۳-۴۶) به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-G_i)\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{n}[Y_i-G(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})]\mathbf{x}_i=\mathbf{0} \quad (۲۳-۴۷)$$

$Y_i-G(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})$ مشابه خطاها است (e_i) و لذا معادله فوق مشابه معادلات نرمال در روش OLS است. به‌عنوان مثال در حالت یک متغیره، $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ برابر است با:

$$\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}=[1 \quad X_i]\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\alpha+\beta X_i$$

بنابراین، معادلات نرمال عبارتند از:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i-\frac{1}{1+e^{-(\alpha+\beta X_i)}}\right]1=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[Y_i-\frac{1}{1+e^{-(\alpha+\beta X_i)}}\right]X_i=0$$

مشتق مرتبهٔ دوم تابع درستنمایی برابر است با[1]:

$$\mathbf{H}=\frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=-\sum G_i(1-G_i)\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i' \quad (۲۳-۴۸)$$

ماتریس $\mathbf{H}$ همواره منفیِ معین است.

تفسیر نتایج مدل لاجیت

تفسیر نتایج مدل لاجیت تقریباً مشابه مدل پروبیت است. طبق معادله (۲۳-۴۰) احتمال آنکه $Y_i=1$ باشد بستگی به ضرایب تخمینی و مقدار متغیرهای توضیحی دارد. به‌عنوان مثال، در بحث تملک خانه، احتمال داشتن خانه بستگی به سطح درآمد دارد که به‌ازای درآمدهای مختلف برابر است با:

$$P(Y_i=1|X_i=40)=G(-0/8+0/01(40))=G(-0/4)=\frac{1}{1+e^{-(0/4)}}=0/401$$

$$P(Y_i=1|X_i=80)=G(-0/8+0/01(80))=G(0)=\frac{1}{1+e^{0}}=0/5$$

۱- بدین منظور از (۲۱-۴۷) نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ مشتق می‌گیریم:

$$\mathbf{H}=\frac{\partial^2\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\left[\frac{\partial\ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right]=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\left\{\sum_{i=1}^{N}[Y_i-G(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})]\mathbf{x}_i\right\}$$

$$=-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial G(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})}{\partial\boldsymbol{\beta}'}\mathbf{x}_i=-\sum g(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'$$

با توجه به $g_i=G_i(1-G_i)$، رابطه (۲۱-۴۸) به‌دست می‌آید.

$$P(Y_i=1|X_i=150)=G(-0/8+0/01(150))=G(0/7)=\frac{1}{1+e^{-(0/7)}}=0/668$$

$$P(Y_i=1|X_i=200)=G(-0/8+0/01(200))=G(1/2)=\frac{1}{1+e^{-1/2}}=0/7685$$

بنابراین با افزایش درآمد، احتمال تملک خانه افزایش می‌یابد.

برای محاسبه اثرات نهایی X بر Y مشابه مدل پروبیت عمل می‌کنیم:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{d\mathbf{x}_i}=\frac{dG(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}{d\mathbf{x}_i}=\frac{dG(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}{d(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}\frac{d(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}{d\mathbf{x}_i}=g(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})\hat{\boldsymbol\beta}$$
$$=G(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})\left(1-G(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})\right)\hat{\boldsymbol\beta}$$
$$=P(Y_i=1|\mathbf{x}_i)P(Y_i=0|\mathbf{x}_i)\hat{\boldsymbol\beta} \qquad (23-49)$$

معمولاً اثر نهایی X بر Y را به‌ازای مقادیر متوسط X_i ها حساب می‌کنند:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=g(\hat\beta_1+\hat\beta_1\bar{X}_2+\dots+\hat\beta\bar{X}_K)\hat\beta_i \qquad (23-50)$$

در مثال تملک خانه، به‌ازای درآمد متوسط، اثر تغییر درآمد بر احتمال صاحب خانه شدن عبارت است از:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=g(-0/8+0/01\bar{X})0/01$$
$$=g(-0/8+0/01(150))0/01$$
$$=g(0/7)0/01=\frac{e^{0/7}}{(1+e^{0/7})^2}0/01=0/00222$$

در اینجا نیز بیشترین تأثیرگذاری X بر Y مربوط $g(0)$ باشد که برابر است با:

$$g(0)=\frac{e^0}{(1+e^0)^2}=\frac{1}{4}=0/25$$

بنابراین در مدل لاجیت اثر تغییر X بر Y، حداکثر برابر است با:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=g(0)\hat\beta=0/25\hat\beta \qquad (23-51)$$

رقم فوق در مثال مربوط به تملک خانه برابر است با:

$$g(0)\hat\beta=0/25(0/01)=0/025=\%2/5$$

۷-۲۳ معیارهای خوبی برازش

در رگرسیون‌های معمولی از R^2 به‌عنوان معیار خوبی برازش استفاده می‌شود که برابر است با:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{RSS}{TSS} \qquad (23-52)$$

ESS به‌ترتیب تغییرات توضیح داده شده و TSS تغییرات کل را نشان می‌دهد. همچنین RSS برابر با تغییرات توضیح داده نشده یا مجموع مجذور خطاها است. در اینجا R^2 را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان نمود. بدین منظور دو رگرسیون زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\dots+\beta_KX_{Ki}+u_i \qquad (23-53)$$

$$Y_i=\beta_1+u_i \qquad (23-54)$$

اولی را رگرسیون غیرمقید و دومی را رگرسیون مقید می‌گوییم و متناسب با آن، مجموع مجذور خطاهای رگرسیون اولی را با RSS_{UR} و دومی را با RSS_R یا RSS_0 نشان می‌دهیم. RSS_0 بدان معنا است که معادله موردنظر هیچ متغیر توضیحی را شامل نمی‌شود. از آنجا که در معادله دوم هیچ متغیر توضیحی وارد نشده است، لذا قدرت توضیحی آن صفر است ($ESS=0$). بنابراین $RSS_0=TSS$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان برای معادله اول، R^2 را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$R^2=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{RSS_{UR}}{RSS_0} \qquad (23-55)$$

برای مدل‌های گسسته معیاری مشابه (۵۵-۲۳) معرفی می‌شود که براساس لگاریتم تابع درستنمایی می‌باشد. از آنجا که $L=cRSS^{-\frac{n}{2}}$ است[1]، لذا رابطه فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$R^2=1-\frac{RSS_{UR}^{-\frac{n}{2}}}{RSS_0^{-\frac{n}{2}}}=1-\left(\frac{L_{UR}}{L_0}\right)^{-\frac{n}{2}}=1-\left(\frac{L_0}{L_{UR}}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (23-56)$$

شاخص دیگری براساس لگاریتم نسبت درستنمایی تعریف می‌شود که معروف به شاخص

۱- به فصل نهم مراجعه شود.

$$P(Y_i=1|X_i=150)=G(-0/8+0/01(150))=G(0/7)=\frac{1}{1+e^{-(0/7)}}=0/668$$

$$P(Y_i=1|X_i=200)=G(-0/8+0/01(200))=G(1/2)=\frac{1}{1+e^{-1/2}}=0/7685$$

بنابراین با افزایش درآمد، احتمال تملک خانه افزایش می‌یابد.

برای محاسبه اثرات نهایی X بر Y مشابه مدل پروبیت عمل می‌کنیم:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{d\mathbf{x}_i}=\frac{dG(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}{d\mathbf{x}_i}=\frac{dG(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}{d(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}\frac{d(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})}{d\mathbf{x}_i}=g(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})\hat{\boldsymbol\beta}$$

$$=G(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})\left(1-G(\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol\beta})\right)\hat{\boldsymbol\beta}$$

$$=P(Y_i=1|\mathbf{x}_i)P(Y_i=0|\mathbf{x}_i)\hat{\boldsymbol\beta} \qquad (۲۳-۴۹)$$

معمولاً اثر نهایی X بر Y را به‌ازای مقادیر متوسط X_i ها حساب می‌کنند:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=g(\hat\beta_1+\hat\beta_2\overline{X}_2+...+\hat\beta\overline{X}_K)\hat\beta_i \qquad (۲۳-۵۰)$$

در مثال تملک خانه، به‌ازای درآمد متوسط، اثر تغییر درآمد بر احتمال صاحب خانه شدن عبارت است از:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=g(-0/8+0/01\overline{X})0/01$$

$$=g(-0/8+0/01(150))0/01$$

$$=g(0/7)0/01=\frac{e^{0/7}}{(1+e^{0/7})^2}0/01=0/00222$$

در اینجا نیز بیشترین تأثیرگذاری X بر Y مربوط $g(0)$ باشد که برابر است با:

$$g(0)=\frac{e^0}{(1+e^0)^2}=\frac{1}{4}=0/25$$

بنابراین در مدل لاجیت اثر تغییر X بر Y، حداکثر برابر است با:

$$\frac{dP(Y_i=1)}{dX_i}=g(0)\hat\beta=0/25\hat\beta \qquad (۲۳-۵۱)$$

رقم فوق در مثال مربوط به تملک خانه برابر است با:

$$g(0)\hat\beta=0/25(0/01)=0/025=\%2/5$$

۲۳-۷ معیارهای خوبی برازش

در رگرسیون‌های معمولی از R^2 به‌عنوان معیار خوبی برازش استفاده می‌شود که برابر است با:

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}=1-\frac{RSS}{TSS} \qquad (۲۳-۵۲)$$

ESS به‌ترتیب تغییرات توضیح داده شده و TSS تغییرات کل را نشان می‌دهد. همچنین RSS برابر با تغییرات توضیح داده نشده یا مجموع مجذور خطاها است. در اینجا R^2 را می‌توان به‌صورت دیگری نیز بیان نمود. بدین منظور دو رگرسیون زیر را در نظر بگیرید:

$$Y_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+...+\beta_KX_{Ki}+u_i \qquad (۲۳-۵۳)$$

$$Y_i=\beta_1+u_i \qquad (۲۳-۵۴)$$

اولی را رگرسیون غیرمقید و دومی را رگرسیون مقید می‌گوییم و متناسب با آن، مجموع مجذور خطاهای رگرسیون اول را با RSS_{UR} و دومی را با RSS_R یا RSS_0 نشان می‌دهیم. RSS_0 بدان معنا است که معادله موردنظر هیچ متغیر توضیحی را شامل نمی‌شود. از آنجا که در معادله دوم هیچ متغیر توضیحی وارد نشده است، لذا قدرت توضیحی آن صفر است $(ESS=0)$. بنابراین $RSS_0=TSS$ می‌باشد. در نتیجه می‌توان برای معادله اول، R^2 را به‌صورت زیر بیان نمود:

$$R^2=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{RSS_{UR}}{RSS_0} \qquad (۲۳-۵۵)$$

برای مدل‌های گسسته معیاری مشابه (۲۳-۵۵) معرفی می‌شود که براساس لگاریتم تابع درستنمایی می‌باشد. از آنجا که $L=cRSS^{-\frac{n}{2}}$ است[1]، لذا رابطه فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$R^2=1-\frac{RSS_{UR}^{-\frac{n}{2}}}{RSS_0^{-\frac{n}{2}}}=1-\left(\frac{L_{UR}}{L_0}\right)^{-\frac{n}{2}}=1-\left(\frac{L_0}{L_{UR}}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad (۲۳-۵۶)$$

شاخص دیگری براساس لگاریتم نسبت درستنمایی تعریف می‌شود که معروف به شاخص

۱- به فصل نهم مراجعه شود.

نسبت درستنمایی (LRI)[1] یا R^2 مک فادن[2] است:

$$R^2_M = LRI = 1 - \frac{\ln L_{UR}}{\ln L_0} \qquad (۲۳-۵۷)$$

L_{UR} مقدار تابع درستنمایی غیرمقید و L_0 مقدار تابع درستنمایی است که فقط شامل عرض از مبدأ می‌باشد. LRI بین صفر و یک است. اگر ضرایب متغیرهای توضیحی برابر صفر باشد، آنگاه قدرت توضیحی مدل صفر بوده و لذا $\ln L_{UR} = \ln L_0$ خواهد شد که در این صورت $LRI = 0$ می‌باشد. بیشترین مقدار LRI وقتی به‌دست می‌آید که تمام ضرایب متغیرهای توضیحی، معنادار باشند. اما راهی وجود ندارد که LRI را به ۱ برساند. اما در یک حالت خاص، اگر به ازای $Y_i = 1$ همواره $F(x_i'\beta) = 1$ و به ازای $Y_i = 0$، همواره $F(x_i'\beta) = 0$ باشد، در این صورت طبق (۲۳-۵۷)، لگاریتم تابع درستنمایی برابر صفر می‌شود که به‌معنای برازش کامل است و لذا $LRI = 1$ می‌شود.

یکی دیگر از معیارهای خوبی برازش در مدل‌های گسسته، معروف به درصد پیش‌بینی صحیح[3] می‌باشد. بدین منظور به‌ازای هر i احتمال تخمینی را برای وضعیت $Y_i = 1$ حساب می‌کنیم. این احتمال برابر با $\Phi(x_i'\hat{\beta})$ یا $G(x_i'\hat{\beta})$ که در حالت کلی با $F(x_i'\hat{\beta})$ نشان می‌دهیم. اگر $F(x_i'\hat{\beta}) > 0/5$ باشد، پیش‌بینی می‌شود که $Y_i = 1$ است و اگر $F(x_i'\hat{\beta}) \leq 0/5$ باشد، پیش‌بینی می‌شود که $Y_i = 0$ باشد. درصد زمان‌هایی که «Y_i پیش‌بینی‌شده» با «Y_i واقعی» مطابقت دارد معروف به «درصد پیش‌بینی صحیح» می‌باشد. به‌عنوان مثال تصور کنید که در یک نمونه ۲۰۰تایی، در ۸۰ مورد $Y_i = 0$ و در ۱۲۰ مورد $Y_i = 1$ است. اگر مدل موردنظر، فقط ۵۰ مورد را پیش‌بینی کند که در آن $Y_i = 0$ است، در این صورت ۲۵ درصد از پیش‌بینی‌های آن درست بوده است.

بدین منظور می‌توان جدولی را به‌صورت زیر تشکیل داد و نتایج را در آن خلاصه نمود. به‌عنوان مثال فرض کنید که در یک نمونه ۲۰۰ تایی، نتایج به‌دست آمده از مدل پروبیت یا لاجیت به‌صورت زیر خلاصه شده است:

		پیش‌بینی		
		$Y_i = 0$	$Y_i = 1$	جمع
واقعی	$Y_i = 0$	۵۰	۳۰	۸۰
	$Y_i = 1$	۲۰	۱۰۰	۱۲۰
	جمع	۷۰	۱۳۰	۲۰۰

1- likelihood ratio index
2- McFadden
3- percent correctly predicted

جدول فوق نشان می‌دهد که وقتی $Y_i = 0$ بوده است در ۵۰ مورد مدل توانسته است آنها را درست پیش‌بینی کند. همچنین در ۱۰۰ مورد توانسته است $Y_i = 1$ را درست پیش‌بینی کند. لذا در ۱۵۰ مورد پیش‌بینی مدل درست بوده است (۷۵ درصد).

معیار دیگری توسط بن-اکیوا و لرمان (۱۹۸۵) معرفی شده است که براساس قاعدهٔ پیش‌بینی می‌باشد:

$$R^2_{BL} = \frac{\sum\left[Y_i\hat{F}_i + (1-Y_i)\hat{F}_i\right]}{n} \qquad (۲۳-۵۸)$$

رابطه فوق بیانگر «احتمال متوسط پیش‌بینی صحیح» می‌باشد. معادله فوق براین اساس استوار است که $\hat{F}_i$ پیش‌بینی از Y_i است. مثلاً اگر پیش‌بینی‌ها همگی صحیح باشند در این صورت هرگاه $Y_i = 0$ باشد $\hat{F}_i = 0$ است و هرگاه $Y_i = 1$ باشد، $\hat{F}_i = 1$ است. در این حالت، مجموع صورت کسر برابر با n خواهد شد و لذا $R^2_{BL} = 1$ می‌باشد. اگر دقیقاً برعکس باشد، یعنی هرگاه $Y_i = 0$ است، $\hat{F}_i = 1$ باشد، در این حالت، صورت کسر برابر صفر خواهد شد.

یکی از مشکلات R^2_{BL} آن است که پیامدهایی که فراوانی آنها کوچک باشد، به‌طرز بسیار بدی پیش‌بینی می‌شوند و لذا معیار فوق نمی‌تواند اثر آنها را به حساب بیاورد. کرامر (۱۹۹۹) معیار دیگری را معرفی می‌کند که بتواند این نقص را برطرف سازد.

$$\lambda = (\bar{\hat{F}}|Y_i = 1) - (\bar{\hat{F}}|Y_i = 0) = \overline{(1-\hat{F}}|Y_i = 0) - \overline{(1-\hat{F}}|Y_i = 1) \qquad (۲۳-۵۹)$$

معیار کرامر پیش‌بینی‌های غلط را جریمه می‌کند. $\bar{\hat{F}}|Y_i = 1$ بیانگر متوسط احتمال برای مواردی است که $Y_i = 1$ است. همچنین $\bar{\hat{F}}|Y_i = 0$ بیانگر متوسط احتمال در مواردی است که $Y_i = 0$ است. بنابراین $\bar{\hat{F}}|Y_i = 1$ بیانگر متوسط احتمال در حالتی است که پیش‌بینی‌ها درست است و $\bar{\hat{F}}|Y_i = 0$ نیز بیانگر متوسط احتمال در حالتی است که پیش‌بینی‌ها درست نمی‌باشد.

معیار دیگری توسط افرون (۱۹۷۸) پیشنهاد شده که عبارت است از:

$$R^2_{EF} = 1 - \frac{\sum(Y_i - \hat{F}_i)^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} \qquad (۲۳-۶۰)$$

معیار افرون را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$R^2_{EF} = 1 - \frac{n\sum(Y_i - \hat{F}_i)^2}{n_1 n_2} \quad ; \quad n_1 = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ , \ n_2 = n - n_1 \qquad (۲۳-۶۱)$$

زیرا $\frac{n_1 n_2}{n} = n_1 - n(\frac{n_1}{n})^2 = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2 = \sum(Y_i - \overline{Y})^2$ است. Y_i برابر صفر یا یک است، در حالی که $\hat{F}_i$ بیانگر احتمال‌ها است که برآورد Y_i می باشد.

معیار دیگر توسط ویل و زیمرمان (۱۹۹۲) معرفی شده است که براساس شاخص نسبت درستنمایی (LRI) تعریف می‌شود:

$$R^2_{VZ} = \frac{\delta - 1}{\delta - LRI} LRI \quad , \quad \delta = \frac{n}{2\ln L_0} \qquad (۲۳-۶۲)$$

۲۳-۸ شاخص انحراف[1]

شاخص انحراف، معیاری برای مقایسه و انتخاب مدل است. در این روش، دو مدل را مقایسه می‌کنیم:

۱- مدل کامل: مدل کامل مدلی است که تعداد ضرایب آن برابر با تعداد مشاهدات است. در این حالت، مدل به‌طور کامل برازش می‌شود. به‌عنوان مثال اگر معادله رگرسیون به‌صورت $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$ بوده و فقط دو مشاهده داشته باشیم آنگاه هیچ خطایی وجود ندارد و لذا معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$e_1 = Y_1 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_1 = 0$$
$$e_2 = Y_2 - \hat{\alpha} - \hat{\beta} X_2 = 0$$

با حل این دو معادله، مقادیر $\hat{\alpha} = \frac{X_2 Y_1 - X_1 Y_2}{X_2 - X_1}$ و $\hat{\beta} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$ به‌دست می‌آید. در واقع چون فقط دو مشاهده و دو پارامتر داریم لذا خط رگرسیون از این دو نقطه می‌گذرد و مدل به‌طور کامل برازش می‌شود و هیچ خطایی وجود ندارد. بدیهی است در حالت کلی n مشاهده و n ضریب داریم.

۲- مدل موردنظر: مدل مورد نظر همان معادله رگرسیون معمولی است که تعداد پارامترهای آن از تعداد مشاهدات کمتر است. به‌عنوان مثال n مشاهده و p پارامتر داریم $(p < n)$:

$$E(Y_i | \mathbf{x}_i) = \beta_0 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} \qquad (۲۳-۶۳)$$

1- deviance

به‌منظور مقایسه این دو مدل، از تابع درستنمایی استفاده می‌کنیم. طبق تقسیم‌بندی فوق دو تابع درستنمایی داریم که یکی برای مدل کامل و دیگری برای مدل موردنظر است. فرض کنید که مشاهدات Y_1، Y_2، ... و Y_n را داریم که میانگین Y_i برابر با μ_i است. بنابراین n پارامتر داریم که تابع درستنمایی را با $L(\boldsymbol{\mu}_i)$ نشان می‌دهیم که $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1 \cdots \mu_n]$ است. از طرف دیگر فرض کنید که میانگین شرطی Y_iها برابر با μ است. حال برای μ یک معادله رگرسیون به‌صورت $\mu = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi}$ تعریف می‌کنیم و تابع درستنمایی را با $L(\boldsymbol{\beta})$ نشان می‌دهیم. شاخص انحراف (D) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D = 2[\ln L(\mu_i) - \ln L(\boldsymbol{\beta})] \qquad (۲۳-۶۴)$$

$L(\boldsymbol{\mu}_i)$ بیشترین مقدار برای تابع درستنمایی است. کوچک بودن D بدان معنا است که معادله رگرسیون، برازش بهتری از داده‌ها را داشته است زیرا انحراف آن از مدل کامل، کوچک می‌باشد. جزئیات بیشتر این بحث در مثال‌های زیر ارائه شده است.

مثال ۲۳-۲: فرض کنید Y_i توزیع نرمال با میانگین μ_i و واریانس σ^2 دارد. برای سادگی فرض کنید که σ^2 معلوم است. تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L(\boldsymbol{\mu}_i) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$$

در مدل کامل، n پارامتر داریم که شامل μ_1، μ_2، ... و μ_n است. در مقابل، n مشاهده شامل Y_1، Y_2، ... و Y_n داریم. برای تعیین مقدار مطلوب پارامترها، نسبت به آنها مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial \ln L(\mu_i)}{\partial \mu_i} = -\frac{2(Y_i - \mu_i)}{2\sigma^2} = 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n$$

با حل این معادلات، تخمین μ_i به‌دست می‌آید:

$$\hat{\mu}_i = Y_i \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

با جایگذاری به‌جای μ_i، لگاریتم تابع درستنمایی برابر است با:

$$\ln L(\hat{\mu}_i) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{n}{2}\ln\sigma^2$$

اکنون بحث معمول را دنبال می‌کنیم که طبق آن، میانگین شرطی Y_iها برابر با μ است.
برای μ یک معادله رگرسیون معمولی با p متغیر توضیحی تعریف می‌کنیم:

$$\mu=\beta_1+\beta_2X_{2i}+...+\beta_pX_{pi}=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$$

بنابراین، تابع درستنمایی تابعی از ضرایب $\boldsymbol{\beta}$ است:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum(Y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

با مشتق‌گیری نسبت‌به $\boldsymbol{\beta}$، تخمین ضرایب به‌دست می‌آید که به‌ازای آن میانگین شرطی Y_iها برابر با $\hat{\mu}=\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2X_{2i}+...+\hat{\beta}_pX_{pi}$ است.

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}})=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum(Y_i-\hat{\mu})^2}{2\sigma^2}$$

حال شاخص انحراف را تشکیل می‌دهیم:

$$D=2\left[\ln L(\hat{\mu}_i)-\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$=2\left[\left(-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2\right)\left(-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum(Y_i-\hat{\mu})^2}{2\sigma^2}\right)\right]$$

$$=\sum\left(\frac{Y_i-\hat{\mu}}{\sigma}\right)^2$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum(Y_i-\hat{\mu})^2$$

رابطه فوق دو نکته را نشان می‌دهد، اولاً عبارت $\sum(Y_i-\hat{\mu})^2$ برابر با RSS است و ثانیاً عبارت $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i-\hat{\mu}}{\sigma}\right)^2$ توزیع کای‌دو با درجه آزادی $n-p$ دارد، زیرا برابر با «مجموع مجذور متغیرهای نرمال استاندارد» است.

مثال ۳-۲۳: فرض کنید Y_i توزیع پوآسن دارد:

$$P(Y_i)=\frac{\lambda_i^{Y_i}e^{-\lambda_i}}{Y_i!}\quad;\quad y_i=0,1,2,...$$

λ_i میانگین Y_i است. ابتدا تابع درستنمایی را برای مدل کامل تشکیل می‌دهیم:

$$\ln L(\lambda_i)=\sum_i(Y_i\ln\lambda_i-\lambda_i-\ln Y_i!)$$

با مشتق‌گیری نسبت به λ_i خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\ln L(\lambda_i)}{\partial\lambda_i}=\frac{Y_i}{\lambda_i}-1=0\quad i=1,2,...,n$$

با حل این معادلات تخمین λ_i برابر است با:

$$\hat{\lambda}_i=Y_i$$

با جایگذاری به جای λ_i، تابع درستنمایی برای مدل کامل عبارت است از:

$$\ln L(\hat{\lambda}_i)=\sum_i(Y_i\ln Y_i-Y_i-\ln Y_i!)$$

با توجه به اینکه λ_i غیرمنفی است، معادله رگرسیون زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\ln\lambda_i=\beta_1+\beta_2X_{2i}+...+\beta_pX_{pi}=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$$

تابع درستنمایی برای معادله مورد نظر عبارت است از:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=\sum_i(Y_i\ln\lambda_i-\lambda_i-\ln Y_i!)\quad;\quad\ln\lambda_i=\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

با مشتق‌گیری تابع درستنمایی نسبت‌به $\boldsymbol{\beta}$، تخمین آن به‌دست می‌آید که به‌ازای آن تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\sum_i(Y_i\ln\hat{\lambda}_i-\hat{\lambda}_i-\ln Y_i!)\quad,\quad\hat{\lambda}_i=\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

حال شاخص انحراف (D) را تشکیل می‌دهیم:

$$D=2\left[\ln L(\hat{\lambda}_i)-\ln L(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$=2\left[\sum_i(Y_i\ln Y_i-Y_i-\ln Y_i!)-\sum_i(Y_i\ln\hat{\lambda}_i-\hat{\lambda}_i-\ln Y_i!)\right]$$

$$=2\left[\sum_iY_i\ln\left(\frac{Y_i}{\hat{\lambda}_i}\right)-\sum_i\left(Y_i-\hat{\lambda}_i\right)\right]=2\sum_iY_i\ln\frac{Y_i}{\hat{\lambda}_i}$$

زیرا $\sum_i(Y_i-\hat{\lambda}_i)=\sum e_i=0$ است.

تخمین مدل پروبیت و لاجیت در Eviews

فایل data16

به منظور تخمین مدل پروبیت و لاجیت مسیر را انتخاب می‌کنیم:

Quick → Estimate Equation

که پنجرهٔ زیر باز می‌شود:

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

Estimation settings

Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)

Sample:

- LS - Least Squares (NLS and ARMA)
- TSLS - Two-Stage Least Squares (TSNLS and ARMA)
- GMM - Generalized Method of Moments
- LIML - Limited Information Maximum Likelihood and K-Class
- COINTREG - Cointegrating Regression
- ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
- ORDERED - Ordered Choice
- CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
- COUNT - Integer Count Data
- QREG - Quantile Regression (including LAD)
- GLM - Generalized Linear Models
- STEPLS - Stepwise Least Squares
- ROBUSTLS - Robust Least Squares
- HECKIT - Heckman Selection (Generalized Tobit)
- BREAKLS - Least Squares with Breakpoints
- SWITCHREG - Switching Regression

در قسمت Estimation Setting از گزینهٔ method روش تخمین BINARY–binary choice (Logit, ...) را انتخاب می‌کنیم که پنجرهٔ زیر باز می‌شود:

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Binary dependent variable followed by list of regressors, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

y c x

Binary estimation method: ◉ Probit ○ Logit ○ Extreme value

Estimation settings

Method: BINARY - Binary Choice (Logit, Probit, Extreme Value)

Sample: 1 50

OK | Cancel

در قسمت Equation Estimation معادله موردنظر را وارد می‌کنیم (به‌عنوان مثال Y C X) و در زیر آن روش تخمین Probit یا Logit را انتخاب می‌کنیم. نتایج تخمین برای مدل پروبیت به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: LOGIT::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 06/21/13 Time: 08:23
Sample: 1 50
Included observations: 50
Convergence achieved after 5 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-2.725755	0.928866	-2.934497	0.0033
X	0.032394	0.008770	3.693679	0.0002

McFadden R-squared	0.809468	Mean dependent var	0.720000
S.D. dependent var	0.453557	S.E. of regression	0.179204
Akaike info criterion	0.305953	Sum squared resid	1.541471
Schwarz criterion	0.382434	Log likelihood	-5.648827
Hannan-Quinn criter.	0.335077	Deviance	11.29765
Restr. deviance	59.29533	Restr. log likelihood	-29.64767
LR statistic	47.99768	Avg. log likelihood	-0.112977
Prob(LR statistic)	0.000000		
Obs with Dep=0	14	Total obs	50
Obs with Dep=1	36		

در قسمت بالا، نام متغیر وابسته، روش تخمین و تعداد مشاهدات، مشخص شده است. در قسمت دوم مانند رگرسیون‌های معمولی، مقدار تخمینی ضرایب و انحراف معیارها و آماره‌ها ارائه شده است. در قسمت پایین، برخی تفاوت‌ها را با رگرسیون‌های معمولی مشاهده می‌کنیم:

Mc Fadden R-squared: ضریب تعیین مک فادن که به‌صورت تعریف شده است:

S.D. dependent var: انحراف معیار متغیر وابسته (σ_y)

Akaike info criterion: معیار اطلاعات آکائیک

Schwartz criterion: معیار اطلاعات شوارتز

Hannan–Quinn criter: معیار اطلاعات حنان – کوئین

Restr. Deviance: شاخص انحراف مقید

LR Statistic: نسبت درستنمایی است که عبارت است از:

$$LR = ۲(\ln L_K - \ln L_۰) = ۲[-۵/۶۴۸۸۲۷ - (-۲۹/۶۴۷۶۷)] = ۴۷/۹۹۷۶۸$$

Prob (LR statistic): احتمال یا سطح معنی دار بودن نسبت درستنمایی است که همواره در زیر LR ارائه می‌شود. در اینجا چون LR بزرگ است لذا مقدار این احتمال کوچک است و بدان معنا است که مدل مقید و غیرمقید، تفاوت معناداری دارند و لذا متغیرهای توضیحی، قدرت توضیح دهندگی معناداری داشته‌اند. توجه شود که در اینجا نسبت درستنمایی (LR) همان کاری را انجام می‌دهد که آماره F در رگرسیون‌های معمولی انجام می‌دهد. هر دو برای آزمون معنادار بودن رگرسیون به کار می‌روند.

Mean deemdent var: میانگین متغیر وابسته (Y) است که بین ۰ و ۱ می‌باشد زیرا مقادیر Y فقط شامل ۰ و ۱ است.

S.E. of regression: انحراف معیار رگرسیون ($\hat{\sigma}$)

Sum of squared resid: مجموع مجذور خطاها (RSS)

Log likelihood: حداکثر تابع درستنمایی غیرمقید (مدلی که شامل K متغیر توضیحی است که با $\ln L_{UR}$ یا با $\ln L_K$

نشان می‌دهیم).
Deviance: شاخص انحراف
Restro log likelihood: حداکثر تابع درستنمایی مقید (مدلی که فقط شامل عرض از مبدأ است و هیچ متغیر توضیحی ندارد و لذا با $\ln L_R$ یا با $\ln L_\circ$ نشان می‌دهیم).
Avg log likelihood: متوسط تابع درستنمایی است که از تقسیم مقدار تابع درستنمایی بر تعداد مشاهدات به‌دست می‌آید.
در قسمت آخر نیز اطلاعاتی در خصوص مشاهدات مربوط به Y می‌دهد که عبارتند از:
Obs with Dep = ۰: تعداد مشاهداتی که در آنها $Y=\circ$ است.
Obs with Dep = ۱: تعداد مشاهداتی که در آنها $Y=1$ است.
Total obs: کل مشاهدات
برای تخمین مدل Logit کافی است که در پنجره Estimate Equation همان روشی را که برای مدل Probit ارائه کردیم را دنبال کرده و گزینه logit را به جای probit انتخاب کنیم. نتایج حاصله مشابه مدل پروبیت قابل بررسی و تحلیل است.

۸-۲۳ آزمون محدودیت‌ها در مدل‌های پروبیت و لاجیت

از آنجا که برای تخمین ضرایب مدل‌های پروبیت و لاجیت از روش حداکثر درستنمایی استفاده می‌شود، لذا هر محدودیتی را می‌توان با استفاده از نسبت درستنمایی مورد آزمون قرار داد. جزئیات نسبت درستنمایی در فصل نهم ارائه شده است. نسبت درستنمایی برای مقایسه دو رگرسیون مقید و غیرمقید مورد استفاده قرار می‌گیرد که برابر است با:

$$LR = ۲(\ln L_{UR} - \ln L_R) \qquad (۲۳\text{-}۶۵)$$

نسبت درستنمایی دارای توزیع χ^2_m است که m تعداد محدودیت‌ها را نشان می‌دهد. L_{UR} و L_R به ترتیب مقدار تابع درستنمایی غیرمقید و مقید می‌باشد.

محاسبه نسبت درستنمایی در Eviews — فایل data15

همان‌طور که در تخمین مدل پروبیت و لاجیت دیدیم، مقدار تابع درستنمایی نیز توسط Eviews ارائه می‌شود که تحت عنوان log likelihood می‌باشد. لذا برای محاسبه LR مراحل زیر را انجام می‌دهیم:
۱- مدل را بدون هیچ محدودیتی برآورد می‌کنیم. در این صورت مقدار log likelihood را به‌عنوان $\ln L_{UR}$ در نظر می‌گیریم.
۲- مدل را با اعمال محدودیت‌ها برآورد می‌کنیم. در این صورت مقدار log likelihood را به‌عنوان $\ln L_R$ در نظر می‌گیریم.
۳- نسبت درستنمایی (LR) را طبق (۶۵-۲۰) حساب کرده و با مقدار $\chi^2_{/\circ\Delta,m}$ مقایسه می‌کنیم. اگر $LR \geq \chi^2_{/\circ\Delta,m}$ باشد فرضیه $H_\circ$ رد می‌شود. یعنی قیدها برقرار نیستند و اعمال آنها، رگرسیون را واقعاً تغییر می‌دهد.

به‌عنوان مثال فرض کنید معادله $Y_i=\alpha+\beta X_i+\gamma Z_i+u_i$ را می‌خواهیم برآورد کنیم که مدل غیرمقید است. با تخمین این معادله $\ln L_{UR}$ به‌دست می‌آید که برابر با ۵/۲۹- می‌باشد:

Equation: UNTITLED Workfile: PL-SOURI::Untitled\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML - Binary Probit (Quadratic hill climbing)
Date: 06/21/13 Time: 09:59
Sample: 1 50
Included observations: 50
Convergence achieved after 7 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-3.626890	1.529780	-2.370858	0.0177
X	0.060419	0.027745	2.177660	0.0294
Z	-0.000412	0.000316	-1.301904	0.1929

McFadden R-squared	0.821552	Mean dependent var	0.720000
S.D. dependent var	0.453557	S.E. of regression	0.171592
Akaike info criterion	0.331622	Sum squared resid	1.383864
Schwarz criterion	0.446344	Log likelihood	-5.290558
Hannan-Quinn criter.	0.375309	Deviance	10.58112
Restr. deviance	59.29533	Restr. log likelihood	-29.64767
LR statistic	48.71422	Avg. log likelihood	-0.105811
Prob(LR statistic)	0.000000		

حال مدل مقید را برآورد می‌کنیم. فرض کنید محدودیت موردنظر این است که ضریب Zz برابر صفر است. در این صورت در قسمت Equation Specification معادله را به‌صورت X C Y وارد کرده و آن را تخمین می‌زنیم. $\ln L_R$ برابر با ۵/۶۶- به‌دست می‌آید.
نسبت درستنمایی برابر است با:

$$LR = ۲(-۵/۲۹-(-۶/۶۶)) = ۰/۷۲$$

چون $\chi^2_{/\circ\Delta,1}=۳/۸۴ > LR=۰/۷۲$ است، لذا مقدار LR در ناحیه بحرانی قرار ندارد و فرضیه $H_\circ$ رد نمی‌شود. بدین معنی که قید موردنظر برقرار است و اعمال آنها تأثیری بر رگرسیون ندارد.

مسائل

۱-۲۳ فرض کنید می‌خواهیم احتمال قبولی در کنکور را پیش‌بینی کنیم. یک مدل برای این موضوع معرفی کنید که از داده‌های (نمرات کنکور) سال گذشته استفاده می‌کند.

۲-۲۳ در مدل $Y_i=\mathbf{x}_i'\beta+u_i$ نشان دهید که فقط در صورتی $E(u_i)=\circ$ است که $P(Y_i=1)=\mathbf{x}_i'\beta$ باشد.

۳-۲۳ نشان دهید که مدل $Y_i=\mathbf{x}_i'\beta+u_i$ دارای واریانس ناهمسانی است.

۴-۲۳ در مدل $Y_i = F(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) + u_i$ فرض کنید $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ فقط شامل یک عرض از مبدأ باشد و هیچ متغیر توضیحی نداشته باشد (یعنی $F(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}) = \alpha$). در این صورت نشان دهید که حداکثرسازی لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به عرض از مبدأ، به تخمین $F(\hat{\alpha}) = \bar{Y}$ می‌شود.

۵-۲۳ در مسئله ۴-۲۳ نشان دهید که حداکثر لگاریتم درستنمایی برابر با $\log\left[\bar{Y}^{\bar{Y}}(1-\bar{Y})^{1-\bar{Y}}\right]^n$ می‌باشد.

ضمیمه فصل بیست و سوم: مدل‌های پروبیت و لاجیت Stata

فایل data16

مدل‌های پروبیت و لاجیت در Stata

مدل پروبیت

بدین منظور مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Probit regression → Binary outcome → Statistics

probit - Probit regression
Model | by/if/in | Weights | SE/Robust | Reporting | Maximization
Dependent variable: — متغیر وابسته
Independent variables: — متغیرهای توضیحی
Suppress constant term
Options
Offset variable:
Retain perfect predictor variables
Constraints:
Manage...
Keep collinear variables (rarely used)
OK | Cancel | Submit

با انتخاب OK نتایج به صورت زیر به دست می‌آید:


```
Probit regression                          Number of obs   =        50
                                           LR chi2(1)      =     48.00
                                           Prob > chi2     =    0.0000
Log likelihood = -5.6488268                Pseudo R2       =    0.8095

           y |     Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |  .0323944   .0087702     3.69   0.000     .0152051    .0495838
       _cons | -2.725755   .9288672    -2.93   0.003    -4.546301   -.9052086

Note: 0 failures and 4 successes completely determined.
```

و یا می‌توان مدل پروبیت را با فرمان زیر برآورد نمود:

Probit y x

بعد از تخمین مدل پروبیت، برای تحلیل اثرات نهایی x بر y، با اجری فرمان mfx نتایج به صورت زیر به دست می‌آید:

```
. mfx

Marginal effects after probit
      y  = Pr(y) (predict)
         =  .95955208

variable |      dy/dx    Std. Err.     z    P>|z|  [    95% C.I.   ]      x
---------+-----------------------------------------------------------------
       x |   .0022314      .00202    1.10   0.270  -.001737  .006199     142
```

نتیجه فوق نشان می‌دهد که یک واحد تغییر در x منجر به ۰/۰۰۲۲۳ واحد تغییر در y می‌شود.

مدل لاجیت

برآورد مدل لاجیت دقیقاً مشابه با مدل پروبیت است. در اینجا نیز همان مسیر را دنبال کرده و Logit regression را انتخاب می‌کنیم. علاوه بر این می‌توان از فرمان زیر استفاده نمود:

logit y x

نتایج عبارت است از:

```
Logistic regression                        Number of obs   =        50
                                           LR chi2(1)      =     47.91
                                           Prob > chi2     =    0.0000
Log likelihood = -5.6944642                Pseudo R2       =    0.8079

           y |     Coef.   Std. Err.      z    P>|z|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           x |  .0588145   .0182772     3.22   0.001     .0229919    .0946371
       _cons | -4.778454   1.771481    -2.70   0.007    -8.250492   -1.306415
```

در اینجا نیز اثرات نهایی با فرمان mfx حساب می‌شود:

```
Marginal effects after logit
      y  = Pr(y) (predict)
         =  .97270045

        variable |         dy/dx          |      x
-----------------+------------------------+--------
               x |       .2217723         |    142
```

فصل بیست و چهارم

متغیرهای وابسته محدود
(مدل‌های منقطع، سانسورشده و شمارشی)

۱-۲۴ مقدمه

در فصل بیست و دوم نوع خاصی از متغیرهای وابسته محدود را تحت عنوان مدل احتمال خطی، مدل لاجیت و مدل پروبیت بررسی کردیم. در این مدل‌ها، متغیر وابسته مقدار ۰ و ۱ را اختیار کند. انواع دیگری از متغیرهای وابسته محدود وجود دارند که در برخی ازآنها متغیر وابسته مقادیر ۰، ۱، ۲ و... را اختیار می‌کند که معروف به الگوهای شمارشی[1] هستند. نوع دیگری از متغیرهای وابستهٔ محدود مربوط به حالتی است که متغیر وابسته در بسیاری از موارد برابر صفر است و عملاً این گونه مقادیر، صفر هستند قابل‌مشاهده نمی‌باشند. این الگوها تحت عنوان مدل‌های منقطع[2] و مدل‌های سانسورشده[3] می‌باشند. در این فصل به بررسی هر یک از این مدل‌ها و مفاهیم آنها می‌پردازیم. در این خصوص، توزیع منقطع یکی از مفاهیم اساسی است که بحث را با آن شروع می‌کنیم.

۲-۲۴ توزیع‌های منقطع

توزیع منقطع بخشی از یک توزیع کامل است که مقادیر بالایی یا پایینی متغیر تصادفی را شامل نمی‌شود. به عبارت ساده‌تر، توزیع منقطع زیرمجموعه‌ای از توزیع کامل است. بدین ترتیب، توزیع منقطع یک توزیع شرطی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

1- count
2- truncated
3- censored

$$f(Y|Y>a)=\frac{f(Y)}{P(Y>a)}=\frac{f(Y)}{1-P(Y<a)} \qquad (24-1)$$

$f(Y|Y>a)$ یک تابع چگالی شرطی است که مشروط به مقادیر بزرگتر از a شده است.

مثال ۱-۲٤: فرض کنید Y توزیع نرمال دارد. تابع چگالی منقطع Y عبارت است از:

$$f(Y|Y>a)=\frac{f(Y)}{1-\int_{-\infty}^{a} f(Y)dY} \qquad (24-2)$$

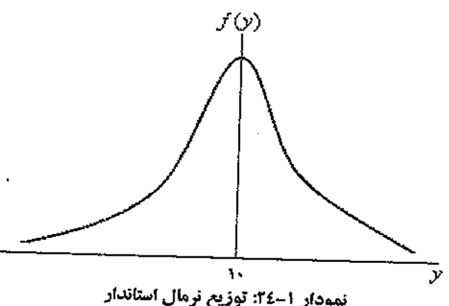
که $f(Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(Y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ است با جایگذاری در فرمول فوق و ساده کردن آن خواهیم داشت:

$$f(Y|Y>a)=\frac{f(Y)}{1-P(Y<a)}=\frac{\frac{1}{\sigma}\varphi(Z)}{1-\Phi(\alpha)} \qquad (24-3)$$

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\ ,\quad \alpha=\frac{a-\mu}{\sigma}\ ;\quad Y>a\ ,\ Z>\alpha$$

که $\varphi(Z)$ تابع چگالی نرمال استاندارد و $\Phi(\alpha)$ مقدار تابع توزیع نرمال استاندارد به‌ازای $Z=\alpha$ می‌باشد.

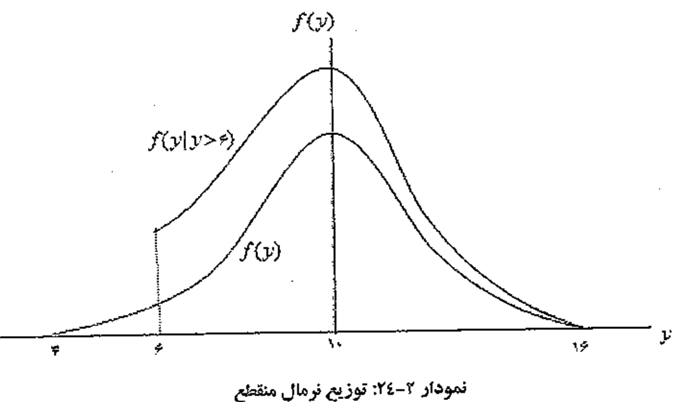
مثال ۲-۲٤: در مثال ۱-۲۴ فرض کنید که $\mu=10$ و $\sigma^2=4$ باشد در این صورت توزیع Y به‌صورت زیر است:



نمودار ۱-۲٤: توزیع نرمال استاندار

توزیع منقطع Y به شرط $Y>6$ عبارت است از:

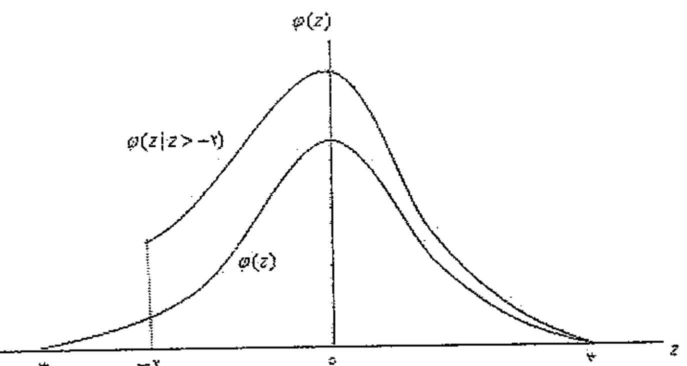
$$f(Y|Y>6)=\frac{f(Y)}{1-P(Y<6)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}2}e^{\frac{(Y-10)}{8}}}{0/9772}$$



نمودار ۲-۲٤: توزیع نرمال منقطع

اگر توزیع منقطع را بخواهیم بر حسب نرمال استاندارد بنویسیم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\varphi(Z|Z>-2)=\frac{\varphi(Z)}{1-P(Z<-2)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{Z^2}{2}}}{1-\Phi(-2)}$$



نمودار ۳-۲٤: توزیع نرمال استاندارد منقطع

نوع دیگری از توزیع‌های منقطع که مورد توجه می‌باشد، برای حالت خاص $Y>0$ است. این بحث مشابه حالتی است که $Y>a$ باشد. اما توزیع احتمال منقطع برای یک متغیر تصادفی ناپیوسته به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(Y|Y>0)=\frac{f(Y)}{P(Y>0)}=\frac{P(Y)}{1-P(Y=0)} \qquad (24\text{-}4)$$

مثال ۳-۲۴: فرض کنید که Y توزیع پوآسن دارد. توزیع منقطع به شرط $Y>0$ عبارت است از:

$$P(Y|Y>0)=\frac{\frac{\lambda^Y e^{-\lambda}}{Y!}}{1-\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!}}=\frac{\lambda^Y e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})Y!} \quad , \; Y=1,2,\ldots \qquad (24\text{-}5)$$

مثال ۳-۲۴: فرض کنید Y توزیع یکنواخت در فاصله $[0,1]$ دارد که تابع چگالی آن عبارت است از:

$$f(Y)=1 \; ; \; 0\le Y\le 1$$

تابع چگالی منقطع به‌ازای $a=\frac{1}{3}$ عبارت است از:

$$f(Y|Y>\tfrac{1}{3})=\frac{f(Y)}{P(Y>\frac{1}{3})}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2} \quad , \quad \frac{1}{3}\le Y\le 1$$

$$P(Y>\tfrac{1}{3})=\int_{\frac{1}{3}}^{1} 1\,dY=Y\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

۳-۲۴ امید ریاضی و واریانس منقطع

اگر Y توزیع نرمال داشته باشد با استفاده از نتایج مثال ۱-۲۴ می‌توان نشان داد که امید ریاضی و واریانس منقطع برابر است با:

$$E(Y|Y>a)=E(Y)+\sigma\lambda(\alpha)=\mu+\sigma\lambda(\alpha) \qquad (24\text{-}6)$$

$$\mathrm{var}(Y|Y>a)=\mathrm{var}(Y)[1-\delta(\alpha)]=\sigma^2[1-\delta(\alpha)]$$

که $\alpha=\frac{a-\mu}{\sigma}$ است. λ و δ نیز عبارتند از:

$$\lambda(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(\alpha)}{1-\Phi(\alpha)} & \text{اگر } Y>a \text{ باشد}\\[2mm] -\dfrac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)} & \text{اگر } Y<a \text{ باشد}\end{cases} \qquad (24\text{-}7)$$

$$\delta(\alpha)=\lambda(\alpha)[\lambda(\alpha)-\alpha] \quad ; \quad 0<\delta<1 \qquad (24\text{-}8)$$

شرط $0<\delta<1$ نشان می‌دهد که واریانس کامل بزرگتر از واریانس منقطع است. از طرف دیگر اگر $Y>a$ باشد آنگاه امیدریاضی منقطع از امیدریاضی کامل، بزرگتر خواهد بود. اگر $Y<a$ باشد، آنگاه امیدریاضی منقطع از امید ریاضی کامل، کوچک‌تر خواهد بود. $\lambda(\alpha)$ معروف به نسبت معکوس میلز[1] است. همچنین این نسبت را تابع خطر[2] برای توزیع نرمال استاندارد می‌نامند.

مثال ٤-۲٤: امید ریاضی منقطع Y عبارت است از:

$$E(Y|Y>\tfrac{1}{3})=\int_{\frac{1}{3}}^{1} Y\frac{3}{2}dY=\frac{3}{4}Y^2\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{2}{3}$$

برای محاسبه واریانس منقطع، ابتدا $E(Y^2|Y>\frac{1}{3})$ را حساب می‌کنیم:

$$E(Y^2|Y>\tfrac{1}{3})=\int_{\frac{1}{3}}^{1} Y^2\frac{3}{2}dY=\frac{3}{6}Y^3\Big|_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{13}{27}$$

واریانس منقطع Y برابر است با:

$$\mathrm{var}(Y|Y>\tfrac{1}{3})=E\left(Y^2|Y>\tfrac{1}{3}\right)-[E(Y|Y>3)]^2=\frac{13}{27}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{27}$$

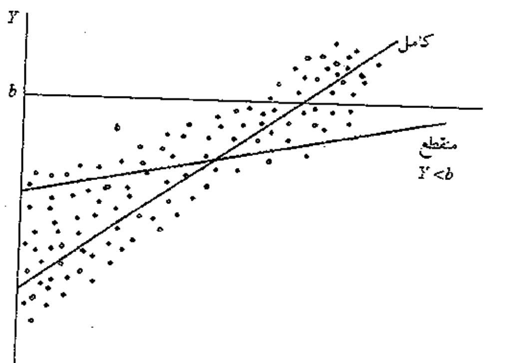
این در حالی است که میانگین کامل و واریانس کامل Y به‌ترتیب برابر $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{12}$ می‌باشد.

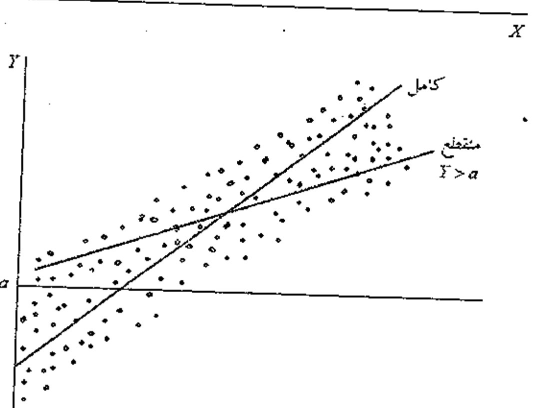
٤-۲٤ رگرسیون منقطع

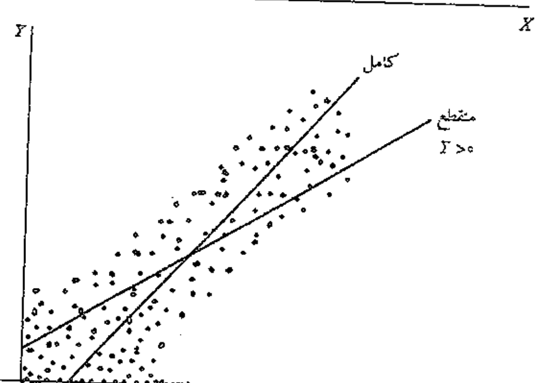
رگرسیون منقطع از برخی از داده‌ها استفاده نمی‌کند و آنها را کنار می‌گذارد. بنابراین در مقایسه با رگرسیون کامل، رگرسیون منقطع فقط بخشی از داده‌ها را استفاده می‌کند و لذا نتایج آن با رگرسیون کامل، متفاوت است.

نمودار ۴-۲۴ رگرسیون منقطع را در مقایسه با رگرسیون کامل نشان می‌دهد:

1- inverse Mills ratio
2- hazard function







نمودار ۴-۲۴: رگرسیون کامل و منقطع

مشابه رگرسیون معمولی که به‌صورت $Y_i = E(Y|\mathbf{x}_i) + u_i$ است، در اینجا نیز مدل رگرسیون منقطع را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Y_i = E(Y|Y > a\,,\mathbf{x}_i) + u_i \qquad (۲۴-۹)$$

امید ریاضی شرطی منقطع را به‌صورت زیر به‌دست آوردیم:

$$E(Y|Y > a\,,\mathbf{x}_i) = E(Y\,|\,\mathbf{x}_i) + \sigma\lambda(\alpha_i) = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \sigma\lambda(\alpha_i) \qquad (۲۴-۱۰)$$

$$\lambda(\alpha_i) = \frac{\varphi(\alpha_i)}{۱-\Phi(\alpha_i)}\ ,\quad \alpha_i = \frac{a - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma} \qquad (۲۴-۱۱)$$

و یا اگر $\lambda(\alpha_i)$ را به‌اختصار با λ_i نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\lambda_i = \frac{\varphi_i}{۱-\Phi_i} \qquad (۲۴-۱۲)$$

بنابراین رگرسیون منقطع، علاوه بر عبارت $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ شامل جملهٔ $\sigma\lambda(\alpha_i)$ نیز می‌باشد. برای مقایسه اثر تغییر $\mathbf{x}_i$ بر Y در رگرسیون کامل و منقطع، از معادله (۲۴-۱۰) نسبت به $\mathbf{x}_i$ مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial E(Y_i|Y_i > a)}{\partial \mathbf{x}_i} = \boldsymbol{\beta} + \sigma\frac{d\lambda_i}{d\alpha_i}\frac{d\alpha_i}{d\mathbf{x}_i} = \boldsymbol{\beta} + \sigma(\lambda_i^{۲} - \alpha_i\lambda_i)(-\frac{\boldsymbol{\beta}}{\sigma})$$

$$= \boldsymbol{\beta}(۱-\lambda_i^{۲} + \alpha_i\lambda_i) = \boldsymbol{\beta}[۱-\lambda_i(\lambda_i - \alpha_i)] = \boldsymbol{\beta}(۱-\delta_i) \qquad (۲۴-۱۲)$$

از آنجا که $۰ < \delta_i < ۱$ است، لذا اثر نهایی X بر Y در مدل منقطع کمتر از مدل کامل است.

$$\text{اثر نهایی } \mathbf{x} \text{ بر } Y \text{ در مدل منقطع} = \boldsymbol{\beta}(۱-\delta_i) < \boldsymbol{\beta} = \text{اثر نهایی } \mathbf{x} \text{ بر } Y \text{ در مدل کامل} \qquad (۲۴-۱۳)$$

واریانس رگرسیون منقطع عبارت است از:

$$\text{var}(Y_i|Y_i > a) = \sigma^{۲}(۱-\delta_i) < \sigma^{۲} \qquad (۲۴-۱۴)$$

چون δ_i تابعی از α_i و آن نیز تابعی از X_i است، لذا مدل منقطع دارای واریانس ناهمسانی است.

براساس مباحث فوق، رگرسیون منقطع به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Y_i|Y_i > a = E(Y_i|Y_i > a) + u_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \sigma\lambda_i + u_i \qquad (۲۴-۱۵)$$

u_i میانگین صفر دارد و واریانس آن عبارت است از:

$$\text{var}(u_i) = E(u_i^{۲}) = \text{var}(Y_i|Y_i > a) = \sigma^{۲}(۱-\delta_i) \qquad (۲۴-۱۶)$$

بنابراین، واریانس u_i تابعی از X_i است که مدل منقطع را دچار واریانس ناهمسانی می‌کند و لذا تخمین آن با روش OLS منجر به «اریب متغیر حذف‌شده» می‌گردد، زیرا دچار حذف جملهٔ غیرخطی λ_i شده است که برای اجتناب از حذف آن لازم از توزیع نرمال منقطع استفاده کنیم. در این صورت رگرسیون غیرخطی (۱۵-۲۴) را خواهیم داشت. برای تخمین این رگرسیون بایستی از روش حداکثر درستنمایی استفاده کنیم.[1] ثابت می‌شود که تخمین‌زنندهٔ OLS دارای اریب به سمت صفر است ولی تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی، سازگار می‌باشند.

برآورد رگرسیون منقطع در Eviews — فایل data22
متغیر وابستهٔ Y دارای ۶۰۱ مشاهده است که ۴۵۱ مشاهدهٔ آن دارای مقدار صفر می‌باشد. به منظور برآورد رگرسیون منقطع، ابتدا مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:
Quick → Estimate Equation
در قسمت Estimate Equation مدل موردنظر را وارد می‌کنیم که به‌صورت Y C X2 X3 می‌باشد. سپس در قسمت Estimation setting در مقابل گزینه method روش تخمین را انتخاب می‌کنیم که عبارت است از:
Censored – Censored or Truncated Data (including Tabit)

۱- در اینجا از تابع چگالی منقطع نرمال استفاده می‌کنیم:

$$f(Y_i|Y_i>0)=\frac{\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{Y_i-x_i'\beta}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{a-x_i'\beta}{\sigma}\right)}=\frac{1}{1-\Phi(a-x_i'\beta)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y_i-x_i'\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L=\frac{1}{1-\Phi\left(\frac{a-x_i'\beta}{\sigma}\right)}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\Sigma(Y_i-x_i'\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

یکی از حالت‌های خاص که زیاد مورد استفاده است، $a=0$ می‌باشد:

$$L=\frac{1}{\Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right)}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{-\frac{\Sigma(Y_i-x_i'\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

زیرا $\Phi(Z)=1-\Phi(-Z)$ است. لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\Sigma(Y_i-x_i'\beta)^2}{2\sigma^2}-\Sigma\ln\Phi\left(\frac{x_i'\beta}{\sigma}\right)$$

اگر نسبت به β و σ^2 مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم، تخمین آنها به‌دست می‌آید.

Equation Estimation
Specification | Options
Equation specification
Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.
y c z2 z3
Estimation settings
Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)
Sample:
LS - Least Squares (NLS and ARMA)
TSLS - Two-Stage Least Squares (TSNLS and ARMA)
GMM - Generalized Method of Moments
LIML - Limited Information Maximum Likelihood and K-Class
COINTREG - Cointegrating Regression
ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
BINARY - Binary Choice (Logit, Probit, Extreme Value)
ORDERED - Ordered Choice
CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
COUNT - Integer Count Data
QREG - Quantile Regression (including LAD)
GLM - Generalized Linear Models
STEPLS - Stepwise Least Squares
ROBUSTLS - Robust Least Squares
HECKIT - Heckman Selection (Generalized Tobit)
BREAKLS - Least Squares with Breakpoints
SWITCHREG - Switching Regression

با انتخاب گزینه‌های فوق، پنجره زیر باز می‌شود:

Equation Estimation
Specification | Options
Equation specification
Dependent variable followed by list of regressors, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.
y c z2 z3
Distribution: Normal / Logistic / Extreme Value
Dependent variable censoring points
Enter a number, a series, a series expression, or blank for no censoring
Left: 0
Right:
Left & right points entered as: Actual censoring value / Zero/one censoring indicator
Truncated sample
Estimation settings
Method: CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
Sample: 1 601
OK | Cancel

بنابراین، واریانس u_i تابعی از X_i است که مدل منقطع را دچار واریانس ناهمسانی می‌کند و لذا تخمین آن با روش OLS منجر به «اریب متغیر حذف‌شده» می‌گردد، زیرا دچار حذف جملهٔ غیرخطی λ_i شده است که برای اجتناب از حذف آن لازم از توزیع نرمال منقطع استفاده کنیم. در این صورت رگرسیون غیرخطی (۱۵-۲۴) را خواهیم داشت. برای تخمین این رگرسیون بایستی از روش حداکثر درستنمایی استفاده کنیم.[1] ثابت می‌شود که تخمین‌زنندهٔ OLS دارای اریب به سمت صفر است ولی تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی، سازگار می‌باشد.

فایل data22

برآورد رگرسیون منقطع در Eviews

متغیر وابستهٔ Y دارای ۶۰۱ مشاهده است که ۴۵۱ مشاهدهٔ آن دارای مقدار صفر می‌باشد. به منظور برآورد رگرسیون منقطع، ابتدا مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

Quick → Estimate Equation

در قسمت Estimate Equation مدل موردنظر را وارد می‌کنیم که به‌صورت Y C X2 X3 می‌باشد. سپس در قسمت Estimation setting در مقابل گزینه method روش تخمین را انتخاب می‌کنیم که عبارت است از:

Censored – Censored or Truncated Data (including Tabit)

۱- در اینجا از تابع چگالی منقطع نرمال استفاده می‌کنیم:

$$f(Y_i|Y_i>0)=\frac{\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{Y_i-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)}{1-\Phi\left(\frac{a-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)}=\frac{1}{1-\Phi(a-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{(Y_i-\mathbf{x}_i'\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L=\frac{1}{1-\Phi\left(\frac{a-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{\frac{\Sigma(Y_i-\mathbf{x}_i'\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

یکی از حالت‌های خاص که زیاد مورد استفاده است، $a=0$ می‌باشد:

$$L=\frac{1}{\Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n\sigma^n}e^{\frac{\Sigma(Y_i-\mathbf{x}_i'\beta)^2}{2\sigma^2}}$$

زیرا $1-\Phi(-Z)=\Phi(Z)$ است. لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\Sigma(Y_i-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2}{2\sigma^2}-\Sigma\ln\Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$$

اگر نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ و σ^2 مشتق گرفته و برابر صفر قرار دهیم، تخمین آنها به‌دست می‌آید.

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

y c z2 z3

Estimation settings

Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)

Sample:

LS - Least Squares (NLS and ARMA)
TSLS - Two-Stage Least Squares (TSNLS and ARMA)
GMM - Generalized Method of Moments
LIML - Limited Information Maximum Likelihood and K-Class
COINTREG - Cointegrating Regression
ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
BINARY - Binary Choice (Logit, Probit, Extreme Value)
ORDERED - Ordered Choice
CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
COUNT - Integer Count Data
QREG - Quantile Regression (including LAD)
GLM - Generalized Linear Models
STEPLS - Stepwise Least Squares
ROBUSTLS - Robust Least Squares
HECKIT - Heckman Selection (Generalized Tobit)
BREAKLS - Least Squares with Breakpoints
SWITCHREG - Switching Regression

با انتخاب گزینه‌های فوق، پنجره زیر باز می‌شود:

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification

Dependent variable followed by list of regressors, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.

y c z2 z3

Distribution: (•) Normal ( ) Logistic ( ) Extreme Value

Dependent variable censoring points

Enter a number, a series, a series expression, or blank for no censoring

Left: 0

Right:

Left & right points entered as: (•) Actual censoring value ( ) Zero/one censoring indicator

[✓] Truncated sample

Estimation settings

Method: CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)

Sample: 1 601

OK | Cancel

در پنجرهٔ فوق، عبارت Truncated sample را انتخاب می‌کنیم که مخصوص مدل‌های منقطع است. سپس در مقابل left عدد ۰ را وارد می‌کنیم، زیرا می‌خواهیم مدل را برای داده‌های $Y > 0$ برآورد کنیم. همچنین اگر بخواهیم برای $Y > 5$ برآورد کنیم، عدد ۵ را وارد کنیم. همچنین اگر بخواهیم داده‌ها را از سمت راست منقطع کنیم، بایستی اعداد موردنظر را در مقابل Right وارد نماییم. به هر حال با انتخاب OK تخمین نتایج به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

Equation: UNTITLED Workfile: TOBIT_FAIR::Tobit_fair\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Quadratic hill climbing)
Date: 09/24/13 Time: 09:50
Sample (adjusted): 452 601
Included observations: 150 after adjustments
Truncated sample
Left censoring (value) at zero
Convergence achieved after 8 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.938422	3.725805	-0.251871	0.8011
Z2	-0.075261	0.127822	-0.588792	0.5560
Z3	0.590224	0.238508	2.474653	0.0133
Error Distribution				
SCALE:C(4)	6.030981	0.792921	7.606027	0.0000

Mean dependent var	5.833333	S.D. dependent var	4.255934
S.E. of regression	4.128010	Akaike info criterion	5.376273
Sum squared resid	2504.949	Schwarz criterion	5.456556
Log likelihood	-399.2205	Hannan-Quinn criter.	5.408890
Avg. log likelihood	-2.661470		
Left censored obs	0	Right censored obs	0
Uncensored obs	150	Total obs	150

اگر از کل داده‌ها استفاده کنیم، نتایج حاصله با استفاده از روش OLS عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: TOBIT_FAIR::Tobit_fair\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/12/13 Time: 11:23
Sample: 1 601
Included observations: 601

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.534838	0.547681	2.802432	0.0052
Z2	-0.044942	0.022613	-1.987419	0.0473
Z3	0.168890	0.037702	4.479584	0.0000

R-squared	0.041242	Mean dependent var	1.455907
Adjusted R-squared	0.038036	S.D. dependent var	3.298758
S.E. of regression	3.235414	Akaike info criterion	5.191170
Sum squared resid	6259.806	Schwarz criterion	5.213126
Log likelihood	-1556.947	Hannan-Quinn criter.	5.199717
F-statistic	12.86196	Durbin-Watson stat	0.865110
Prob(F-statistic)	0.000003		

نتیجه روش OLS برای داده‌های منقطع (شامل مشاهدات ٤٥٢ به بعد) عبارت است از:

Equation: UNTITLED Workfile: TOBIT_FAIR::Tobit_fair\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 07/12/13 Time: 11:26
Sample: 452 601
Included observations: 150

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	4.495895	1.472225	3.053809	0.0027
Z2	-0.034806	0.060447	-0.575802	0.5656
Z3	0.262306	0.100387	2.612958	0.0099

R-squared	0.072905	Mean dependent var	5.833333
Adjusted R-squared	0.060292	S.D. dependent var	4.255934
S.E. of regression	4.125641	Akaike info criterion	5.692117
Sum squared resid	2502.074	Schwarz criterion	5.752330
Log likelihood	-423.9088	Hannan-Quinn criter.	5.716580
F-statistic	5.779928	Durbin-Watson stat	1.992771
Prob(F-statistic)	0.003834		

ولی نتیجه حاصل از روش داده های منقطع به صورت زیر می‌باشد:

Equation: UNTITLED Workfile: TOBIT_FAIR::Tobit_fair\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Quadratic hill climbing)
Date: 07/12/13 Time: 11:29
Sample (adjusted): 452 601
Included observations: 150 after adjustments
Truncated sample
Left censoring (value) at zero
Convergence achieved after 8 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.938422	3.725805	-0.251871	0.8011
Z2	-0.075261	0.127822	-0.588792	0.5560
Z3	0.590224	0.238508	2.474653	0.0133
Error Distribution				
SCALE:C(4)	6.030981	0.792921	7.606027	0.0000

Mean dependent var	5.833333	S.D. dependent var	4.255934
S.E. of regression	4.128010	Akaike info criterion	5.376273
Sum squared resid	2504.949	Schwarz criterion	5.456556
Log likelihood	-399.2205	Hannan-Quinn criter.	5.408890
Avg. log likelihood	-2.661470		
Left censored obs	0	Right censored obs	0
Uncensored obs	150	Total obs	150

۲٤-۵ داده‌های سانسورشده

یکی از مشکلات متداول در گردآوری داده‌های اقتصاد خرد مربوط به سانسور کردن متغیر وابسته است. وقتی متغیر وابسته، سانسور می‌شود، مقادیر آن به یک دامنه معینی محدود می‌گردد.

مثال‌هایی از داده‌های سانسورشده عبارتند از:

- مخارج خانوارها بابت کالاهای بادوام.
- تعداد ساعاتی که یک زن به کار کردن اختصاص می‌دهد.
- دستگیری دوباره بعد از آزادی از زندان.
- مخارج اختصاص یافته خانوارها بابت تعطیلات.

هر یک از موارد فوق، یک متغیر وابسته را تحلیل می‌کنند که در بخش قابل توجهی از نمونه، برابر صفر است. روش‌های رگرسیون مرسوم را نمی‌توان در این موارد به کار برد.

۲٤-٦ توزیع نرمال سانسورشده

توزیع متغیر سانسورشده، مشابه توزیع متغیر منقطع است. بدین منظور، بحث را با توزیع نرمال ادامه می‌دهیم. فرض کنید که نقطه سانسورشده برابر با صفر باشد. در توزیع منقطع، تنها بخشی از توزیع که فراتر از $Y=0$ است در نظر گرفته می‌شود.

وقتی داده‌ها سانسورشده هستند، توزیع داده‌های نمونه، ترکیبی از توزیع‌های گسسته و پیوسته است. برای تحلیل این توزیع، متغیر تصادفی Y را تعریف می‌کنیم که منشأ آن Y^* است.

$$Y^* \le 0 \Rightarrow Y=0$$
$$Y^* > 0 \Rightarrow Y=Y^* \qquad (۲۴-۱۳)$$

این توزیع را می‌توان به‌صورت زیر توصیف نمود:

۱- اگر $Y^* \sim N(\mu,\sigma^2)$ باشد، آنگاه احتمال اینکه $Y=0$ باشد برابر است با:

$$P(Y=0)=P(Y^*\le 0)=P\left(\frac{Y^*-\mu}{\sigma}\le\frac{0-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(Z\le\frac{\mu}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \qquad (۲۴-۱۴)$$

۲- اگر $Y^*>0$ باشد، آنگاه احتمال Y مشابه با احتمال Y^* است.

$$Y^*\sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Y\sim N(\mu,\sigma^2) \qquad (۲۴-۱۵)$$

این توزیع ترکیبی از دو بخش ناپیوسته و پیوسته است.

امید ریاضی Y عبارت است از (به‌جای صفر از a استفاده کرده‌ایم):

$$E(Y)=P(Y=a)E(Y|Y=a)+P(Y>a)E(Y|Y>a)$$
$$=P(Y^*\le a)a+P(Y^*>a)E(Y^*|Y>a)$$
$$=\Phi a+(1-\Phi)(\mu+\sigma\lambda) \qquad (۲۴-۱۶)$$

واریانس Y عبارت است از:

$$\text{var}(Y)=\sigma^2(1-\Phi)\left[(1-\delta)+(\alpha-\lambda)^2\Phi\right] \qquad (۲۴-۱۷)$$

که Φ، λ و δ عبارتند از:

$$\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=\Phi(\alpha)=P(Y^*<\alpha)$$
$$\lambda=\frac{\varphi}{1-\Phi} \qquad (۲۴-۱۸)$$
$$\delta=\lambda^2-\lambda$$

اگر $a=0$ باشد، آنگاه میانگین Y برابر است با:

$$E(Y|a=0)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)(\mu+\sigma\lambda) \quad , \quad \lambda=\frac{\varphi(\mu/\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)} \qquad (۲۴-۱۹)$$

اگر داده‌ها از بالا سانسورشده باشند، فقط لازم است جای Φ و $1-\Phi$ را عوض کرده و λ را به‌صورت (۲۴-۱۸) تعریف کنیم.

مثال ۲٤-۵[1]: یکی از مواردی که با داده‌های سانسورشده مواجه می‌شویم، مبحث تقاضا و ظرفیت است. به‌عنوان مثال تقاضا برای بلیط سینما را در نظر بگیرید. تنها اطلاعات ما، تعداد بلیط‌های فروخته شده است. معمولاً تقاضای واقعی بیشتر از فروش است. در اینجا مقدار تقاضا سانسور می‌شود، زیرا ما فقط از مقدار فروش استفاده می‌کنیم. فرض کنید ۲۰۰۰۰ صندلی وجود دارد که طبق اطلاعات اخیر حدود ۲۵ درصد اوقات کل آنها فروش رفته است. اگر متوسط فروش ۱۸۰۰۰ باشد، سپس میانگین (μ) و واریانس (σ^2) چقدر است.

1- Green (2012)

$$\Phi(\mu+\sigma\lambda)+(۱-\Phi)۲۰۰۰۰ = \text{امید ریاضی فروش}$$

چون داده‌ها از بالا سانسورشده است، لذا $\lambda=-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)}$ است.

$$\alpha=\frac{۲۰۰۰۰-\mu}{\sigma}$$

اگر ۲۵ درصد اوقات کل صندلی‌ها فروش برود، آنگاه احتمال اینکه تقاضا (Y) برابر با ۲۰۰۰۰ یا بیشتر باشد عبارت است از:

$$P(Y\geq ۲۰۰۰۰)=۱-P(Y<۲۰۰۰۰)=۱-\Phi(\alpha)=۰/۲۵\Rightarrow\Phi(\alpha)=۰/۷۵$$

بنابراین از جدول توزیع نرمال، $\alpha=۰/۶۷۵$ به‌دست می‌آید. حال با توجه به $\alpha=۰/۶۷۵$، مقدار λ برابر است با:

$$\lambda=-\frac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)}=-\frac{\varphi(۰/۶۷۵)}{\Phi(۰/۶۷۵)}=-\frac{۰/۳۱۸}{۰/۷۵}=-۰/۴۲۴$$

با توجه به روابط زیر، مقدار μ و σ^2 را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{۲۰۰۰۰-\mu}{\sigma}\\ E(Y)=(۱-\Phi)(۲۰۰۰۰)+(\mu+\lambda\sigma)\Phi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۰/۶۷۵=\dfrac{۲۰۰۰۰-\mu}{\sigma}\\ ۱۸۰۰۰=۲۰۰۰۰(۰/۲۵)+(\mu-۰/۴۲۴\sigma)۰/۷۵\end{cases}$$

با حل معادلات فوق، خواهیم داشت:

$$\mu=۱۸۳۶۲\ ,\ \sigma=۲۴۲۶$$

۲۴-۷ رگرسیون سانسورشده: مدل توبیت[1]

همان‌طور که دیدیم در الگوی داده‌های سانسورشده، برخی از مقادیر را عملاً مشاهده نمی‌کنیم. به‌عنوان مثال در بررسی تقاضا برای یک کالای بادوام، مخارج مصرفی را فقط وقتی مشاهده می‌کنیم که خرید صورت گرفته باشد. در حالی که تقاضا بیانگر تمایل به خرید یک کالا است و ممکن است هنوز آن را در بازار، مشاهده نکرده باشیم. بنابراین اگر Y_i^* مقدار تقاضا باشد، یک متغیر پنهان یا مشاهده‌نشده است، ولی Y_i مقدار مشاهده‌شدهٔ تقاضا می‌باشد. بنابراین معادله رگرسیون را برای Y_i^* تعریف می‌کنیم ولی در عمل از Y_i استفاده می‌کنیم. در این حالت، بسیاری از مشاهدات برابر صفر هستند (چون خریدی انجام نداده‌اند)، این الگو توسط توبین (۱۹۵۸) ارائه شد که معروف به مدل توبیت گردید. این الگو را می‌توان با الگوهای پروبیت و لاجیت نیز مقایسه کرد، زیرا شباهت‌هایی بین این الگوها وجود دارد.

1- tobit

۲۴-۷-۱ مدل توبیت

مدل‌های پروبیت و لاجیت در مواردی استفاده می‌شوند که متغیر وابسته مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کند. حالت خاصی نیز وجود دارد که متغیر وابسته به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند، اما در بسیاری از موارد، مقدار آن برابر صفر است. لذا متغیر وابسته دو حالت دارد:

۱- برابر صفر است $(Y=۰)$.

۲- مثبت است که در این‌صورت هر مقداری را می‌تواند اختیار کند.

به خاطر داریم که مبنای تصمیم‌گیری در مدل پروبیت و لاجیت، متغیر پنهان Y_i^* است که در مبحث مدل پروبیت معرفی گردید:

$$Y_i^*=\mathbf{x}_i'\beta+u_i \qquad (۲۴-۲۰)$$
$$Y_i^*\geq ۰\ \Rightarrow\ Y_i=۱$$
$$Y_i^*<۰\ \Rightarrow\ Y_i=۰$$

بحث فوق را برای مدل توبیت به‌صورت زیر مطرح می‌کنیم:

$$Y_i^*=\mathbf{x}_i'\beta+u_i \qquad (۲۴-۲۱)$$

$$\left.\begin{array}{l}Y_i^*\leq ۰\ \Rightarrow\ Y_i=۰\\ Y_i^*>۰\ \Rightarrow\ Y_i=Y_i^*\end{array}\right\}\Rightarrow Y_i=\max(۰,Y_i^*) \qquad (۲۴-۲۲)$$

از آنجا که Y_i^* توزیع نرمال دارد، لذا طبق (۲۴-۲۲) توزیع پیوسته روی مقادیر مثبت دارد. به‌ویژه آنکه تابع چگالی Y_i با معین بودن $\mathbf{x}$ مشابه با چگالی Y_i^* با معین بودن $\mathbf{x}$ برای مقادیر مثبت می‌باشد. علاوه بر این، چون u_i توزیع نرمال و $\dfrac{u_i}{\sigma}$ توزیع نرمال استاندارد دارد و مستقل از $\mathbf{x}$ است، خواهیم داشت:

$$P(Y_i=۰\mid\mathbf{x}_i)=P(Y_i^*\leq ۰\mid\mathbf{x}_i)=P(u\leq-\mathbf{x}_i'\beta)$$
$$=P\left(\frac{u}{\sigma}\leq-\frac{\mathbf{x}_i'\beta}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{\mathbf{x}_i'\beta}{\sigma}\right)=۱-\Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\beta}{\sigma}\right) \qquad (۲۴-۲۳)$$

بنابراین، توزیع Y_i عبارت است از:

$$\begin{array}{c|cc} Y_i & 0 & Y_i>0 \\ \hline P(Y_i) & 1-\Phi_i & \varphi(Y_i) \end{array} \quad , \quad \varphi(Y_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y_i-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2}{2\sigma^2}} \qquad (۲۴-۲۴)$$

برای تخمین ضرایب $\boldsymbol{\beta}$ از روش حداکثر درستنمایی استفاده می‌شود. در فصل نهم دیدیم که تابع درستنمایی از حاصل‌ضرب توابع احتمال یا توابع چگالی به‌دست می‌آید. با استـــفاده از (۲۴-۲۴)، تابع درستنمایی را به‌صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$L=P(Y_i=0)P(Y_i>0)=(1-\Phi_i)\prod_{i=1}^{n}\varphi(Y_i)=\underbrace{(1-\Phi_i)}_{Y_i=0}\underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i\in Y>0}^{n}(Y_i-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2}{2\sigma^2}}}_{Y_i>0} \qquad (۲۴-۲۵)$$

لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L=\ln(1-\Phi_i)-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{\sum_{i\in Y>0}(Y_i-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2}{2\sigma^2} \qquad (۲۴-۲۶)$$

با مشتق‌گیری از $\ln L$ نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ و σ^2 تخمین‌زننده‌های حداکثر درستنمایی به‌دست می‌آید. ملاحظه می‌شود که تفاوت تابع درستنمایی در مدل توبیت با حالت معمولی، به خاطر وجود جملهٔ $\ln(1-\Phi_i)$ است. در نظر نگرفتن این عبارت موجب می‌شود که تخمین‌زننده‌ها دچار اریب و ناسازگاری شوند.

۲۴-۷-۲ تفسیر نتایج مدل توبیت

در معادله (۲۴-۲۰)، β_k اثر X_k را بر $E(Y_i^*|X)$ نشان می‌دهد که Y_i^* متغیر پنهان می‌باشد. مجدداً معادله (۲۴-۲۰) را در نظر بگیرید که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Y^*=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_KX_{Ki}+u_i \qquad (۲۴-۲۷)$$

$$E(Y_i^*|\mathbf{x}_i)=\beta_1+\beta_2X_{2i}+\cdots+\beta_KX_{Ki}=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} \qquad (۲۴-۲۸)$$

از طرف دیگر، بحث ما راجع‌به Y است که «متغیر مشاهده‌شده» می‌باشد. بنابراین به‌جای امید ریاضی Y_i^* بایستی امید ریاضی Y را داشته باشیم. بدیهی است که برای محاسبه $E(Y|\mathbf{x}_i)$ نیاز به

احتمال‌های شرطی داریم. بدین منظور ابتدا بایستی احتمال $P(Y>0|\mathbf{x}_i)$ را برآورد کرده و سپس امید ریاضی Y را به‌عنوان تابعی از X برآورد نماییم (یعنی $E(Y|\mathbf{x}_i)$).

در مدل توبیت دو نوع امید ریاضی داریم که مورد توجه هستند:

$$E(Y|\mathbf{x}_i,Y>0) \quad \text{امید ریاضی شرطی که مشروط به } \mathbf{x}_i \text{ و } Y>0 \text{ است} \qquad (۲۴-۲۹)$$

$$E(Y|\mathbf{x}_i) \quad \text{امید ریاضی شرطی که فقط مشروط به } \mathbf{x}_i \text{ است}$$

اولی امید ریاضی شرطی Y به‌ازای مقادیر مثبت Y و دومی امید ریاضی Y است که مشروط به مقادیر Y نشده است. اگر اولی را داشته باشیم دومی را نیز می‌توان حساب نمود، زیرا:

$$\begin{aligned}E(Y|\mathbf{x}_i)&=P(Y_i=0|\mathbf{x}_i)\times 0+P(Y_i>0|\mathbf{x}_i)E(Y|\mathbf{x}_i,Y_i>0)\\&=P(Y_i>0|\mathbf{x}_i)E(Y|\mathbf{x}_i,Y>0)\end{aligned} \qquad (۲۴-۳۰)$$

با استفاده از (۲۴-۲۱) به‌جای احتمال $P(Y>0|\mathbf{x}_i)$ قرار می‌دهیم:

$$E(Y|\mathbf{x}_i)=\Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)E(Y|\mathbf{x}_i,Y_i>0)$$

برای محاسبه $E(Y|\mathbf{x}_i,Y_i>0)$ از خاصیت توزیع نرمال استفاده می‌کنیم که اگر Z نرمال استاندارد باشد، در این صورت $E(Z|Z>c)=\frac{\varphi(c)}{1-\Phi(c)}$ است.

با توجه به رابطه $Y_i=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}+u_i$، امید ریاضی برابر است با:

$$\begin{aligned}E(Y|\mathbf{x}_i,Y_i>0)&=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}+E(u_i|u_i>-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})\\&=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}+\sigma E\left(\frac{u_i}{\sigma}\middle|\frac{u_i}{\sigma}>-\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\\&=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}+\sigma\frac{\varphi(-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}/\sigma)}{1-\Phi(-\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}/\sigma)}\\&=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}+\sigma\frac{\varphi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}/\sigma)}{\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}/\sigma)}\end{aligned} \qquad (۲۴-۳۲)$$

بنابراین، به‌طور خلاصه نتایج زیر را داریم:

$$E(Y|\mathbf{x}_i,Y_i>0)=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}+\sigma\lambda\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \qquad (۲۴-۳۳)$$

$\lambda(c)$ بیانگر نسبت تابع چگالی نرمال به تابع توزیع نرمال به‌ازای مقدار c می‌باشد. معادله فوق از این جهت مهم است که بیانگر ارزش انتظاری Y است که مشروط به $Y_i>0$ بوده و برابر با $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$

به‌علاوهٔ یک جملهٔ اکیداً مثبت می‌باشد. یکی از نتایج مهم این معادله آن است که استفاده از OLS برای برآورد معادله رگرسیون به‌ازای مقادیر $Y_i > 0$ نمی‌تواند به تخمین سازگار $\boldsymbol{\beta}$ منجر شود. زیرا λ را نادیده می‌گیرد که با $\mathbf{x}_i$ همبستگی دارد.

با ترکیب (۳۱-۲۴) و (۳۲-۲۴) خواهیم داشت:

$$E(Y|\mathbf{x}_i) = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\left[\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \sigma\lambda\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} + \sigma\varphi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \tag{۲۴-۳۳}$$

معادله فوق نشان می‌دهد که وقتی Y از مدل توبیت تبعیت می‌کند، $E(Y|\mathbf{x}_i)$ تابع غیرخطی از $\mathbf{x}_i$ و $\boldsymbol{\beta}$ است که تعیین اثر نهایی $\mathbf{x}_i$ بر Y را تا حدودی پیچیده می‌کند.

اگر X_k یک متغیر پیوسته باشد، اثر نهایی آن بر Y را می‌توان با مشتق‌گیری به‌دست آورد[1]:

$$\frac{\partial E(Y|\mathbf{x}, Y_i > 0)}{\partial X_k} = \beta_k + \sigma\frac{d\lambda}{dc}\frac{dc}{dX_k} \tag{۲۴-۳۴}$$

$$= \beta_k\left[1 - \left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma} + \lambda_i\right)\lambda_i\right]$$

که $\lambda_i = \lambda\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$ است. بنابراین، اثر X_k بر Y فقط وابسته به ضریب آن یعنی β_k نیست و عوامل دیگری نیز آن را تعدیل می‌کنند. این عوامل بستگی به جملات داخل کروشه دارد که از یک طرف وابسته به λ_i (تابعی از $\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}$) و از طرف دیگر وابسته به $\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}$ است. می‌توان نشان داد که این عامل تعدیل بین ۰ و ۱ است. بدیهی است که برای تعیین اثرات نهایی X_k، مقادیر معادله (۳۴-۲۴)

۱- مشتق λ نسبت به c عبارت است از:

$$\frac{d\lambda}{dc} = \frac{d}{dc}\left(\frac{\varphi(c)}{\Phi(c)}\right) = \frac{\varphi'\Phi - \varphi\Phi'}{\Phi^2} = \frac{\varphi'\Phi - \varphi^2}{\Phi^2}$$

چون $\varphi' = -c\varphi$ است، لذا خواهیم داشت:

$$\frac{d\lambda}{dc} = \frac{-c\varphi\Phi - \varphi^2}{\Phi^2} = -c\frac{\varphi}{\Phi} - \frac{\varphi^2}{\Phi^2} = -c\lambda - \lambda^2 = -\lambda(c+\lambda)$$

از طرف دیگر $\frac{dc}{dX_k} = \frac{\beta_k}{\sigma}$ است.

را براساس مقادیر متوسط X_kها حساب می‌کنیم. همچنین می‌توان با استفاده از (۳۴-۲۴) کشش‌ها را نیز حساب نمود:

$$X_k \text{ کشش } Y \text{ نسبت به } = \frac{\partial E(Y|\mathbf{x}_i, Y_i > 0)}{\partial X_k}\frac{X_k}{E(Y|\mathbf{x}_i, Y_i > 0)} \tag{۲۴-۳۵}$$

اگر X_k مقادیر ۰ و ۱ را اختیار کند، آنگاه برای محاسبه اثر X_k بر Y ابتدا مقادیر $E(Y|\mathbf{x}_i, Y_i > 0)$ به‌ازای $X_k = 0$ و $X_k = 1$ حساب کرده و تغییرات آن را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$E(Y|X_k = 1, \overline{X}_{other}, Y_i > 0) - E(Y|X_k = 0, \overline{X}_{other}, Y_i > 0)$$

$\overline{X}_{other}$ بیانگر میانگین سایر متغیرها است.

حال با استفاده (۳۳-۲۴) اثر نهایی X_k بر $E(Y|\mathbf{x}_i)$ را حساب می‌کنیم.

$$\frac{\partial E(Y|\mathbf{x}_i)}{\partial X_k} = \frac{\partial P(Y>0|\mathbf{x}_i)}{\partial X_k}E(Y|\mathbf{x}_i, Y_i > 0) + P(Y>0|\mathbf{x}_i)\frac{\partial E(Y|\mathbf{x}_i, Y_i > 0)}{\partial X_k} \tag{۲۴-۳۷}$$

با توجه به $P(Y > 0|\mathbf{x}_i) = \Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)$ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial P(Y>0|\mathbf{x}_i)}{\partial X_k} = \frac{\partial\Phi}{\partial X_k} = \frac{\beta_k}{\sigma}\varphi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \tag{۲۴-۳۸}$$

با جایگذاری از (۳۴-۲۴) و (۳۸-۲۴) در (۳۷-۲۴) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial E(Y|\mathbf{x}_i)}{\partial X_k} = \beta_k\Phi\left(\frac{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right) \tag{۲۴-۳۹}$$

$$= \beta_k P(Y > 0|\mathbf{x}_i)$$

معادله (۳۹-۲۴) امکان مقایسه نتایج مدل OLS و مدل توبیت را فراهم می‌سازد. در روش OLS ضریب X_k، یعنی $\hat{\beta}_k$، اثر آن را نشان می‌دهد، اما در مدل توبیت برابر با حاصل‌ضرب $\hat{\beta}_k\Phi(\overline{\mathbf{x}}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}/\sigma)$ است. توجه شود که $0 \le \Phi \le 1$ است. از آنجا که $\Phi(\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}/\sigma) = P(Y > 0|\mathbf{x}_i)$ است، لذا (۳۹-۲۴) نشان می‌دهد که عامل تعدیل وقتی به‌سمت ۱ میل می‌کند $P(Y > 0|\mathbf{x})$ به ۱ نزدیک شود. این بدان معنا است که مقادیر $Y = 0$ تقریباً وجود نداشته باشند.

رگرسیون سانسور شده (مدل توبیت) در Eviews — فایل data22

بای برآورد رگرسیون سانسورشده (مدل توبیت)، با انتخاب مسیر زیر، ابتدا پنجره Equqtion Estimation را باز می‌کنیم:

Quieh → Estimate Equation

در این پنجره در قسمت Estimation setting در مقابل گزینه method روش تخمین را انتخاب می‌کنیم که عبارت است از:

Censored – Censored or Truncated Data (including Tabit)

در این صورت، پنجه زیر را داریم که برای مدل‌های منقطع و سانسور شده است. در قسمت بالایی، معادله رگرسیون را وارد می‌کنیم. سپس گزینه actual cencoring را انتخاب می‌کنیم. حال عددی که داده‌ها نسبت به آن سانسور شده‌اند را وارد می‌کنیم. در اینجا عدد صفر را در مقابل گزینه left وارد می‌کنیم که بدان معنا است که داده‌ها از سمت چپ نسبت به عدد صفر سانسور شده‌اند و لذا رگرسیون فقط به ازای مقادیر $Y>0$ برآورد می‌شود:

Equation Estimation

Specification | Options

Equation specification
Dependent variable followed by list of regressors, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.
y c z2 z3

Distribution: (•) Normal ( ) Logistic ( ) Extreme Value

Dependent variable censoring points
Enter a number, a series, a series expression, or blank for no censoring
Left: 0
Right:

Left & right points entered as:
(•) Actual censoring value
( ) Zero/one censoring indicator
[ ] Truncated sample

Estimation settings
Method: CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
Sample: 1 601

OK | Cancel

با انتخاب OK نتایج به صورت زیر نشان داده می‌شود:

Equation: UNTITLED Workfile: DATA22::Untitled\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML - Censored Normal (TOBIT) (Quadratic hill climbing)
Date: 01/17/14 Time: 15:52
Sample: 1 601
Included observations: 601
Left censoring (value) at zero
Convergence achieved after 6 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-5.406814	2.082047	-2.596874	0.0094
Z2	-0.175423	0.083646	-2.097203	0.0360
Z3	0.601559	0.141596	4.248419	0.0000
	Error Distribution			
SCALE:C(4)	9.049476	0.615156	14.71086	0.0000

Mean dependent var	1.455907	S.D. dependent var	3.298758
S.E. of regression	3.237931	Akaike info criterion	2.453946
Sum squared resid	6269.550	Schwarz criterion	2.483221
Log likelihood	-733.4108	Hannan-Quinn criter.	2.465341
Avg. log likelihood	-1.220317		
Left censored obs	451	Right censored obs	0
Uncensored obs	150	Total obs	601

کل داده‌ها برابر با ۶۰۱ مشاهده است که در اینجا فقط از ۱۵۰ مشاهده استفاده شده است.

۲۴-۸ مدل‌های شمارشی: توزیع پوآسن

اگر متغیر وابسته، ارقام ۰، ۱، ۲ و ... را اختیار کند، معروف به الگوی شمارشی است. در این موارد Y توزیع نرمال ندارد، زیرا در توزیع نرمال متغیر وابسته به‌صورت پیوسته تغییر می‌کند. الگوهای شمارشی را می‌توان بر مبنای توزیع‌هایی مانند پوآسن، دو جمله‌ای و... توصیف نمود. در اینجا به جزئیات مدل پوآسن می‌پردازیم.

۲۴-۸-۱ توزیع پوآسن

در فصل قبل، مدل پروبیت و لاجیت را برای حالتی بررسی کردیم که متغیر وابسته Y مقادیر ۰ و ۱ را اختیار می‌کرد. این حالت را می‌توان تعمیم داد و شرایطی را در نظر گرفت که Y مقادیر ۰، ۱، ۲ و ... را اختیار می‌کند. در اینجا نیز یک معادله رگرسیون داریم که طبق آن، Y روی متغیرهای

توضیحی برازش می‌شود. اما چون داده‌های Y ناپیوسته است لذا نمی‌توان از توزیع نرمال استفاده نمود. در چنین شرایطی می‌توان از توزیع پوآسن استفاده نمود که برای داده‌های قابل شمارش و غیرمنفی به‌کار می‌رود.

توزیع پوآسن عبارت است از:

$$P(Y_i \mid \mathbf{x}_i) = \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{Y_i}}{Y_i!} \quad , \quad Y_i = ۰,۱,۲,\ldots \qquad (۲۴-۴۰)$$

توزیع پوآسن کاملاً وابسته به پارامتر λ_i است، به‌گونه‌ای که به‌ازای λ_iهای کوچک دارای چولگی شدید است ولی با بزرگ شدن λ_i به یک توزیع قرینه تبدیل می‌شود. در توزیع پوآسن، امید ریاضی و واریانس برابر هستند:

$$E(Y_i \mid \mathbf{x}_i) = \mathrm{var}(Y_i \mid \mathbf{x}_i) = \lambda_i \qquad (۲۴-۴۱)$$

λ_i متوسط Y_i است که تحت تأثیر عوامل مختلفی قرار دارد. لذا می‌توان برای آن یک معادله رگرسیون که همان $E(Y_i \mid \mathbf{x}_i)$ است تعریف نمود. چون λ_i غیرمنفی است و Y_iها نیز غیرمنفی هستند، لذا آن را به‌صورت نمایی تعریف می‌کنند:

$$E(Y_i \mid \mathbf{x}_i) = \lambda_i = e^{\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}} = e^{\beta_1+\beta_2 X_{2i}+\cdots+\beta_K X_{Ki}} \qquad (۲۴-۴۲)$$

لگاریتم معادله فوق عبارت است از:

$$\ln \lambda_i = \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} = \beta_1 + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_K X_{Ki} \qquad (۱۲-۴۳)$$

بنابراین، مدل پوآسن یک رگرسیون غیرخطی است، اما کار کردن با آن نسبتاً ساده است. تابع درستنمایی برای مدل پوآسن عبارت است از:

$$L = \prod_{i=1}^{n} P(Y_i \mid \mathbf{x}_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{Y_i}}{Y_i!} \qquad (۲۴-۴۴)$$

لگاریتم تابع درستنمایی عبارت است از:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^{Y_i}}{Y_i!} = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda_i + Y_i \ln \lambda_i - \ln Y_i!) \qquad (۲۴-۴۵)$$

تخمین‌زنندهٔ حداکثر درستنمایی برای $\boldsymbol{\beta}$ با مشتق‌گیری از $\ln L$ نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial \boldsymbol{\beta}} + Y_i \frac{\partial \ln \lambda_i}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-\lambda_i \mathbf{x}_i + Y_i \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \lambda_i)\mathbf{x}_i = \mathbf{0} \qquad (۲۴-۴۶)$$

ماتریس هشین (مشتق مرتبه دوم) عبارت است از:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'} = \sum_{i=1}^{n}\left(0 - \frac{\partial \lambda_i}{\boldsymbol{\beta}}\right)\mathbf{x}_i = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \qquad (۲۴-۴۷)$$

ماتریس هشین به‌ازای $\mathbf{x}_i$ و $\boldsymbol{\beta}$، همواره منفی معین است و لذا شرط حداکثر شدن تابع درستنمایی تأمین می‌شود. در اینجا نیز می‌توان از روش نیوتن برای تعیین $\boldsymbol{\beta}$ استفاده نمود که طبق آن داریم[1]:

$$\boldsymbol{\beta}_{r+1} = \boldsymbol{\beta}_r - \left[\frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\right]_{\boldsymbol{\beta}_r}^{-1}\left[\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\right]$$

$$= \boldsymbol{\beta}_r - \left(-\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right)^{-1}\left[\sum_i (y_i - \lambda_i)\mathbf{x}_i\right] \qquad (۲۴-۴۸)$$

از طرف دیگر تخمین‌زنندهٔ مجانبی ماتریس واریانس-کوواریانس $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}$ برابر با ماتریس هشین است که تخمین آن عبارت است از:

$$\mathrm{var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML}) = -\hat{\mathbf{H}}^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'\right)^{-1} \qquad (۲۴-۴۹)$$

که $\hat{\lambda}_i = e^{\mathbf{x}_i'\hat{\boldsymbol{\beta}}}$ است.

۲۴-۸-۳ معیارهای خوبی برازش

از آنجا که معادله رگرسیون در مدل پوآسن به‌صورت غیرخطی است و دارای ناهمسانی واریانس است لذا نمی‌توان از R^2 مرسوم استفاده نمود. بدین منظور معیارهای دیگری ارائه شده است. یکی از این معیارها مشابه با R^2 تعریف می‌شود که عبارت است از:

$$R^2 = 1 - \frac{RSS^*}{RSS_0^*} \qquad (۲۴-۵۰)$$

[1] به فصل یازدهم، بخش ۶-۱۱ مراجعه شود.

که RSS^* مجموع مجذور خطاهای استاندارد شده در مدل غیرمقید و $RSS^*_\circ$ نیز مجموع مجذور خطاهای استاندارد شده در مدل مقید (یعنی مدلی که فقط روی عرض از مبدأ برازش شده است)، می‌باشد:

$$RSS^* = \sum_{i=1}^{n}\left(e_i/\sqrt{\hat{\lambda}_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i\hat{\lambda}_i/\sqrt{\hat{\lambda}_i}\right)^2$$

$$RSS^*_\circ = \sum\left(e_{i\circ}/\sqrt{\overline{Y}}\right)^2 = \sum\left(Y_i\overline{Y}/\sqrt{\overline{Y}}\right)^2 \qquad (۲۴-۵۱)$$

معادله مقید به‌صورت $\ln Y_i = \beta_1 + u_i$ می‌باشد که تخمین آن برابر با $\ln\hat{Y}_i = \ln\hat{\lambda} = \hat{\beta}_i$ است. در اینجا $Y_i = \hat{\lambda}_i = e^{\hat{\beta}_i} = \overline{Y}$ است و چون در توزیع پوآسن $\hat{\lambda}_i$ برابر با تخمین واریانس u_i و (همچنین برابر با واریانس Y_i) است، لذا واریانس $e_{i\circ}$ برابر با $\hat{\lambda}_i = \overline{Y}$ خواهد بود.

۲۴-۸-۴ آزمون فرضیه

برای آزمون فرضیه می‌توان از نسبت درستنمایی استفاده نمود. مشابه سایر مدل‌ها نسبت درستنمایی (LR) را به‌صورت اختلاف بین لگاریتم درستنمایی مقید و غیرمقید در نظر می‌گیریم:

$$LR = 2(\ln L_{UR} - \ln L_R) \qquad (۲۴-۵۲)$$

L_{UR} و L_R به‌ترتیب تابع درستنمایی غیرمقید و مقید می‌باشد.

۲۴-۸-۵ تفسیر نتایج مدل پوآسن

اثر نهایی X_k بر Y در مدل پوآسن برابر است با:

$$\frac{\partial \ln E(Y|\mathbf{x}_i)}{\partial X_k} = \beta_k \;\Rightarrow\; \frac{\partial E(Y|\mathbf{x}_i)}{\partial X_k}\frac{1}{E(Y|\mathbf{x}_i)} = \beta_k \qquad (۲۴-۵۳)$$

بنابراین رابطهٔ تقریبی زیر برقرار است:

$$\frac{\Delta E(Y|\mathbf{x}_i)}{E(Y|\mathbf{x}_i)} = \beta_k \Delta X_k \qquad (۲۴-۵۴)$$

اگر X_k یک واحد تغییر کند، آنگاه $E(Y|\mathbf{x}_i)$ به اندازه $100\beta_k$ درصد تغییر خواهد کرد. به‌عنوان مثال اگر $\beta_k = 0.025$ باشد، آنگاه به‌ازای یک واحد تغییر در X_k، امید ریاضی Y حدود ۲/۵ درصد تغییر خواهد کرد.

۲۴-۸-۶ محدودیت مدل پوآسن

در مدل پوآسن، امید ریاضی و واریانس برابرند که این خاصیت معروف به «پراکندگی یکسان» است. این خاصیت بیانگر محدودیت مدل پوآسن است. اما در عمل، واریانس بزرگتر از امید ریاضی است که معروف به خاصیت «پراکندگی بیش از حد» می‌باشد. اگر پراکندگی بیش از حد باشد، برآوردهای مدل پوآسن دارای انحراف معیار با اریب منفی هستند که ناکارا خواهند بود. لذا آمارهٔ Z برای معنی‌دار بودن ضرایب، بزرگ شده و به‌اشتباه، سطح معناداری را بزرگ نشان می‌دهند.

روش‌هایی برای آزمون خاصیت پراکندگی یکسان ارائه شده است. یکی از این آزمون‌ها طی مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- مدل پوآسن را تخمین زده و مقادیر برآوردی متغیر وابسته($\hat{Y}_i$) را حساب می‌کنیم.

۲- خطاها (e_i) را از تفاضل Y_i و $\hat{Y}_i$ حساب می‌کنیم.

۳- عبارت $e_i^2 - Y_i$ را حساب می‌کنیم.

۴- $e_i^2 - Y_i$ را روی $\hat{Y}_i$ برازش می‌کنیم.

۵- اگر ضریب $\hat{Y}_i$ معنادار باشد، فرض پراکندگی یکسان رد می‌شود و لذا الگوی رگرسیون پوآسن رد می‌شود. اگر ضریب $\hat{Y}_i$ مثبت باشد به معنی پراکندگی بیش از حد و اگر منفی باشد به معنی پراکندگی کمتر از حد خواهد بود.

اگر الگوی پوآسن رد شود بایستی از روش شبه حداکثر درستنمایی (QMLE)[1] استفاده نمود که فرض بر این است که توزیع متغیر وابسته، نامعلوم است. روش دیگر استفاده از مدل‌های خطی تعمیم‌یافته (GLM)[2] است.

برآورد مدل پوآسن در Eviews فایل data17

برای برآورد مدل پوآسن، با استفاده از مسیر زیر، پنجره Equation Estimation را باز می‌کنیم:

Quick → Estimate Equation

Equation Estimation
Specification | Options
Equation specification
Dependent variable followed by list of regressors including ARMA and PDL terms, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.
y c x2 x3
Estimation settings
Method: LS - Least Squares (NLS and ARMA)
Sample:
LS - Least Squares (NLS and ARMA)
TSLS - Two-Stage Least Squares (TSNLS and ARMA)
GMM - Generalized Method of Moments
LIML - Limited Information Maximum Likelihood and K-Class
COINTREG - Cointegrating Regression
ARCH - Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
BINARY - Binary Choice (Logit, Probit, Extreme Value)
ORDERED - Ordered Choice
CENSORED - Censored or Truncated Data (including Tobit)
QREG - Quantile Regression (including LAD)
GLM - Generalized Linear Models
STEPLS - Stepwise Least Squares
ROBUSTLS - Robust Least Squares
HECKIT - Heckman Selection (Generalized Tobit)
BREAKLS - Least Squares with Breakpoints
SWITCHREG - Switching Regression

در قسمت بالا، معادله مورد نظر را به‌صورت Y C X2 X3 وارد می‌کنیم و در قسمت پایین در قسمت گزینه Method روش تخمین Count را انتخاب می‌کنیم. در این صورت، پنجره زیر باز می‌شود.

1- quasi maximum likelihood estimation.
2- generalized linear models.

Equation Estimation
Specification | Options
Equation specification
Integer count dependent variable followed by list of regressors, OR an explicit equation like Y=c(1)+c(2)*X.
Count estimation method:
(•) Poisson (ML and QML) ( ) Normal/NLS (QML)
( ) Negative Binomial (ML) ( ) Negative Binomial (QML)
( ) Exponential (QML) Fixed variance parameter: 1
Estimation settings
Method: COUNT - Integer Count Data
Sample: 1 103
OK Cancel

در این پنجره می‌توان مدل پوآسن، دوجمله‌ای منفی، نرمال و نمایی را انتخاب کرد. با انتخاب مدل پوآسن نتایج زیر به‌دست می‌آید.

Equation: UNTITLED Workfile: COUNT::Strike\
View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: Y
Method: ML/QML - Poisson Count (Quadratic hill climbing)
Date: 07/14/13 Time: 19:14
Sample: 1 103
Included observations: 103
Convergence achieved after 4 iterations
Covariance matrix computed using second derivatives

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	1.725630	0.043656	39.52764	0.0000
X2	2.775334	0.819104	3.388254	0.0007
X3	-0.377407	0.174520	-2.162540	0.0306

R-squared	0.064502	Mean dependent var	5.495146
Adjusted R-squared	0.045792	S.D. dependent var	3.653829
S.E. of regression	3.569190	Akaike info criterion	5.583421
Sum squared resid	1273.912	Schwarz criterion	5.660160
Log likelihood	-284.5462	Hannan-Quinn criter.	5.614503
Restr. log likelihood	-292.9694	LR statistic	16.84645
Avg. log likelihood	-2.762584	Prob(LR statistic)	0.000220

برای آزمون پرکندگی یکسان، در پنجره فوق از طریق مسیر Proc → Forecast مقادیر بآوردی Y که با Yf نشان داده می‌شود را حساب می‌کنیم. سپس رگرسیون Y-2^(Y-Yf) را روی Yf^2 برازش می‌کنیم:

LS (Y-Yf)^2-Y Yf^2

نتایج در پنجره زیر نشان داده شده است:

Equation: UNTITLED Workfile: COUNT::Strike\

View | Proc | Object | Print | Name | Freeze | Estimate | Forecast | Stats | Resids

Dependent Variable: (Y-YF)^2-Y
Method: Least Squares
Date: 07/14/13 Time: 19:23
Sample: 1 103
Included observations: 103

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
YF^2	0.238874	0.052115	4.583571	0.0000

R-squared	0.043930	Mean dependent var	6.872929
Adjusted R-squared	0.043930	S.D. dependent var	17.65726
S.E. of regression	17.26506	Akaike info criterion	8.544908
Sum squared resid	30404.41	Schwarz criterion	8.570488
Log likelihood	-439.0626	Hannan-Quinn criter.	8.555269
Durbin-Watson stat	1.711805		

چون ضریب Yf^2 معنادار است، لذا پراکندگی بیش از حد است و الگوی پوآسن رد می‌شود.

مسائل

۲۴-۱ متغیر تصادفی X توزیع یکنواخت دارد:

$$f(X)=۱ \ , \ ۰<X<۱$$

تابع چگالی منقطع را به‌ازای $X>\frac{۱}{۲}$ به‌دست آورید.

۲۴-۲ در مسئله ۲۴-۱ میانگین منقطع و میانگین کامل را حساب کرده و مقایسه کنید.

۲۴-۳ در مسئله ۲۴-۱ واریانس منقطع و کامل را حساب کرده و مقایسه کنید.

۲۴-۴ X توزیع نمایی به صورت زیر دارد:

$$f(X)=\beta e^{-\beta X} \ , \ X>۰$$

توزیع منقطع را به ازای $X>۱$ به دست آوره، میانگین و واریانس منقطع و کامل را حساب کنید.

ضمیمه فصل بیست و چهارم: مدل‌های منقطع و سانسور شده در Stata

رگرسیون منقطع در Stata

فایل data22

بدین منظور مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Truncated regression → Linear model and related → Statistics

truncreg - Truncated regression

Model | by/if/in | Weights | SE/Robust | Reporting | Maximization

Dependent variable: — متغیر وابسته

Independent variables: — متغیرهای توضیحی

Suppress constant term

At least one truncation limit must be specified

Left-truncation limit: — عددی که نسبت به آن از سمت چپ منقطع است

Right-truncation limit: — عددی که نسبت به آن از سمت راست منقطع است

Options

Offset variable:

Constraints: Manage...

Keep collinear variables (rarely used)

OK Cancel Submit

با انتخاب OK نتایج تخمین عبارت است از:

```
. truncreg y z2 z3, ll(0)
(note: 451 obs. truncated)

Fitting full model:

Iteration 0:   log likelihood = -410.14116
Iteration 1:   log likelihood = -399.45616
Iteration 2:   log likelihood = -399.22152
Iteration 3:   log likelihood = -399.22047
Iteration 4:   log likelihood = -399.22047

Truncated regression
Limit:   lower =         0                 Number of obs  =     350
         upper =      +inf                 Wald chi2(2)   =    8.91
Log likelihood = -399.22047                Prob > chi2    =  0.0116
```

y	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
z2	-.0752606	.127822	-0.59	0.556	-.3257872	.175266
z3	.5902246	.238508	2.47	0.013	.1227574	1.057692
_cons	-.9384239	3.725807	-0.25	0.801	-8.240871	6.364024
/sigma	6.030982	.792922	7.61	0.000	4.476883	7.58508

اثر نهایی x بر y با فرمان mfx به دست می‌آید:

```
. mfx

Marginal effects after truncreg
      y  = Fitted values (predict)
         =  2.1731089
```

variable	dy/dx	Std. Err.	z	P>|z|	[95% C.I.	]	X
z2	-.0752606	.12782	-0.59	0.556	-.325787	.175266	33.42
z3	.5902246	.23851	2.47	0.013	.122757	1.05769	9.53195

رگرسیون منقطع را می‌توان با فرمان زیر نیز برآورد نمود:

truncreg y z2 z3, ll(a)

ll(a) بیانگر رگرسیون منقطع در سمت چپ a است. به جای سمت چپ می توان از سمت راست آن را منقطع نمود که در این صورت از ul(a) استفاده می‌کنیم.

تخمین رگرسیون سانسورشده (مدل توبیت) در Stata

بدین منظور مسیر زیر را دنبال می‌کنیم:

Tobit regression → censored regression → Linear model and related → Statistics

tobit - Tobit regression

Model | by/if/in | Weights | SE/Robust | Reporting | Max options

Dependent variable: y — متغیر وابسته

Independent variables: z2 z3 — متغیرهای توضیحی

Specify at least one censoring limit

- No left-censoring limit
- Left-censoring at minimum
- Specified left-censoring limit: 0
- No right-censoring limit
- Right-censoring at maximum
- Specified right-censoring limit:

Offset variable: (optional)

OK | Cancel | Submit

عددی که داده‌ها نسبت به آن از سمت راست سانسور شده‌اند

عددی که داده‌ها نسبت به آن از سمت چپ سانسور شده‌اند

با انتخاب OK نتایج به صورت زیر به دست می‌آید:

فرمان برآورد مدل توبیت — سانسور شده از سمت چپ صفر — کل مشاهدات

```
. tobit y z2  z3, ll(0)

Tobit regression                                  Number of obs   =        601
                                                  LR chi2(2)      =      22.65
                                                  Prob > chi2     =     0.0000
Log likelihood = -733.41076                       Pseudo R2       =     0.0152
```

y	Coef.	Std. Err.	t	P>|t|	[95% Conf.	Interval]
z2	-.1754231	.0836462	-2.10	0.036	-.3396985	-.0111476
z3	.6015588	.1415959	4.25	0.000	.323474	.8796435
_cons	-5.406814	2.082047	-2.60	0.010	-9.495813	-1.317815
/sigma	9.049476	.615156			7.841351	10.2576

```
Obs. summary:        451  left-censored observations at y<=0
                     150     uncensored observations
                       0 right-censored observations
```

تعداد داده های سانسورشده در سمت چپ — تعداد داده‌های مورد استفاده — تعداد داده های سانسورشده در سمت راست

برای محاسبه اثرات نهایی، بعد از برآورد مدل توبیت، فرمان mfx را اجرا می‌کنیم که نتایج آن به صورت زیر است:

```
. mfx

Marginal effects after tobit
      y  = Fitted values (predict)
         = -6.1865102
```

variable	dy/dx	Std. Err.	z	P>|z|	[95% C.I.	]	X
z2	-.1754231	.08365	-2.10	0.036	-.339367	-.01148	32.4875
z3	.6015588	.1416	4.25	0.000	.324036	.879082	8.1777

مدل توبیت را می‌توان با فرمان‌های زیر برآورد نمود:

tobit y z2 z3,ll(a)
tobit y z2 z3, ul(a)

اولی برای سانسور کردن داده‌هایی است که کوچکتر از a و دومی برای سانسور کردن داده‌هایی است که بزرگتر از a هستند.

تخمین مدل پوآسن در Stata

به منظور برآورد مدل پوآسن، مسیر زیر را انتخاب می‌کنیم:

poison regression → count outcome → Statistics

poisson - Poisson regression
Model | by/if/in | Weights | SE/Robust | Reporting | Max options
Dependent variable: y
Independent variables: x2x3
Suppress constant term
Options
Exposure variable:
Offset variable:
Constraints:
Keep collinear variables (rarely used)
OK Cancel Submit

با انتخاب OK نتایج به صورت زیر به دست می‌آید:

```
. poisson y x2 x3

Iteration 0:   log likelihood =  -284.5462
Iteration 1:   log likelihood = -284.54617
Iteration 2:   log likelihood = -284.54617

Poisson regression                          Number of obs   =        103
                                            LR chi2(2)      =      16.85
                                            Prob > chi2     =     0.0002
Log likelihood = -284.54617                 Pseudo R2       =     0.0288
```

y	Coef.	Std. Err.	z	P>|z|	[95% Conf.	Interval]
x2	2.775334	.8191044	3.39	0.001	1.169919	4.380749
x3	-.3774065	.1745201	-2.16	0.031	-.7194596	-.0353535
_cons	1.72563	.0436563	39.53	0.000	1.640065	1.811194

برای برآورد اثرات نهایی می‌توان از فرمان mfx استفاده نمود:

```
. mfx

Marginal effects after poisson
      y  = predicted number of events (predict)
         =  5.4098315
```

variable	dy/dx	Std. Err.	z	P>|z|	[95% C.I.	]	X
x2	15.01409	4.38421	3.42	0.001	6.4212	23.607	-.001598
x3*	-1.757667	.69194	-2.54	0.011	-3.11384	-.401491	.087379

(*) dy/dx is for discrete change of dummy variable from 0 to 1

مدل پوآسن را می‌توان با استفاده از فرمان زیر نیز برآورد نمود:

Poisson y x2 x3

فصل بیست و پنجم

مقدمه‌ای بر اقتصاد سنجی بیزین

۱-۲۵ مقدمه

در فصل‌های قبلی، مباحثی راجع به تخمین رگرسیون به روش‌های کلاسیک (مانند OLS و ML) ارائه شد. ویژگی مهم روش‌های کلاسیک استفاده از اطلاعاتی است که عمدتاً از نمونه‌گیری‌ها به‌دست می‌آید. در این میان، قضاوت‌های ذهنی هیچ نقشی ندارند. مثال معروفی که معمولاً به آن ارجاع می‌شود، احتمال آمدن باران است. به‌عنوان مثال بر اساس تجربیات (اطلاعات نمونه)، احتمال آمدن باران در یک روز معین را ۴۰ درصد می‌دانیم. ولی بدیهی است که راجع به احتمال آمدن باران، صرفاً بر اساس تجربیات قضاوت نمی‌کنیم، بلکه قسمت عمده‌ای از آن ناشی از قضاوت‌های ذهنی می‌باشد. یا به‌عنوان مثال، قبل از انجام بازی فوتبال معتقدیم که با احتمال ۸۰ درصد، تیم مورد نظر بازی را خواهد برد. این قضاوت متأثر از اطلاعات گذشته و قضاوت‌های ذهنی است و بیانگر باور ما راجع به وقوع یک حادثه است و لزوماً با احتمال تجربی، یکسان نیست. اینها بیانگر «احتمال ذهنی» هستند. به‌عبارت دیگر در اینجا یک پارامتر را بر اساس احتمالات ذهنی و تجربی و نه صرفاً بر اساس مشاهدات تجربی (نمونه)، برآورد می‌کنیم.

در این فصل، تخمین رگرسیون بیزین را بررسی خواهیم کرد که هم از داده‌های نمونه و هم از قضاوت‌های ذهنی (غیر نمونه‌ای) استفاده می‌کند. اما قبل از آن لازم است مفاهیم مربوط به روش بیزین را بررسی کنیم.

۲-۲۵ توزیع پیشین[1] و پسین[2]

«احتمال ذهنی»[3] راجع به یک پارامتر (مثلاً میانگین) بیانگر باور و قضاوت ما در مورد آن پارامتر است. در واقع چون این پارامتر مجهول است ما آن را بر اساس قضاوت‌های ذهنی، تخمین می‌زنیم. به‌عبارت دیگر قبل از آنکه وارد بحث نمونه‌گیری (جمع‌آوری اطلاعات) شویم، راجع به پارامتر موردنظر (θ) دارای یک ذهنیت هستیم و با ذهن خالی وارد قضاوت نمی‌شویم. بنابراین θ یک پارامتر ثابت نیست که براساس داده‌های نمونه آن را تخمین بزنیم، بلکه θ برای ما مانند یک متغیر تصادفی خواهد بود که دارای توزیع معینی است که به آن «توزیع پیشین» می‌گوییم. این توزیع پیشین بر اساس قضاوت‌های ذهنی شکل می‌گیرد.

مثال ۱-۲۵: فرض کنید که راجع به وضعیت هوا می‌خواهید یک تحلیل آماری انجام دهید. وضعیت هوا را با θ نشان داده که θ_1 وضعیت بارانی و θ_2 وضعیت آفتابی را نشان می‌دهد. بنابراین اگر از نظر شما احتمال هوای بارانی برابر با ۰/۴ و احتمال هوای آفتابی ۰/۶ باشد، توزیع ذهنی یا توزیع پیشین θ برابر است با:

θ	θ_1	θ_2
$P(\theta)$	۰/۴	۰/۶

مثال ۲-۲۵: فرض کنید در پرتاب یک سکه، احتمال آمدن شیر برابر با θ باشد. بر اساس قضاوت‌های ذهنی خود، راجع به θ حدس‌هایی داریم. یکی از این حدس‌ها می‌تواند این باشد که توزیع پیشین θ به‌صورت یکنواخت است:

$$P(\theta)=1 \quad ; \quad 0<\theta<1$$

که دارای میانگین $E(\theta)=\frac{1}{2}$ می‌باشد.

مثال ۳-۲۵: فرض کنید می‌خواهیم راجع به میانگین نمرات درس آمار (μ) قضاوت کنیم. حدس قبلی یا ذهنی ما این است که پارامتر μ دارای توزیع نرمال با میانگین μ_0 و واریانس σ_0^2 می‌باشد. بدین‌ترتیب «توزیع پیشین» μ عبارت است از:

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \quad ; \quad -\infty<\mu<+\infty$$

1- prior distribution
2- posterior distribution
3- subjective probability

به‌هرحال بر اساس قضاوت‌های ذهنی برای پارامتر θ یک توزیع در نظر گرفته می‌شود. اما بر اساس داده‌های نمونه یا مشاهدات تجربی، برای پارامتر θ یک «تخمین‌زننده» تعریف می‌شود. در فصول قبلی تخمین‌زننده‌های کلاسیک را بررسی کردیم. در روش کلاسیک فرض می‌شود θ یک عدد ثابت است که می‌خواهیم آن را برآورد کنیم. در روش کلاسیک، تخمین‌زننده‌ای مانند Y معرفی می‌شود که Y یک متغیر تصادفی با توزیع $f(Y|\theta)$ می‌باشد که θ مقدار ثابتی است. در اینجا Y فقط بر مبنای داده‌های نمونه تعریف می‌شود و لذا $f(Y|\theta)$ فقط از اطلاعات موجود در نمونه استفاده می‌کند و در آن، قضاوت‌های ذهنی هیچ نقشی ندارند.

مثال ۴-۲۵: برای تخمین میانگین توزیع نرمال (μ)، میانگین نمونه ($\bar{X}$) به‌عنوان تخمین‌زننده معرفی می‌شود. $\bar{X}$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس $\frac{\sigma^2}{n}$ است. توزیع $\bar{X}$ با فرض ثابت بودن μ عبارت است از:

$$f(\bar{x}|\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2/n}} \quad ; \quad -\infty<\bar{x}<+\infty$$

در اینجا μ «مجهول» است و نه «تصادفی». همچنین برای سادگی فرض شده که σ^2 معلوم است.

اکنون می‌توان قضاوت‌های ذهنی (توزیع پیشین) و داده‌های نمونه (توزیع تخمین‌زننده) را با هم ترکیب نمود و «توزیع پسین» را به‌دست آورد. لذا $P(\theta)$ که توزیع پیشین است با توجه به اطلاعات موجود در Y (که تخمین‌زنندهٔ θ بر اساس داده‌های نمونه می‌باشد) مورد تجدید نظر قرار می‌گیرد و توزیع جدیدی برای θ به‌دست می‌آید که موسوم به «توزیع پسین» است که با $P(\theta|Y)$ نشان داده می‌شود:

$$P(\theta|Y)=\frac{P(\theta,Y)}{P(Y)}=\frac{P(\theta)P(Y|\theta)}{P(Y)} \qquad \text{ناپیوسته}$$

(۲-۲۲)

$$f(\theta|Y)=\frac{f(\theta,Y)}{f(Y)}=\frac{f(\theta)f(Y|\theta)}{f(Y)} \qquad \text{پیوسته}$$

مثال ۵-۲۵: در مثال ۱-۲۵ توزیع پیشین برای وضعیت هوا در یک روز معین به‌صورت زیر داده شد:

وضعیت هوا (θ)	بارانی (θ_1)	آفتابی (θ_2)
$P(\theta)$	$P(\theta_1)=0/4$	$P(\theta_2)=0/6$

فرض کنید اطلاعات جدیدی را سازمان هواشناسی ارائه می‌کند. اما سازمان هواشناسی هوای بارانی را با احتمال ۰/۹ و هوای آفتابی را با احتمال ۰/۸، درست پیش‌بینی می‌کند. بنابراین پیش‌بینی‌کننده یا تخمین‌زنندهٔ وضعیت هوا (θ) را با Y نشان می‌دهیم که همان سازمان هواشناسی است. $Y=Y_1$ بیانگر پیش‌بینی هوای بارانی و $Y=Y_2$ بیانگر پیش‌بینی هوای آفتابی است.

وضعیت هوا (θ) / پیش‌بینی وضع هوا (Y)	بارانی (θ_1)	آفتابی (θ_2)
Y_1 (بارانی)	$P(Y_1\|\theta_1)=0/9$	$P(Y_1\|\theta_2)=0/2$
Y_2 (آفتابی)	$P(Y_2\|\theta_1)=0/1$	$P(Y_2\|\theta_2)=0/8$
جمع	۱	۱

حال با توجه به اطلاعات جدیدی که از طرف سازمان هواشناسی (یعنی Y) ارائه می‌شود، می‌توان احتمال‌های پیشین را بازنگری نمود و احتمال‌های پسین را به‌دست آورد. اما ابتدا باید احتمال بارندگی (Y_1) را حساب کنیم. بدین منظور احتمال‌های زیر را محاسبه می‌کنیم:

$$P(Y_1\cap\theta_1)=P(\theta_1)P(Y_1|\theta_1)=(0/4)(0/9)=0/36$$

$$P(Y_1\cap\theta_2)=P(\theta_2)P(Y_1|\theta_2)=(0/6)(0/2)=0/12$$

$$P(Y_1)=P(Y_1\cap\theta_1)+P(Y_1\cap\theta_2)=0/36+0/12=0/48$$

$P(Y_1)$ برابر با احتمال پیش‌بینی هوای بارانی از سوی سازمان هواشناسی است. حال احتمال‌های پسین را به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$P(\theta_1|Y_1)=\frac{P(Y_1\cap\theta_1)}{P(Y_1)}=\frac{0/36}{0/48}=0/75$$

$$P(\theta_2|Y_1)=\frac{P(Y_1\cap\theta_2)}{P(Y_1)}=\frac{0/12}{0/48}=0/25$$

بنابراین، توزیع پسین عبارت است:

وضعیت هوا (θ)	بارانی (θ_1)	آفتابی (θ_2)
$P(\theta\|Y_1)$	$P(\theta_1\|Y_1)=0/75$	$P(\theta_2\|Y_1)=0/25$

مثال ۶-۲۵: در مثال ۳-۲۵ برای تخمین میانگین جامعه، توزیع پیشین عبارت است از:

$$f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

از طرف دیگر بر اساس داده‌های نمونه، توزیع تخمین‌زنندهٔ μ یعنی $\overline{X}$ با فرض معلوم بودن σ^2، در مثال ۴-۲۵ به‌صورت زیر به‌دست آمد:

$$f(\overline{X}|\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2/n}}$$

بر اساس توزیع پیشین و توزیع $\overline{X}$، می‌توان توزیع پسین را به‌دست آورد.

$$f(\mu|\overline{X})=\frac{f(\mu,\overline{x})}{f(\overline{x})}=\frac{f(\mu)f(\overline{X}|\mu)}{f(\overline{X})}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}}e^{-\frac{(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2/n}}}{f(\overline{X})}$$

$$=\frac{n}{2\pi\sigma_0\sigma f(\overline{X})}e^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}-\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$=ke^{-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}-\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

که $k=\frac{n}{2\pi\sigma_0\sigma f(\overline{X})}$ است. توجه شود که k مستقل از پارامتر μ است. توجه داریم که اگر $f(\mu,\overline{X})$ توزیع مشترک μ و $\overline{X}$ باشد، آنگاه $f(\overline{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\mu,\overline{X})d\mu$ است و لذا $f(\overline{X})$ مستقل از μ خواهد بود. حال جمله‌ای را که در توان e آمده است، به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}-\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\mu^2+\left(\frac{n\overline{X}}{\sigma^2}+\frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\mu-\frac{1}{2}\left(\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}+\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\left(\mu^2-2\frac{n\overline{X}\sigma_0^2+\mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}\mu\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}+\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}\right)$$

حال عبارات زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}=\frac{1}{\sigma_1^2}$$

$$\frac{n\overline{X}\sigma_0^2+\mu_0\sigma^2}{n\sigma_0^2+\sigma^2}=\mu_1$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{n\overline{X}^2}{\sigma^2}+\frac{\mu_0^2}{\sigma_0^2}\right)=k_1$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}-\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{2\sigma^2}=-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left(\mu^2-2\mu_1\mu\right)+k_1$$

$$=-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\mu-\mu_1)^2+k_2$$

$$k_2=k_1+\frac{\mu_1^2}{2\sigma_1^2}$$

بنابراین، توزیع پسین μ عبارت است از:

$$f(\mu|\overline{X})=ke^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(\mu-\mu_1)^2+k_2}$$

$$=ke^{k_2}e^{\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

بدین ترتیب $f(\mu|\overline{X})$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ_1 و واریانس σ_1^2 می‌باشد و لذا اگر ke^{k_2} را نیز ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$f(\mu|\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

مثال ۷-۲۵: فرض کنید می‌خواهیم پارامتر p در توزیع دونقطه‌ای (تابع احتمال برنولی) را تخمین بزنیم:

$$P(X)=p^X(1-p)^{1-X}\quad;\quad X=0,1$$

همچنین فرض کنید که توزیع پیشین p به‌صورت توزیع یکنواخت باشد:

$$f(p)=1\quad;\quad 0<p<1$$

اکنون برای برآورد دقیق‌تری از پارامتر p، نمونه‌ای به حجم n انتخاب می‌شود. توزیع پیشین p را به‌دست آورید.

اگر تخمین‌زنندهٔ نمونه‌ای p را به‌صورت $\overline{X}=\frac{Y}{n}$ تعریف کنیم (که $Y=X_1+...+X_n$ می‌باشد)، توزیع $\overline{X}$ با فرض ثابت بودن p به‌صورت دوجمله‌ای خواهد بود:

$$P(\overline{X}|p)=P(Y|p)=C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y}\quad;\quad Y=0,1,2,...n$$

که $C_n^Y=\frac{n!}{Y!(n-Y)!}$ است. از طرف دیگر توزیع مشترک Y و p عبارت است از:

$$f(p,Y)=f(p)P(Y|p)=1\times C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y}=C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y}$$

و لذا $f(Y)$ برابر است با[1]:

$$f(Y)=\int_0^1 f(p,Y)dp=\int_0^1 C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y}dp$$

$$=C_n^Y\int_0^1 p^Y(1-p)^{n-Y}dp=C_n^Y\frac{Y!(n-Y)!}{(n+1)!}$$

$$=\frac{n!}{Y!(n-Y)!}\frac{Y!(n-Y)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

اکنون توزیع پسین را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(p|Y)=\frac{P(p,Y)}{P(Y)}=\frac{C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y}}{\frac{1}{n+1}}$$

$$=(n+1)C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y}\quad;\quad 0<p<1$$

۱- توجه شود که این انتگرال مشابه انتگرال‌گیری از تابع چگالی بتا است:

$$\int_0^1 X^k(p-X)^h dX=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(h+1)}{\Gamma(k+h+2)}=\frac{k!h!}{(k+h+1)!}$$

۳-۲۵ تخمین‌زنندهٔ بیزین

روش کلاسیک (مانند روش حداکثر درستنمایی) برای تخمین پارامترها از تابع درستنمایی استفاده می‌کند که پارامتر ثابت و مجهول θ (اما نه تصادفی) با مشتق‌گیری از تابع درستنمایی به‌دست می‌آید. این تابع صرفاً بر اساس داده‌های نمونه به‌دست می‌آید و لذا تخمین‌زنندهٔ آن نیز فقط تابعی از متغیرهای نمونه است و سایر اطلاعات (مانند قضاوت‌های ذهنی) در آن دخالتی ندارد. به‌عنوان مثال برای تخمین میانگین جامعهٔ نرمال (μ)، تخمین‌زنندهٔ $\bar{X}$ به‌دست می‌آید[1].

در روش بیزین برای تخمین پارامتر θ به‌جای تابع درستنمایی از توزیع پسین استفاده می‌شود. اگر در اینجا نیز بخواهیم از روش حداکثر درستنمایی استفاده کنیم بایستی از توزیع پسین یعنی $f(\theta|Y)$ نسبت به θ مشتق بگیریم. بنابراین، تخمین‌زنندهٔ θ هم تابعی از داده‌های نمونه است و هم تابعی از قضاوت‌های ذهنی (یا اطلاعات غیرنمونه‌ای) می‌باشد. این تخمین‌زننده را با $\tilde{\theta}$ نشان می‌دهیم که معروف به تخمین‌زنندهٔ بیزین است.

$$\tilde{\theta}=g(\theta_{\circ},Y) \qquad (۲-۲۵)$$

که $\theta_{\circ}$ حدس قبلی راجع به θ و Y نیز اطلاعات نمونه می‌باشد.

مثال ۸-۲۵: در مثال ۶-۲۵ توزیع پسین μ برای جامعهٔ نرمال به‌صورت زیر به‌دست آمد:

$$f(\mu|\bar{X})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(\mu-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad ; \; -\infty<\mu<+\infty$$

که μ_1 و σ_1^2 برابرند با:

$$\mu_1=\frac{n\sigma_{\circ}^2\bar{X}+\sigma^2\mu_{\circ}}{n\sigma_{\circ}^2+\sigma^2} \quad , \quad \frac{1}{\sigma_1^2}=\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_{\circ}^2}$$

در توزیع پسین، امید ریاضی μ برابر با μ_1 است. بنابراین می‌توان از μ_1 به‌عنوان تخمین‌زنندهٔ μ استفاده کرد. حال می‌توان μ_1 را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mu_1=\frac{n\sigma_{\circ}^2}{n\sigma_{\circ}^2+\sigma^2}\bar{X}+\frac{\sigma^2}{n\sigma_{\circ}^2+\sigma^2}\mu_{\circ}$$

$$\mu_1=w\bar{X}+(1-w)\mu_{\circ}$$

۱- فصل نهم را ببینید.

که $w=\frac{n\sigma_{\circ}^2}{n\sigma_{\circ}^2+\sigma^2}$ است. بنابراین، تخمین بیزین پارامتر μ برابر با متوسط وزنی از داده‌های نمونه ($\bar{X}$) و حدس‌های قبلی ($\mu_{\circ}$) می‌باشد. در تخمین کلاسیک، $w=1$ است یعنی فقط از $\bar{X}$ استفاده می‌شود. توجه شود که w را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$w=\frac{\sigma_{\circ}^2}{\sigma_{\circ}^2+\frac{\sigma^2}{n}}$$

بدین ترتیب w بستگی به واریانس توزیع پیشین یعنی $\sigma_{\circ}^2$ و واریانس توزیع $\bar{X}$ یعنی $\frac{\sigma^2}{n}$ دارد. هر چه پراکندگی مشاهدات نمونه بیشتر باشد (یعنی $\frac{\sigma^2}{n}$ بیشتر باشد) در این صورت سهم $\bar{X}$ کمتر می‌شود. به‌عبارت دیگر سهم $\bar{X}$ با واریانس آن رابطه عکس دارد. همچنین سهم $\mu_{\circ}$ (حدس‌های قبلی) با پراکندگی این حدس‌ها ($\sigma_{\circ}^2$) رابطه عکس دارد.

مثال ۹-۲۵: فرض کنید که در مورد میانگین نمرات درس آمار، حدس می‌زنیم که میانگین نمرات برابر با $\mu_{\circ}=12$ با انحراف معیار $\sigma_{\circ}=3$ باشد.
حال فرض کنید که از این دانشجویان نمونه‌ای به حجم $n=16$ انتخاب می‌شود. با فرض اینکه پراکندگی نمرات در جامعه آماری $\sigma=8$ باشد، میانگین نمونه $\bar{X}=14$ به‌دست آید. تخمین بیزین از میانگین جامعه عبارت است از:

$$\mu_1=w\bar{X}+(1-w)\mu_{\circ}$$

$$w=\frac{\sigma_{\circ}^2}{\sigma_{\circ}^2+\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{9}{9+\frac{64}{16}}=0/692$$

$$\mu_1=(0/692)(14)+(1-0/692)(12)=13/385$$

بدین ترتیب تخمین بیزین برابر با ۱۳/۳۸۵ و تخمین کلاسیک برابر با $\bar{X}=14$ می‌باشد.

۴-۲۵ تابع زیان

هر تصمیم‌گیری معمولاً دارای یک تابع هدف است که بایستی حداقل یا حداکثر شود. اگر تابع زیان را در مسئله تصمیم‌گیری وارد کنیم، در این صورت فرد به‌دنبال حداقل نمودن زیان

می‌باشد. بدین منظور فروشنده‌ای را در نظر بگیرید که در روزهای جمعه در نزدیکی یک پارک اقدام به فروش نوشابه و چای می‌کند. برای سادگی فرض کنید که وی سه انتخاب دارد:

a_1 = فروش چای

a_2 = فروش نوشابه و چای

a_3 = فروش نوشابه

اگر وی a_1 را انتخاب کند، در صورتی که هوا بارانی باشد سود او ۲۰۰۰۰ ریال و در صورتی که آفتابی باشد زیان او ۱۰۰۰۰ ریال خواهد بود. از آنجا که ارقام را بر حسب زیان بیان می‌کنیم، لذا این ارقام را به ترتیب با ۲۰۰۰۰- و ۱۰۰۰۰ نشان می‌دهیم. تمامی وضعیت‌های ممکن در جدول زیر نشان داده شده است:

وضعیت هوا (θ) / پیش‌بینی وضع هوا (Y)	بارانی (θ_1)	آفتابی (θ_2)
a_1 = فروش چای	۲۰-	۱۰
a_2 = فروش نوشابه و چای	۵	۵
a_3 = فروش نوشابه	۲۵	۷-

فرض کنید که توزیع احتمالات درباره وضعیت هوا به‌صورت زیر است:

وضعیت هوا (θ)	بارانی (θ_1)	آفتابی (θ_2)
$P(\theta)$	$P(\theta_1)=۰/۲$	$P(\theta_2)=۰/۸$

اگر فروشنده بخواهد سود بلندمدت خود را حداکثر نماید، بهترین انتخاب او چیست؟

اگر وی a_1 را انتخاب کند، زیان انتظاری یا زیان متوسط (امید ریاضی) او برابر است با:

$$L(a_1)=-۲۰(۰/۲)+۱۰(۰/۸)=۴$$

اگر a_2 و یا a_3 را انتخاب کند، زیان انتظاری برابر است با:

$$L(a_2)=۵(۰/۲)+۵(۰/۸)=۵$$

$$L(a_3)=۲۵(۰/۲)-۷(۰/۸)=-۰/۶$$

چون زیان انتظاری حاصل از a_3 کمتر از بقیه است، لذا وی a_3 را انتخاب می‌کند. انتخاب a_3 می‌تواند در بلندمدت زیان او را حداقل نماید، زیرا زیان بلندمدت ناشی از a_1 و a_2 به‌ترتیب ۴ و ۵ می‌باشد.

در حالت کلی، زیان انتظاری یا امید ریاضیِ زیان که ناشی از انتخاب a_k است برابر است با:

$$L(a_k)=\sum_{i=1}^{n}L(a_k,\theta_i)P(\theta_i) \qquad (۲۵-۳)$$

$L(a_k,\theta_i)$ زیان ناشی از انتخاب a_k و وقوع وضعیت θ_i است.

احتمال $P(\theta)$ بایستی بیانگر بهترین احتمال راجع به موضوع مورد نظر باشد. در روش بیزین احتمال ذهنی با داده‌های نمونه ترکیب می‌شوند و از $P(\theta|Y)$ استفاده می‌گردد. بنابراین در محاسبه امید ریاضیِ زیان از $P(\theta|Y)$ به‌جای $P(\theta)$ استفاده می‌شود.

۲۵-۵ تخمین به‌عنوان مسئلهٔ تصمیم‌گیری

مثال قبلی که راجع‌به وضعیت هوا و انتخاب‌های a_1، a_2 و a_3 بود، در واقع یک مسئلهٔ تصمیم‌گیری است. در این مثال، انتخاب‌ها و وضعیت هوا غیرعددی بودند و بیانگر موضوعات کیفی هستند. اما می‌توان مثال‌های عددی نیز در این زمینه ارائه نمود.

فرض کنید که وضعیت تورم در کشور بر اساس احتمال پیشین به‌صورت زیر پیش‌بینی شود. ارقام این جدول بیانگر وضعیت‌های احتمالی تورم در سال آینده می‌باشد که به‌هرحال یکی از آنها رخ خواهد داد.

وضعیت تورم (θ)	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
$P(\theta)$	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۳	۰/۱

حال فرض کنید که بانک مرکزی می‌خواهد تورم را پیش‌بینی کند تا براساس ارزیابی و اطلاعات خودش نرخی را برای تورم سال آینده در نظر بگیرد و متناسب با آن سیاست‌های خود را انتخاب نماید. بدیهی است که با هر روشی که تورم را پیش‌بینی کند، دچار خطا خواهد شد. این خطاها باعث می‌شود تا سیاست‌هایی اتخاذ نماید که زیان‌هایی را به اعتبار بانک مرکزی و به کشور وارد نماید. بنابراین زیان حاصله، تابعی از میزان خطا می‌باشد. θ مقدار تورم در هر یک از

وضعیت‌های احتمالی است و وضعیت a بیانگر برآورد بانک مرکزی از تورم است. بانک مرکزی می‌تواند براساس توزیع پیشین، محتمل‌ترین وضعیت را برای تورم درنظر بگیرد که برابر با ۱۸ درصد می‌باشد (در واقع همان مد یا نما است که بیشترین احتمال را دارد). اما روش دیگر این است که متوسط تورم را که برابر با ۱۶/۸ درصد می‌باشد به‌عنوان تخمین تورم به‌کار گیرد. روش دیگر می‌تواند استفاده از میانه به‌عنوان تخمین تورم باشد که در این صورت برابر با ۱۷ درصد خواهد بود. روش دیگر می‌تواند استفاده از مدل‌هایی باشد که برای برآورد تورم توسط کارشناسان بانک مرکزی ساخته شده است. فرض کنید ۳ مدل اقتصادی نیز وجود دارد که نرخ تورم را به ترتیب ۱۶/۹، ۱۶/۷ و ۱۶ درصد پیش‌بینی می‌کنند.

بنابراین نرخ تورم واقعی برابر با θ است که احتمال آن $P(\theta)$ می‌باشد، ولی a بیانگر تخمین بانک مرکزی از تورم است. فرض کنید زیان ناشی از خطای پیش‌بینی به‌طور ساده به‌صورت تابع درجه دوم باشد که به‌خاطر ویژگی‌های خاصی که دارد معمولاً از چنین توابعی استفاده می‌کنند.

$$L(a,\theta)=(a-\theta)^{۲} \qquad (۲۵-۴)$$

بر اساس (۴-۲۵)، زیان‌های حاصله در جدول زیر نشان داده شده است:

$P(\theta)$	۰/۱	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۳	۰/۱	زیان انتظاری $= L(a,\theta)$
وضعیت تورم (θ) / پیش‌بینی تورم (a)	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	$=\sum_{i=1}^{۶} P(\theta_i)(a-\theta_i)^{۲}$
نما ۱۸	۱۶	۹	۴	۱	۰	۱	۳/۶۰
میانه ۱۷	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۲/۲۰
میانگین ۱۶/۸	۷/۸۴	۳/۲۴	۰/۶۴	۰/۰۴	۱/۴۴	۴/۸۴	۲/۱۶
مدل I ۱۶/۹	۸/۴۱	۳/۶۱	۰/۸۱	۰/۰۱	۱/۲۱	۴/۴۱	۲/۱۷
مدل II ۱۶/۷	۷/۲۹	۲/۸۹	۰/۴۹	۰/۰۹	۱/۶۹	۵/۲۹	۲/۱۷
مدل III ۱۶	۴	۱	۰	۱	۴	۹	۲/۷۰

بنابراین اگر تابع زیان به‌صورت (۴-۲۵) باشد، حداقل زیان وقتی به‌دست آید که از میانگین به‌عنوان تخمین تورم استفاده شود. توجه شود که نقش تابع زیان بسیار مهم است. اگر بانک مرکزی واقعاً یک تابع زیان را برای تصمیمات و پیش‌بینی‌های خود در نظر بگیرد و عواقب تصمیماتش به او برگردد، در این صورت ملزم به اتخاذ بهترین تصمیم خواهد بود. اما اگر چنین

تابعی نداشته باشد، الزاماً تصمیمات او همراه با کمترین زیان نخواهد بود. مثلاً فرض کنید که تابع زیان به‌صورت زیر باشد:

$$L(a,\theta)\begin{cases}=۰ & a=\theta\\ =۱ & a\neq\theta\end{cases} \qquad (۲۵-۵)$$

در این تابع زیان، هر چقدر خطا بزرگ یا کوچک باشد، زیان آن فقط ۱ است. در این صورت کمترین زیان برابر با ۵ خواهد بود که از انتخاب نما یا میانه و یا مدل III به‌دست می‌آید. به‌هرحال طبق تابع زیان درجهٔ دوم، کمترین زیان در جایی است که $a=\theta$ باشد و هر چه خطا بیشتر باشد، مقدار زیان نیز بیشتر خواهد بود.

نکته دیگر این است که اگر احتمالات پیشین را با داده‌های نمونه تلفیق کنیم، می‌توان به‌جای احتمالات پیشین یعنی $P(\theta)$ از احتمالات پسین یعنی $P(\theta|Y)$ استفاده نمود.

۶-۲۵ تخمین بیزین و کلاسیک

همان‌طور که گفته شد در تخمین کلاسیک، پارامتر θ یک مقدار ثابت ومجهول است که بدون هیچ ذهنیت قبلی، آن را با استفاده از داده‌های نمونه تخمین می‌زنیم. اما در روش بیزین، پارامتر θ به‌عنوان یک متغیر تصادفی است که راجع به آن یک ذهنیت قبلی به نام توزیع پیشین داریم. تفاوت بین این دو روش را براساس تخمین میانگین جامعه نرمال (μ) با استفاده از تابع نمونه‌ای $\overline{X}$ بیان می‌کنیم.

ابتدا فرض کنید نمونه‌ای به حجم $n=۱۰$ انتخاب شده که براساس داده‌های آن $\overline{X}=۲۰$ به‌دست آمده است همچنین فرض کنید که واریانس جامعه، معلوم بوده و برابر با $\sigma^{۲}=۱۰$ می‌باشد. در این صورت تخمین نقطه‌ای و فاصله‌ای در روش کلاسیک به‌صورت زیر می‌باشد:

تخمین نقطه‌ای کلاسیک: $\hat{\theta}=\overline{X}=۲۰$

تخمین فاصله‌ای کلاسیک: $\overline{X}\pm Z_{\frac{\alpha}{۲}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow ۲۰\pm۱/۹۶$ $\qquad (۲۵-۶)$

حال فرض کنید که توزیع پیشین μ به‌صورت زیر باشد:

$$f(\mu)=N(\mu,=۲۵,\sigma_{\cdot}^{۲}=۴)$$

همچنین توزیع $\overline{X}$ با فرض ثابت بودن μ عبارت است از:

$$f(\overline{X}|\mu)=N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}=\frac{10}{10}=1)$$

در بخش قبلی ثابت شد که توزیع پسین μ به‌صورت زیر است:

$$f(\mu|\overline{X})=N(\mu_1,\sigma_1^2)$$

به‌طوری که μ_1 و σ_1^2 عبارتند از:

$$\mu_1=w\overline{X}+(1-w)\mu_0 \quad , \quad w=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}} \qquad (۲۵-۷)$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2}=\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}$$

براین اساس تخمین بیزین برای μ عبارت است از:

$$w=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\frac{\sigma^2}{n}}=\frac{4}{4+1}=0/8$$

$$\tilde{\mu}=\mu_1=(0/8)(20)+(1-0/8)(25)=21$$

$$\frac{1}{\sigma_1^2}=\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}=\frac{10}{10}+\frac{1}{4}=1/25 \Rightarrow \sigma_1^2=\frac{1}{1/25}=0/8$$

بنابراین تخمین نقطه‌ای و فاصله‌ای بیزین عبارت است از:

تخمین نقطه‌ای بیزین: $\tilde{\mu}=\mu_1=21$

تخمین فاصله‌ای بیزین: $\mu_1 \pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_1 \Rightarrow 21\pm 1/96\sqrt{0/8} \Rightarrow 21\pm 1/753$

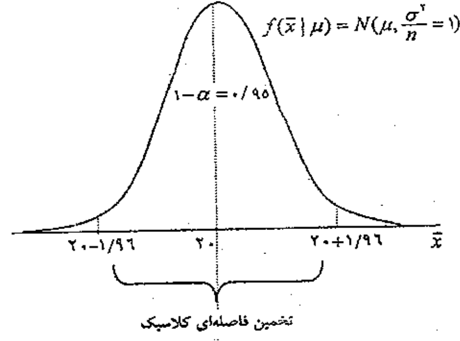
بدیهی است که طول فاصلهٔ اطمینان در روش کلاسیک برابر با $2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma^2/n}$ و در روش بیزین برابر $2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2}$ است. طول فاصله اطمینان در روش بیزین کمتر می‌باشد زیرا:

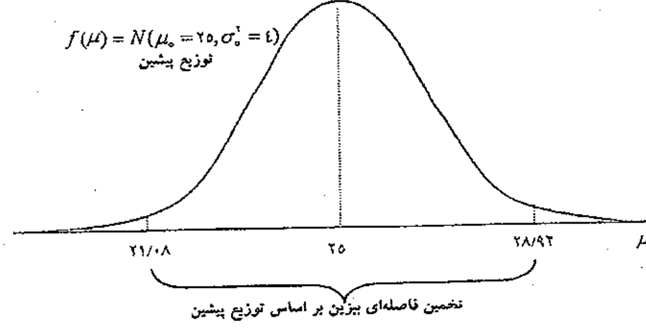
$$2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_1^2}<2Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Rightarrow \sqrt{\sigma_1^2}<\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \Rightarrow \sigma_1^2<\frac{\sigma^2}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sigma_1^2}>\frac{n}{\sigma^2}$$

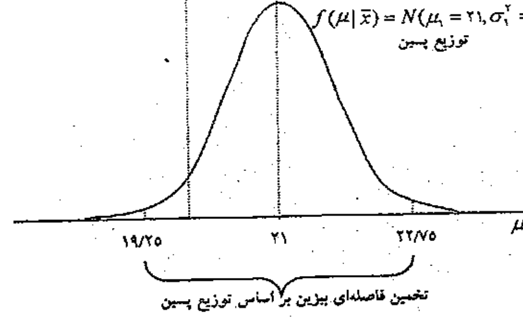
باجایگذاری به‌جای $\frac{1}{\sigma_1^2}$، نتیجه زیر به‌دست می‌آید و این ثابت می‌کند که طول فاصله اطمینان در روش بیزین، کوتاه‌تر می‌باشد.

$$\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}>\frac{n}{\sigma^2}$$

مقایسهٔ روش کلاسیک و بیزین در نمودار زیر تبیین شده است:







مثال ۱۰-۲۵: در مثال ۷-۲۵ تخمین‌زنندهٔ کلاسیک و بیزین پارامتر p را تعیین می‌کنیم.

فرض بر این بود که توزیع پیشین p، توزیع یکنواخت است:

$$f(p)=1 \;;\; 0<p<1$$

امید ریاضی پیشین برابر با $E(p)=\frac{1}{2}$ می‌باشد. همچنین توزیع پسین p به‌صورت زیر به‌دست آمد:

$$f(p|Y)=(n+1)C_n^Y p^Y (1-p)^{n-Y} \quad ; \quad 0<p<1$$

تخمین کلاسیک پارامتر p بر اساس داده‌های نمونه به‌دست می‌آید. اگر نمونه‌ای به حجم n از جامعه‌ای با توزیع دونقطه‌ای انتخاب شود و $\overline{X}=\frac{Y}{n}$ را به‌عنوان تخمین‌زننده p انتخاب کنیم. این تخمین‌زننده دارای توزیع دوجمله‌ای می‌باشد:

$$P(\overline{X}|p)=P(Y|p)=C_n^Y p^Y (1-p)^{n-Y} \;;\; Y=0,1,2,...,n$$

$$E(\overline{X})=E(X)=p \quad , \quad \text{var}(\overline{X})=\frac{\text{var}(X)}{n}=\frac{pq}{n}$$

امید ریاضی توزیع پسین بیانگر تخمین بیزین برای پارامتر p است که برابر است با:

$$E(p|Y)=\int_0^1 pf(p|Y)dp=(n+1)C_n^Y\int_0^1 p^{Y+1}(1-p)^{n-Y}dp$$

$$=(n+1)C_n^Y\frac{(Y+1)!(n-Y)!}{(n+2)!}$$

$$=(n+1)\frac{n!}{(n-Y)!Y!}\frac{(Y+1)Y!(n-Y)!}{(n+2)(n+1)n!}=\frac{Y+1}{n+2}$$

بنابراین، تخمین بیزین را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$E(p|Y)=E(p|\overline{X})=\frac{Y+1}{n+2}=\frac{Y}{n+2}+\frac{1}{n+2}$$

$$=\frac{n}{n+2}\frac{Y}{n}+\frac{1}{n+2}\times\frac{2}{2}=\frac{n}{n+2}\overline{X}+\frac{2}{n+2}\times\frac{1}{2}$$

$$=w\overline{X}+(1-w)\frac{1}{2}=w\overline{X}+(1-w)E(p)$$

که $w=\frac{n}{n+2}$ بیانگر وزن داده‌های نمونه‌ای (یعنی $\overline{X}$) و $1-w$ بیانگر وزن داده‌های ذهنی (یعنی $E(p)$) است. اگر $n=2$ باشد وزن داده‌های نمونه و قضاوت‌های ذهنی برابر می‌شود. اما برای $n>2$ وزن $\overline{X}$ بیشتر می‌گردد.

۷-۲۵ آزمون فرضیه در روش بیزین

فرض کنید که پیش‌بینی دو سطح نرخ بیکاری وجود دارد: یکی U_0 که نرخ بیکاری پایین را نشان می‌دهد و دیگری U_1 که بیانگر نرخ بیکاری بالا است. U_1 پیامد مناسبی برای اقتصاد و دولت ندارد و مقابله با آن نیازمند یک سیاست پولی انبساطی شدید است که برای اقتصاد پرهزینه است، زیرا ممکن است اقتصاد را وارد یک دوره تورمی کند که به اعتبار دولت صدمه می‌زند. حال تصور کنید که علائمی از بیکاری مشاهده شده است ولی هنوز کاملاً قطعی نیست و اطلاعات کافی درمورد اینکه این بیکاری از نوع U_0 است یا U_1 وجود ندارد. حال سؤال این است که در چنین شرایطی، از سیاست پولی انبساطی استفاده شود یا نه؟

یک راه برای جواب دادن به این سؤال این است که زیان (مثلاً صدمه به اعتبار بانک مرکزی) ناشی از اقدام، یعنی استفاده از سیاست پولی انبساطی (M_1) و یا عدم استفاده از آن (M_0)، را محاسبه و مقایسه کنیم. فرض کنید که جدول احتمالات پیشین و زیان‌ها به‌صورت زیر باشد:

$P(\theta)$	۰/۷	۰/۳
وضعیت‌ها (θ) / انتخاب‌ها (M)	U_0	U_1
M_0 = عدم استفاده از سیاست پولی	۵	۱۰۰
M_1 = استفاده از سیاست پولی	۱۵	۱۵

زیان انتظاری ناشی از M_0 و M_1 عبارت است از:

$$L(M_0)=P(\theta_0)L(M_0,\theta_0)+P(\theta_1)L(M_0,\theta_1)=(0/7)(5)+(0/3)(100)=33/5$$
$$L(M_1)=P(\theta_0)L(M_1,\theta_0)+P(\theta_1)L(M_1,\theta_1)=(0/7)(15)+(0/3)(15)=15$$

چون زیان انتظاری حاصل از M_1 کمتر از M_0 است، لذا انتخاب M_1 بهتر است. حال فرض کنید که اطلاعات جدیدی کسب می‌شود (در مورد سطح بیکاری) که طبق آن، جدول احتمالات پسین و زیان‌ها به‌صورت زیر تعدیل می‌گردد: اطلاعات جدید نشان می‌دهد که بیکاری برابر با ۷ درصد است. همچنین فرض کنید که بیکاری پایین (U_0) و بیکاری بالا (U_1) هر یک دارای توزیع نرمال با انحراف معیار $\sigma=4$ باشد، ولی میانگین U_0 برابر با $\theta_0=5$ و میانگین U_1 برابر با $\theta_1=10$ می‌باشد.

$P(\theta\|Y)$	۰/۹	۰/۱
وضعیت‌ها (θ) / انتخاب‌ها (M)	U_0 (فرضیه H_0)	U_1 (فرضیه H_1)
M_0 = عدم استفاده از انبساط پولی	۵	۱۰۰
M_1 = استفاده از انبساط پولی	۱۵	۱۵

$$L(M_0)=(0/9)(5)+(0/1)(100)=14/5$$
$$L(M_1)=(0/9)(15)+(0/1)(15)=15$$

چون $L(M_0)<L(M_1)$ است، لذا M_0 انتخاب می‌شود. برای فرمول‌بندی کلی‌تری از این نتیجه، می‌توان آن را بر اساس احتمالات پسین به‌صورت زیر نوشت:

$$L(M_0)<L(M_1)$$

$$P(\theta_0|Y)L(M_0,\theta_0)+P(\theta_1|Y)L(M_0,\theta_1)<P(\theta_0|Y)L(M_1,\theta_0)+P(\theta_1|Y)L(M_1,\theta_1)$$

$$P(\theta_1|Y)\underbrace{[L(M_0,\theta_1)-L(M_1,\theta_1)]}_{r_1}<P(\theta_0|Y)\underbrace{[L(M_1,\theta_0)-L(M_0,\theta_0)]}_{r_0}$$

$$P(\theta_1|Y)r_1<P(\theta_0|Y)r_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{P(\theta_1|Y)}{P(\theta_0|Y)}<\frac{r_0}{r_1} \qquad (25\text{-}8)$$

توجه شود که Y اطلاعات جدید است که بیانگر مشاهدهٔ نرخ جدید بیکاری است.

با جایگذاری به‌جای $P(\theta_1|Y)$ و $P(\theta_0|Y)$، خواهیم داشت:

$$\frac{P(\theta_1)P(Y|\theta_1)}{P(\theta_0)P(Y|\theta_0)}<\frac{r_0}{r_1} \qquad (25\text{-}9)$$

و یا آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{P(Y|\theta_1)}{P(Y|\theta_0)}<\frac{r_0P(\theta_0)}{r_1P(\theta_1)} \qquad (25\text{-}10)$$

حال فرضیه H_0 را تعریف می‌کنیم که بیانگرعدم استفاده از سیاست پولی انبساطی است. حال در صورتی از سیاست پولی استفاده نمی‌شود (یعنی عدم رد H_0) که رابطه (۲۵-۱۰) برقرار باشد.

در اینجا r_0 ناشی از وضعیت θ_0 (یا تحت فرضیه H_0) است و r_1 ناشی از وضعیت θ_1 (یا تحت فرضیه H_1) می‌باشد که احتمال آنها به ترتیب $P(\theta_0)$ و $P(\theta_1)$ می‌باشد. برای استفاده و تفسیر دقیقتری از شرط (۲۵-۱۰) به‌جای $P(Y|\theta_1)$ و $P(Y|\theta_0)$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y-\theta_1)^2}{2\sigma^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(Y-\theta_0)^2}{2\sigma^2}}}<\frac{r_0P(\theta_0)}{r_1P(\theta_1)} \Rightarrow \frac{e^{-\frac{(Y-\theta_1)^2}{2\sigma^2}}}{e^{-\frac{(Y-\theta_0)^2}{2\sigma^2}}}<\frac{r_0P(\theta_0)}{r_1P(\theta_1)} \Rightarrow e^{\frac{(Y-\theta_0)^2-(Y-\theta_1)^2}{2\sigma^2}}<\frac{r_0P(\theta_0)}{r_1P(\theta_1)}$$

عبارت $\frac{(Y-\theta_0)^2-(Y-\theta_1)^2}{2\sigma^2}$ را به‌صورت $\frac{2Y(\theta_1-\theta_0)-(\theta_1^2-\theta_0^2)}{2\sigma^2}$ نوشته و از طرفین نامعادلهٔ فوق لگاریتم می‌گیریم:

$$\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma^2}Y-\frac{(\theta_1^2-\theta_0^2)}{2\sigma^2}<\ln\frac{r_0P(\theta_0)}{r_1P(\theta_1)}$$

$$Y<\frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}\ln\left(\frac{r_0P(\theta_0)}{r_1P(\theta_1)}\right)+\frac{\theta_1+\theta_0}{2} \qquad (25\text{-}11)$$

بدین ترتیب، فرضیه H_0 در صورتی رد نمی‌شود (یعنی از سیاست پولی انبساطی استفاده نمی‌شود) که شرط فوق برقرار باشد. Y بیانگر اطلاعات حاصل از نمونه است که در اینجا میزان بیکاری جدید است که برابر با ۷ درصد می‌باشد. حال در مثال فوق، عبارت سمت راست را حساب می‌کنیم:

$$Y<\frac{4}{10-5}\ln\frac{(10)(0/7)}{(85)(0/3)}+\frac{10+5}{2} \Rightarrow Y<3/4$$

از آنجا که $Y=7$ درصد به‌دست آمده است و در ناحیه بحرانی قرار دارد (زیرا $Y>3/4$ است)، لذا فرضیه H_0 رد می‌شود. یعنی این فرضیه که بیکاری مشاهده شده قابل اغماض است رد می‌گردد و لذا از سیاست پولی انبساطی استفاده می‌شود.

نکته مهم این است که اگر مقدار Y (مشاهدات نمونه) برابر با ۵ می‌شد (یعنی دقیقاً برابر با نرخ بیکاری پایین که یک نرخ قابل تحمل و بی‌خطر است) باز هم در ناحیه بحرانی قرار داشت و فرضیه H_0 رد می‌شد. این موضوع تا حدودی عجیب است. اما می‌تواند عقلایی باشد، زیرا خسارت ناشی از بیکاری بالا به‌قدری برای دولت زیاد است که دولت به‌عنوان یک تصمیم‌گیرنده نمی‌تواند ریسک کند و بیکاری مشاهده شده را بی‌خطر تلقی کند. به‌عنوان مثال زیان ناشی از بیکاری بالا در صورتی که از سیاست پولی انبساطی استفاده نکند، برابر با ۱۰۰ است که رقم قابل توجهی است. اگر به‌جای ۱۰۰، رقم ۴۰ را داشته باشیم در این صورت ناحیه بحرانی عبارت است از:

$$Y < \frac{۴}{۱۰-۵}\ln\frac{(۱۰)(۰/۷)}{(۲۵)(۰/۳)} + \frac{۱۰+۵}{۲} \quad \Rightarrow \quad Y < ۵/۲$$

بیکاری مشاهده شده که برابر با $Y=۷$ است در ناحیه بحرانی قرار دارد، لذا فرضیه $H_۰$ رد می‌شود و می‌پذیریم که بیکاری مشاهده شده از نوع بیکاری بالا است و لذا از سیاست پولی انبساطی استفاده می‌شود (یعنی $M_۱$ انتخاب می‌گردد). اما اگر مقدار $Y=۵$ به‌دست می‌آمد در این صورت $H_۰$ رد نمی‌شد و $M_۰$ انتخاب می‌شد. این بدان دلیل است که تابع زیان را تغییر داده‌ایم.

این فرضیه را می‌توان با روش کلاسیک به‌صورت زیر انجام داد.

۱) $H_۰: \theta \le ۵$, $H_۱: \theta > ۵$ یا $H_۰: \theta = ۵$, $H_۱: \theta = ۱۰$

۲) $Z = \left.\frac{Y-\theta}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|_{H_۰} = \frac{۷-۵}{\frac{۴}{\sqrt{۱۰}}} = ۱/۵۸۱$

۳) $(Z \ge ۱/۶۴)$

چون مقدار $Z=۱/۵۸$ در ناحیه بحرانی قرار ندارد، لذا فرضیه $H_۰$ رد نمی‌شود. در اینجا نتیجهٔ به‌دست آمده با نتیجهٔ بیزین متفاوت است، زیرا در اینجا زیان‌ها نقشی در تصمیم‌گیری ندارند.

۸–۲۵ تخمین ضرایب رگرسیون با روش بیزین

در بخش‌های قبلی دیدیم که روش کلاسیک به‌دنبال تخمین پارامتر مجهول و ثابت θ با روش‌هایی مانند OLS یا ML است. از این تخمین‌ها برای آزمون فرضیه، پیش‌بینی و تصمیم‌گیری استفاده می‌شود. در روش بیزین، θ مجهول است ولی ثابت نیست. به همین دلیل است که روش بیزین به‌دنبال یافتن توزیع پسین θ، یعنی $f(\theta|y)$ است و نه تخمین نقطه‌ای. توزیع پسین برای آزمون فرضیه و تصمیم‌گیری به‌کار می‌رود. به‌طور کلی، در روش بیزین، مسئلهٔ چگونگی تخمین پارامترها از چگونگی استفاده از پارامترها جدا نمی‌شود. به‌عنوان مثال در تحلیل رگرسیون، روش‌های کلاسیک مانند OLS یا ML به دنبال یافتن تخمین β و $\sigma^۲$ هستند، در حالی که روش بیزین به دنبال یافتن $f(\beta,\sigma^۲|y,X)$ است.

۱–۸–۲۵ تابع درستنمایی

تحلیل بیزین برای رگرسیون را می‌توان براساس روش درستنمایی مورد بررسی قرار داد. در بخش‌های قبلی دیدیم که روش کلاسیک از تابع درستنمایی استفاده می‌کند در حالی که روش بیزین از تابع احتمال پسین استفاده می‌کند. لذا برای مقایسه رگرسیون‌های کلاسیک و بیزین لازم است از تابع درستنمایی شروع کنیم، بدین منظور ابتدا بحث را با یک رگرسیون ساده شروع می‌کنیم بر حسب انحراف از میانگین بیان شده است و لذا فقط ضریب β را داریم:

$$y_i = \beta x_i + u_i \qquad (۲۵–۱۲)$$

دو ضریب برای تخمین داریم که شامل β و $\sigma^۲$ است. تخمین‌زنندهٔ OLS عبارت است از:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^۲} \quad , \quad \hat{\sigma}^۲ = s^۲ = \frac{\sum e_i^۲}{n-۲} \qquad (۲۵–۱۳)$$

اگر از روش حداکثر درستنمایی استفاده کنیم، آنگاه در تخمین $\sigma^۲$ به‌جای $n-۲$ از n استفاده می‌شود.

از آنجا که y_i تابعی از u_i است، لذا y_i یک متغیر تصادفی است. با این فرض که u_i توزیع نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\sigma^۲$ دارد، y_i نیز توزیع نرمال دارد:

$$y_i | x_i, \beta, \sigma^۲ \sim N(\beta x_i, \sigma^۲)$$

از طرف دیگر، x_i نیز بخشی از داده‌ها است که فرض می‌شود ثابت است. اگر x ثابت نباشد، آنگاه توزیع مشترک $f(y_i,x_i|\beta,\sigma^۲)$ را داریم که فرض می‌شود x_i مستقل از u_i است و لذا فرایند ایجاد داده‌های x و y مستقل بوده و می‌توان تابع احتمال آنها را به‌صورت زیر نوشت:

$$f(y_i,x_i|\beta,\sigma^۲,\eta) = f(y_i,x_i|\beta,\sigma^۲) f(x_i|\eta) \qquad (۲۵–۱۴)$$

η پارامترهای مربوط به معادله‌ای است که داده‌های x را ایجاد می‌کند. چون $f(x_i|\eta)$ شامل پارامترهای موردنظر، یعنی β و $\sigma^۲$، نیست لذا نیازی به بحث راجع به آن نداریم و فقط با $f(y_i|x_i,\beta,\sigma)$ ادامه می‌دهیم. برای سادگی، در توابع احتمال نام متغیر x را حذف می‌کنیم. با توجه به تابع احتمال u_i یا y_i می‌توان تابع درستنمایی را تشکیل داد:

$$y_i \text{ تابع احتمال: } f(y_i|\beta,\sigma^۲) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}\sigma} e^{\frac{(y_i-\beta x_i)^۲}{۲\sigma^۲}}$$

$$L(y|\beta,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(y_i|\beta,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\Sigma(y_i-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}} \qquad (۲۵-۱۵)$$

تابع درستنمایی را به‌صورت زیر می‌نویسیم[1]:

$$L(y|\beta,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\Sigma(y_i-\hat{\beta}x_i)^2+(\beta-\hat{\beta})^2\Sigma x_i^2}{2\sigma^2}}$$

$\hat{\beta}$ تخمین‌زنندۀ OLS است. حال از تبدیل‌های زیر استفاده می‌کنیم:

$\Sigma(y_i-\hat{\beta}x_i)^2=(n-2)s^2=\nu s^2$ و درجه آزادی $=n-2=\nu$

$$L(y|\beta,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{\nu+2}{2}}\sigma^{\nu+1}}e^{-\frac{\nu s^2+(\beta-\hat{\beta})^2\Sigma x_i^2}{2\sigma^2}} \qquad (۲۵-۱۶)$$

اگر تابع درستنمایی را در $\frac{(\frac{\nu}{2}s^2)^{\frac{\nu}{2}+1}(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}\Sigma x_i^2}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)}$ ضرب کنیم[2]، آنگاه معادل است با (علامت $\propto$ را برای «معادل است با» به‌کار می‌بریم):

$$L(y|\beta,\sigma^2)\propto\left\{\frac{1}{(2\pi)\left[\sigma\left(\sqrt{\Sigma x_i^2}\right)^{-1}\right]}e^{-\frac{1}{2}(\beta-\hat{\beta})^2\left(\sigma^2(\Sigma x_i^2)^{-1}\right)^{-1}}\right\}\left\{\frac{(\frac{\nu}{2}s^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\nu s^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2})}\right\} \qquad (۲۵-۱۷)$$

بنابراین، تابع درستنمایی را بر حسب حاصل‌ضرب دو تابع احتمال نوشته‌ایم: اولی بیانگر توزیع نرمال برای پارامتر β و دومی بیانگر توزیع گاما برای $\frac{1}{\sigma^2}$ است (و یا معکوس گاما برای σ^2).

۱- عبارت $\Sigma(y_i-\beta x_i)^2$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Sigma(y_i-\hat{\beta}x_i+\hat{\beta}x_i-\beta x_i)^2=\Sigma\left((y_i-\hat{\beta}x_i)-(\beta-\hat{\beta})x_i\right)^2$$
$$=\Sigma(y_i-\hat{\beta}x_i)^2+(\beta-\hat{\beta})^2\Sigma x_i^2-2(\beta-\hat{\beta})\Sigma(y_i-\hat{\beta}x_i)x_i$$

جملۀ آخر برابر صفر است زیرا معادل با $\Sigma e_i x_i=0$ است.

۲- در مخرج کسر، عبارت $\Gamma(m)$ برابر است با:

$$\Gamma(m)=\int_0^\infty z^{m-1}e^{-z}dz$$

توجه شود که توزیع نرمال برای پارامتر β با معین بودن σ^2، تعریف شده است، لذا بیانگر یک تابع چگالی شرطی است که با $f(\beta|\sigma^2)$ نشان می‌دهیم.

اما برای پارامتر σ^2 یا $\frac{1}{\sigma^2}$ تابع چگالی گاما را داریم که با $f(\frac{1}{\sigma^2})$ یا $f(\sigma^2)$ نشان می‌دهیم.

اگر $\frac{\nu s^2}{2}=\lambda$ و $\frac{\nu}{2}+1=m$ را به‌کار ببریم، آنگاه خواهیم داشت:

$$f(\sigma^2)=\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{m-1}e^{-\lambda(\frac{1}{\sigma^2})} \quad ; \quad \frac{1}{\sigma^2}>0 \text{ یا } \sigma^2>0 \qquad (۲۵-۱۸)$$

بنابراین $\frac{1}{\sigma^2}$ توزیع گاما با پارامترهای λ و m دارد و یا σ^2 توزیع معکوس گاما با پارامترهای λ و m دارد.

بنابراین، تابع درستنمایی معادل است با:

$$L(y|\beta,\sigma^2)\propto f(\beta|\sigma^2)f(\sigma^2)$$

از طرف دیگر، توزیع مشترک پیشین (β,σ^2) عبارت است از:

$$f(\beta,\sigma^2)=f(\beta|\sigma^2)f(\sigma^2)$$

بنابراین توزیع مشترک (β,σ^2) شامل حاصل‌ضرب «توزیع نرمال شرطی» و «توزیع معکوس گاما» است که به اختصار آن را با N-IG نشان می‌دهیم[1]:

$$\beta|\sigma^2\sim N(\beta,\frac{\sigma^2}{\Sigma x_i^2})$$

$$\sigma^2\sim IG(m=\frac{\nu}{2}+1\ ,\ \lambda=\frac{\nu s^2}{2}) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sigma^2}\sim G(m\ ,\ \lambda)$$

$$(\beta\ ,\sigma^2)\sim N-IG(\hat{\beta}\ ,\frac{\sigma^2}{\Sigma x_i^2},\lambda\ ,m) \qquad (۲۵-۱۹)$$

تا اینجا نشان دادیم که تابع درستنمایی که روش تخمین حداکثر درستنمایی بر آن استوار است، معادل با توزیع مشترک «نرمال- معکوس گاما» برای پارامترهای β و σ^2 است. به‌عبارت دیگر اگر برای β توزیع پیشین نرمال با میانگین $\hat{\beta}$ و واریانس $\frac{\sigma^2}{\Sigma x_i^2}$ و برای σ^2 توزیع پیشین

۱- از علامت N برای نرمال (Normal)، G برای گاما (Gomma)، IG برای معکوس گاما (Invers Gamma) و N-IG برای نرمال – معکوس گاما استفاده شده است.

معکوس گاما با $m=\frac{\nu}{2}+1$ و $\lambda=\frac{\nu s^2}{2}$ را معرفی کنیم، آنگاه توزیع پیشین مشترک (β,σ^2) به‌صورت «نرمال–معکوس گاما» بوده که همان تابع درستنمایی است.

بحث فوق را به رگرسیون K متغیره تعمیم می‌دهیم:

$$Y_t=\beta_1+\beta_2 X_{2t}+\cdots+\beta_K X_{Kt}+u_t$$

و یا آن را به‌صورت ماتریسی می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}=\mathbf{X\beta}+\mathbf{u}$$

$$\mathbf{u}\sim \mathrm{N}(\mathbf{o},\sigma^2\mathbf{I}_n) \quad , \quad \mathbf{y}\sim \mathrm{N}(\mathbf{X\beta},\sigma^2\mathbf{I}_n)$$

تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(Y_i|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})}{2\sigma^2}} \qquad (۲۵–۲۰)$$

حال $\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}-\mathbf{X\beta}=(\mathbf{y}-\mathbf{X\hat{\beta}})-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{e}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X\beta})=\left(\mathbf{e}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)'\left(\mathbf{e}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)$$
$$=\mathbf{e}'\mathbf{e}+(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})=\nu s^2+(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}}) \qquad (۲۵–۲۱)$$

که $\nu=n-K$ و $s^2=\frac{e'e}{n-K}$ است. از (۲۵–۲۱) در (۲۵–۲۰) جایگذاری کرده و تابع درستنمایی را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$L(\mathbf{y}|\beta,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\nu s^2+(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})}{2\sigma^2}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{\nu s^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\left[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})} \qquad (۲۵–۲۲)$$

تابع درستنمایی را در $\frac{(\frac{\nu s^2}{2})^{\frac{\nu}{2}+1}(2\pi)^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)|\mathbf{X}'\mathbf{X}|^{\frac{1}{2}}}$ ضرب کرده و مرتب می‌کنیم.

$$L(\mathbf{y}|\beta,\sigma^2)\propto\left\{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}\left|\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\left[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})}\right\}\left\{\frac{(\frac{\nu}{2}s^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\nu}e^{-\frac{\nu s^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2})}\right\} \qquad (۲۵–۲۳)$$

بدین ترتیب تابع درستنمایی معادل با حاصل‌ضرب توزیع نرمال شرطی K متغیره برای بردار $\boldsymbol{\beta}$ (به شرط σ^2) و توزیع گاما برای $\frac{1}{\sigma^2}$ (یا معکوس گاما برای σ^2) است. پارامترهای توزیع گاما برابر با $\lambda=\frac{\nu s^2}{2}$ و $m=\frac{\nu}{2}+1$ می‌باشد که آن را با $G(m,\lambda)$ نشان می‌دهیم. پارامترهای توزیع نرمال نیز برابر با میانگین و واریانس بردار $\boldsymbol{\beta}$ است که به‌ترتیب برابر با $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ و $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ می‌باشد.

۲۵–۸–۲ توزیع پسین ضرایب رگرسیون و تخمین بیزین

در تحلیل کلاسیک فرض می‌شود که پارامترهای معادله رگرسیون ثابت هستند و Y_i چون تابعی از متغیر تصادفی u_i است، تصادفی بوده و توزیع نرمال دارد. توزیع مشترک Y_iها که با $L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)$ نشان داده می‌شود، معروف به تابع درستنمایی است که در بخش قبلی معرفی شد. این تابع فقط شامل اطلاعات جدید (نمونه) است و اطلاعات قبلی هیچ نقشی در خصوص پارامترها ندارد. ابتدا بحث را با رگرسیون $y_i=\beta x_i+u_i$ ادامه می‌دهیم که متغیرهای بر حسب انحراف از میانگین هستند.

اگر محقق در مورد پارامترها، حدس‌های قبلی خود را اعمال نماید آنگاه وی دارای اطلاعات قبلی و جدید است که بایستی با هم ترکیب شوند. حدس‌های قبلی در مورد دو پارامتر β و σ^2 را می‌توان با توزیع مشترک آنها یعنی $f(\beta,\sigma^2)$ توصیف نمود. حال اگر اطلاعات جدید اضافه شود (اطلاعات جدید شامل مشاهدات x و y است)، حدس‌های قبلی را به‌روز کرده و آن را با $f(\beta,\sigma^2|y)$ نشان می‌دهیم که به آن تابع چگالی پسین می‌گوییم. با داشتن تابع چگالی پسین می‌توان از امید ریاضی پسین به‌عنوان «تخمین‌های به‌روز شده» استفاده نمود. برای تعیین تابع چگالی پسین، فرض کنید که توزیع مشترک پارامترها و مشاهدات، به‌صورت $f(y,\beta,\sigma^2)$ باشد. در این صورت تابع چگالی پسین پارامترها عبارت است از:

$$f(\beta,\sigma^2|y)=\frac{f(y,\beta,\sigma^2)}{f(y)}=\frac{f(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)}{f(y)} \qquad (۲۵–۲۴)$$

چون $f(y|\beta,\sigma^2)$ تابع چگالی مشترک y_iها است لذا همان تابع درستنمایی است. از طرف دیگر $f(y)$ نیز شامل پارامترها نمی‌باشد، لذا کنار گذاشتن آن هیچ تأثیری در تعیین و تخمین ضرایب ندارد. بنابراین، تابع چگالی پسین پارامترها معادل است با:

$$f(\beta,\sigma^2|y)\propto L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2) \qquad (۲۵-۲۵)$$

اگر از رابطه $f(\beta,\sigma^2)=f(\beta|\sigma^2)f(\sigma^2)$ استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$f(\beta,\sigma^2|y)\propto L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta|\sigma^2)f(\sigma^2) \qquad (۲۵-۲۶)$$

$f(\beta|\sigma^2)$ بیانگر تابع چگالی پیشین β با فرض معلوم بودن σ^2 است. $f(\sigma^2)$ نیز تابع چگالی پیشین σ^2 است. رابطه (۲۵-۲۶) نشان می‌دهد که حدس‌های به روز شده یا تابع چگالی پسین معادل با حاصل ضرب تابع درستنمایی (اطلاعات جدید) در توابع احتمال پیشین (اطلاعات قبلی) می‌باشد. بنابراین، روش کلاسیک از $L(y|\beta,\sigma^2)$ استفاده می‌کند ولی روش بیزین از $L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)$ استفاده می‌کند. واضح است که تفاوت روش بیزین و کلاسیک در $f(\beta,\sigma^2)$ است که همان حدس‌ها و اطلاعات قبلی است. بدیهی است که اگر هیچ اطلاعات قبلی وجود نداشته باشد، آنگاه روش بیزین با روش کلاسیک، یکی خواهند شد. بدین ترتیب، روش بیزین کاملاً به اطلاعات قبلی که به‌صورت تابع چگالی $f(\beta,\sigma^2)$ است حساس می‌باشد. اما اینکه چه تابعی را برای $f(\beta,\sigma^2)$ معرفی کنیم، می‌تواند اختیاری باشد. در ادامه به نقش $f(\beta,\sigma^2)$ می‌پردازیم.

۲۵-۸-۳ توزیع‌های پیشین با اطلاعات غیرمفید

نقطهٔ تفاوت تحلیل بیزین از تحلیل کلاسیک، معرفی یک توزیع پیشین برای پارامترها است. این توزیع بیانگر حدس‌های قبلی تحلیل‌گران در بارهٔ پارامترهای مدل است. اگر هیچ اطلاعات قبلی نداشته باشیم، در این صورت یک حدس قبلی داریم که حاوی هیچ اطلاعات مفیدی نیست. بنابراین تابع چگالی پارامترها بیانگر آن است که آنها را برابر با مقدار ثابت در نظر گرفته‌ایم. اما راههای دیگری برای اظهار فقدان اطلاعات در خصوص پارامترها وجود دارد. به‌عنوان مثال، اگر توزیع پیشین پارامترها را ثابت در نظر بگیریم بدان معنا است که احتمال هر یک از مقادیر پارامتر در دامنه موردنظر، یکسان است.

برای شروع تحلیل ابتدا فرض کنید σ^2 معلوم باشد. این فرض غیرواقعی است ولی بحث را ساده می‌کند. با استفاده از قضیه بیز می‌توانیم تابع چگالی پسین را برای β به‌صورت زیر بنویسیم:

$$f(\beta|y,\sigma^2)=\frac{f(\beta,y|\sigma^2)}{f(y)}=\frac{L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta|\sigma^2)}{f(y)} \qquad (۲۵-۲۷)$$

$$f(\beta|y,\sigma^2)\propto L(y|x,\beta,\sigma^2)f(\beta|\sigma^2) \qquad (۲۵-۲۸)$$

از طرف دیگر چون هیچ اطلاعات مفیدی راجع به β نداریم، لذا تابع احتمال β را به‌صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$f(\beta|\sigma^2)\propto \text{ثابت} \qquad (۲۵-۲۹)$$

با توجه به اینکه $f(\beta|\sigma^2)$ ثابت است، لذا توزیع پسین β معادل با تابع درستنمایی است:

$$f(\beta|y,x,\sigma^2)\propto L(y|x,\beta,\sigma^2) \qquad (۲۵-۳۰)$$

از طرف دیگر تابع درستنمایی را به‌صورت حاصل‌ضرب دو توزیع پیشین β و σ^2 نوشتیم (رابطه ۲۵-۲۳) لذا تابع پسین β عبارت است از:

$$f(\beta|y,\sigma^2)\propto L(y|\beta,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left[\sigma(\sum x_i^2)^{-1}\right]}e^{\frac{(\beta-\hat{\beta})^2\sum x_i^2}{2\sigma^2}}f(\sigma^2) \qquad (۲۵-۳۱)$$

چون σ^2 معلوم است، لذا نیازی به نوشتن $f(\sigma^2)$ نیست، زیرا با معلوم بودن σ^2، بیانگر تابع احتمال نمی‌باشد و برابر با یک مقدار ثابت است. تابع چگالی $f(\beta|y,\sigma^2)$ معادل با یک توزیع نرمال برای β است که میانگین آن $\hat{\beta}$ و واریانس آن $\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$ است.

این نتیجه کاملاً آشنا است، اما تفسیر آن متفاوت است. اولاً آن را با اطلاعات قبلی در مورد β (هر چند در این حالت، اطلاعات قبلی وجود ندارد) و داده‌های نمونه (داده‌های جدید) ترکیب نموده‌ایم. این نتیجه کاملاً تحت تأثیر اطلاعات نمونه است. در غیاب هرگونه اطلاعات پیشین، میانگین توزیع پسین که بیانگر تخمین نقطه‌ای بیزین است، برابر با تخمین‌زنندهٔ OLS است. حداکثر شدن تابع (۲۵-۳۱) معادل با حداقل شدن $\frac{(\beta-\hat{\beta})^2\sum x_i^2}{2\sigma^2}$ است که با مشتق‌گیری از آن نسبت به β خواهیم داشت:

$$\frac{2(\beta-\hat{\beta})\sum x_i^2}{2\sigma^2}=0 \Rightarrow \tilde{\beta}=\hat{\beta}$$

بنابراین تخمین‌زنندهٔ بیزین ($\tilde{\beta}$) برابر با تخمین‌زننده OLS (یعنی $\hat{\beta}$) است.

حال فرض کنید که σ^2 مجهول باشد. همچنین فرض می‌کنیم β و σ^2 مستقل باشند. در این صورت توزیع مشترک پیشین پارامترها برابر با حاصل‌ضرب توزیع حاشیه‌ای آنها است:

$$f(\beta,\sigma^2)=f(\beta)f(\sigma^2) \qquad (۲۵-۳۲)$$

فرض کنید که اطلاعات ما راجع به پارامترها متناسب با $\frac{1}{\sigma^2}$ باشد:

$$f(\beta,\sigma^2)=f(\beta)f(\sigma^2)\propto\frac{1}{\sigma^2} \qquad (۲۵-۳۳)$$

تابع چگالی مشترک پسین پارامترها عبارت است از[1]:

$$f(\beta,\sigma^2|y)\propto L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)\propto L(y|\beta,\sigma^2)\frac{1}{\sigma^2} \qquad (۲۵-۳۴)$$

به‌جای $L(y|\beta,\sigma^2)$ از (۲۵-۱۷) قرار می‌دهیم:

$$f(\beta,\sigma^2|y)\propto\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left[\sigma(\sum x_i^2)^{-1}\right]}e^{-\frac{(\beta-\hat{\beta})^2\sum x_i^2}{2\sigma^2}}\right\}\left\{\frac{(\frac{\nu}{2}s^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\nu s^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2})}\right\}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right) \qquad (۲۵-۳۵)$$

برای تعیین تابع توزیع پسین حاشیه‌ای β، از (۲۵-۳۵) نسبت‌به σ^2 انتگرال می گیریم:

$$f(\beta|y)=\int_0^\infty f(\beta,\sigma^2|y)d\sigma^2\propto c\int_0^\infty(\frac{1}{\sigma^2})^{m-1}e^{-\lambda(\frac{1}{\sigma^2})}d\sigma^2 \qquad (۲۵-۳۶)$$

۱- تابع چگالی مشترک β، σ^2 و Y عبارت است از:

$$f(\beta,\sigma^2,y)=L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)=f(\beta,\sigma^2|y)f(y)$$

بنابراین تابع چگالی مشترک β و σ^2 به شرط y عبارت است از:

$$f(\beta,\sigma^2|y)=\frac{L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)}{f(y)}\propto L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)$$

که $\lambda=\frac{\nu s^2}{2}+\frac{(\beta-\hat{\beta})^2\sum x_i^2}{2}$ و $m-1=\frac{\nu+1}{1}+1=\frac{n}{2}+1$ است و c نیز مقادیر ثابت را نشان می‌دهد. انتگرال فوق برابر است با[1]:

$$f(\sigma^2|y)=c\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\lambda^{\frac{\nu}{2}}} \qquad (۲۵-۳۷)$$

به‌جای λ قرار داده و مقادیر ثابت را با c_1 نشان می‌دهیم:

$$f(\beta|y)\propto\frac{c_1}{\left[\frac{\nu s^2}{2}+\frac{(\beta-\hat{\beta})^2\sum x_i^2}{2}\right]^{\frac{\nu+1}{2}}} \qquad (۲۵-۳۸)$$

بدین ترتیب، توزیع پسین β برابر با توزیع t با میانگین $\hat{\beta}$ و واریانس $\frac{\nu}{\nu-2}\frac{s^2}{\sum x_i^2}$ می‌باشد.[2] بنابراین در اینجا نیز تخمین‌زنندهٔ بیزین براساس توزیع پسین برابر با تخمین‌زنندهٔ OLS است ولی واریانس آن متفاوت می‌باشد.

۱- انتگرال مذکور به صورت زیر حساب شده است:

$$\frac{\lambda}{\sigma^2}=Z\Rightarrow\sigma^2=\frac{\lambda}{Z}\Rightarrow d\sigma^2=\frac{-\lambda}{Z^2}dZ$$

با جایگذاری در انتگرال موردنظر، خواهیم داشت:

$$\int_0^\infty(\frac{Z}{\lambda})^{m-1}e^{-Z}\frac{\lambda}{Z^2}dz=\frac{1}{\lambda^{m-2}}\int_0^\infty Z^{m-3}e^{-Z}dZ=\frac{\Gamma(m-2)}{\lambda^{m-1}}\lambda^{m-2}=\frac{\Gamma(\frac{\nu}{2})}{\lambda^{\frac{\nu}{2}}}$$

2 عبارت داخل کروشه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{c_1}{\left\{\frac{\nu s^2}{2}\left[1+\frac{(\beta-\hat{\beta})^2}{\frac{\nu s^2}{\sum x_i^2}}\right]\right\}^{\frac{\nu+1}{2}}}=\frac{c_2}{\left[1+\left(\frac{(\beta-\hat{\beta})^2}{\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}}\Big/\frac{\chi^2_\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}\right]^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

عبارت داخل پرانتز از برابر با t^2 است زیرا از نسبت $Z^2=\left(\frac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sum x_i^2}\right)^2$ به $\frac{\chi^2_\nu}{\nu}$، به‌دست آمده است:

$$\frac{c_2}{(1+\frac{t^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

$$\tilde{\beta}=\hat{\beta} \quad , \quad \text{var}(\tilde{\beta})=\frac{\nu}{\nu-2}\frac{s^2}{\sum x_i^2} \qquad (۲۵-۳۹)$$

این نتایج کاملاً بدیهی هستند، زیرا روش بیزین اطلاعات قبلی و جدید را ترکیب می‌کند. وقتی اطلاعات قبلی حاوی هیچ اطلاعات مفیدی نیست، لذا نقش اصلی را اطلاعات جدید (داده‌های نمونه) ایفا می‌کند و نتیجهٔ روش بیزین و روش کلاسیک (مانند OLS یا ML) یکسان می‌باشد.

۲۵-۸-۴ توزیع‌های پیشین با اطلاعات مفید

حال وضعیتی را بررسی می‌کنیم که حدس‌های قبلی در مورد پارامترها، دارای اطلاعات مفیدی باشد. در چنین شرایطی، بحث چه در سطح تجربی و چه نظری، پیچیده‌تر می‌شود. به‌عنوان مثال انتگرال‌گیری نسبت به σ^2 که به صورت (۲۵-۳۶) انجام شد، بسیار پیچیده می‌شود. به‌منظور تقلیل این پیچیدگی‌ها، معمولاً از توزیع‌های شرطی و حاشیه‌ای پسین نیز از همان خانواده خواهند بود. به‌عنوان مثال اگر فرض کنیم که توزیع پیشین β نرمال باشد و σ^2 نیز معلوم باشد، آنگاه توزیع پسین β نیز نرمال خواهد بود. همچنین اگر فرض کنیم توزیع پیشین β نرمال و توزیع پیشین σ^2 گاما باشد، آنگاه توزیع‌های پسین نیز به همین ترتیب خواهد بود.

فرض کنید که در معادله $y_i=\beta x_i+u_i$، ضریب β دارای توزیع پیشین نرمال با میانگین β_0 و واریانس σ_0^2 باشد. همچنین برای سادگی فرض کنید که σ^2 معلوم باشد.

$$\beta \sim N(\beta_0,\sigma_0^2) \qquad (۲۵-۴۰)$$

$$f(\beta|\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}e^{-\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

توزیع حاشیه‌ای پسین β عبارت است از:

$$f(\beta|y,\sigma^2)=\frac{f(y,\beta|\sigma^2)}{f(y)}=\frac{L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta|\sigma^2)}{f(y)}\propto L(y|\beta,\sigma^2)f(\beta|\sigma^2) \qquad (۲۵-۴۱)$$

با جایگذاری در رابطه فوق، توزیع حاشیه‌ای پسین β معادل است با:

$$f(\beta|y,\sigma^2)\propto ce^{-\frac{\sum(y_i-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}-\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2\sigma_0^2}} \qquad (۲۵-۴۲)$$

c تمامی جملاتی را نشان می‌دهد که شامل β نیستند. حداکثر شدن تابع فوق نسبت به β معادل با حداقل شدن $\frac{\sum(y_i-\beta x_i)^2}{2\sigma^2}+\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2\sigma_0^2}$ است. تخمین بیزین برای β، با مشتق‌گیری از این عبارت، به‌دست می‌آید:

$$\frac{2\sum_i(y_i-\beta x_i)(-x_i)}{2\sigma^2}+\frac{2(\beta-\beta_0)}{2\sigma_0^2}=0$$

با حل این معادله برای β خواهیم داشت:

$$\tilde{\beta}=\frac{\frac{1}{\sigma_0^2}\beta_0+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}\hat{\beta}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}}=w\beta_0+(1-w)\hat{\beta} \qquad (۲۵-۴۳)$$

$$w=\frac{\frac{1}{\sigma_0^2}}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}}=\frac{1}{1+\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2/\sum x_i^2}} \qquad (۲۵-۴۴)$$

بنابراین تخمین‌زنندهٔ بیزین برابر با متوسط وزنی اطلاعات قبلی و جدید است. اطلاعات قبلی برابر با β_0 است که میانگین توزیع پیشین β می‌باشد. اطلاعات جدید نیز برابر با $\hat{\beta}$ است که از روش حداکثر درستنمایی به دست می‌آید یا همان تخمین‌زنندهٔ OLS است. w وزن حدس‌های پیشین است که بستگی به معکوس واریانس دارد. هر چه اطلاعات قبلی دقیق باشد، در این صورت پراکندگی آن کمتر است ($\sigma_0^2 \to 0$) و لذا w به سمت ۱ میل خواهد کرد. بزرگ بودن σ_0^2 بدان معنا است که اطلاعات و حدس‌های پیشین در مورد β بسیار مغشوش و مبهم است و لذا $w=0$ خواهد شد. از طرف دیگر $\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$ واریانس تخمین‌زننده OLS است که هر چه این واریانس کمتر باشد، $\hat{\beta}$ از کارایی بیشتری برخوردار است و لذا موجب می‌شود که $w=0$ شود و تخمین‌زنندهٔ بیزین به تخمین‌زنندهٔ OLS نزدیک شود.

به‌طورکلی، $\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2/\sum x_i^2}$ بیانگر نسبت «واریانس اطلاعات قبلی به واریانس اطلاعات جدید» است. اگر این نسبت به سمت صفر میل کند، اطلاعات قبلی نقش اصلی را خواهد داشت اگر به

سمت بی‌نهایت میل کند، اطلاعات جدید، نقش اصلی را دارد. همچنین اگر این نسبت به ۱ نزدیک باشد آنگاه $w=\frac{1}{2}$ خواهد بود که سهم اطلاعات قبلی و جدید، یکسان می‌باشد.

واریانس تخمین‌زنندهٔ بیزین با توجه به استقلال β_0 و $\hat{\beta}$ برابر است با:

$$\operatorname{var}(\tilde{\beta})=w^2\sigma_0^2+(1-w)^2\sigma_{\hat{\beta}}^2=w^2+(1-w)^2\frac{\sigma^2}{\sum x_i^2} \qquad (۲۵-۴۵)$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}}=\left[\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2(\sum x_i^2)^{-1}}\right]^{-1}$$

بحث فوق را می‌توان به رگرسیون K متغیره تعمیم داد. در این صورت، تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^n\sigma^n}e^{-\frac{1}{2}\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2}} \qquad (۲۵-۴۶)$$

$\mathbf{y}$ بردار $n\times1$، $\mathbf{X}$ ماتریس $n\times K$ و $\boldsymbol{\beta}$ بردار $K\times1$ می‌باشد. ابتدا عبارت $\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})=\mathbf{e}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

و

$$(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})=\left(\mathbf{e}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)'\left(\mathbf{e}-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)=\mathbf{e}'\mathbf{e}+(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\mathbf{X}'\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

نتیجه فوق را در تابع درستنمایی قرار می‌دهیم و آن را در جملات ثابتی ضرب و تقسیم کرده و مرتب می‌کنیم:

$$L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)\propto\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\left|\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right|}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'\left[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})}\right\}\left\{\frac{(\frac{\nu}{2}s^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2}+1)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{\nu}{2}}e^{-\frac{\nu s^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2})}\right\}$$

در اینجا $\boldsymbol{\beta}$ و $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ بردارهای $K\times1$ هستند که $\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ می‌باشد. ν درجه آزادی است که برابر با $n-K$ می‌باشد. در اینجا نیز برای تخمین $\boldsymbol{\beta}$ با روش بیزین، تابع چگالی پسین $\boldsymbol{\beta}$ را به‌صورت زیر داریم (فرض می‌کنیم σ^2 معلوم باشد):

$$f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2,\mathbf{y})\propto L(\mathbf{y}|\boldsymbol{\beta},\sigma^2)f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)$$

فرض کنید که $\boldsymbol{\beta}|\sigma^2\sim N(\boldsymbol{\beta}_0,\mathbf{V}_0)$ باشد. $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\beta}_0$ بردارهای $K\times1$ و $\mathbf{V}_0$ ماتریس $K\times K$ می‌باشد که بیانگر ماتریس واریانس- کوواریانس پیشین β_i ها می‌باشد.

$$f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2,\mathbf{y})\propto c\,e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}\mathbf{X})'\left[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}\mathbf{X})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{V}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)} \qquad (۲۵-۴۸)$$

c مقادیر ثابت است که شامل $\boldsymbol{\beta}$ نمی‌باشد. برای رسیدن به تخمین‌زنندهٔ بیزین، عبارت زیر را حداقل می‌کنیم:

$$-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}\mathbf{X})'\left(\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)^{-1}(\mathbf{y}-\boldsymbol{\beta}\mathbf{X})-\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{V}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0) \qquad (۲۵-۴۹)$$

از (۲۵-۴۹) نسبت به $\boldsymbol{\beta}$ مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{W}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{I}-\mathbf{W})\hat{\boldsymbol{\beta}} \qquad (۲۵-۵۰)$$

که مشابه (۲۵-۴۳) است.

$$\mathbf{W}=\left\{\mathbf{V}_0^{-1}+\left[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1}\mathbf{V}_0^{-1}$$

واریانس $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ برابر است با:

$$\operatorname{var}(\tilde{\boldsymbol{\beta}})=\left\{\mathbf{V}_0^{-1}+\left[\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}\right\}^{-1} \qquad (۲۵-۵۱)$$

واریانس تخمین‌زنندهٔ بیزین ترکیبی از واریانس اطلاعات قبلی ($\mathbf{V}_0$) و واریانس اطلاعات جدید، یعنی $\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ است.

اگر σ^2 مجهول باشد، دیدیم که توزیع پسین حاشیه‌ای $\boldsymbol{\beta}$ یعنی $f(\boldsymbol{\beta}|Y)$ به‌صورت توزیع t است. برای رگرسیون K متغیره، این بحث را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

الف) توزیع‌های پیشین

$$\boldsymbol{\beta}|\sigma^2\sim N(\boldsymbol{\beta}_0,\sigma^2\mathbf{V}_0)\Rightarrow f(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}\left|\sigma^2\mathbf{V}_0\right|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'\left(\sigma^2\mathbf{V}_0\right)^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)} \qquad (۲۵-۵۲)$$

$$\sigma^2\sim IG\left(\frac{n_0}{2},\frac{n_0}{2}s_0^2\right)\Rightarrow f(\sigma^2)=\frac{\left(\frac{n_0}{2}s_0^2\right)^{\frac{n_0}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n_0}{2}\right)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_0}{2}-1}e^{-\frac{n_0s_0^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} \qquad (۲۵-۵۳)$$

توزیع مشترک پیشین (β,σ^2) عبارت است از:

$$(\beta,\sigma^2)\sim f(\beta,\sigma^2)=f(\beta|\sigma^2)f(\sigma^2)$$

$$=\frac{\left(\frac{n_0 s_0^2}{2}\right)^{\frac{n_0}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}\Gamma\left(\frac{n_0}{2}\right)|\mathbf{V}_0|^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\left[n_0 s_0^2+(\beta-\beta_0)'\mathbf{V}_0^{-1}(\beta-\beta_0)\right]\frac{1}{\sigma^2}} \quad (۲۵-۵۴)$$

ب) توزیع‌های پسین

$$\beta|\sigma^2,\mathbf{y}\sim \mathrm{N}(\beta_1,\sigma^2\mathbf{V}_1)\Rightarrow f(\beta|\sigma^2,\mathbf{y})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}|\sigma^2\mathbf{V}_1|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\beta-\beta_1)'(\sigma^2\mathbf{V}_1)^{-1}(\beta-\beta_1)} \quad (۲۵-۵۵)$$

$$\sigma^2|\mathbf{y}\sim \mathrm{IG}\left(\frac{n_1}{2},\frac{n_1}{2}s_1\right),\quad n_1=n_0+n\Rightarrow f(\sigma^2|\mathbf{y})=\frac{\left(\frac{n_1}{2}s_1\right)^{\frac{n_1}{2}}}{\Gamma(\frac{n_1}{2})}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_1}{2}+1}e^{-\frac{n_1 s_1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} \quad (۲۵-۵۶)$$

توزیع پسین حاشیه‌ای β عبارت است از:

$$f(\beta|\mathbf{y})=\int f(\beta,\sigma^2|\mathbf{y})d\sigma^2=\int f(\beta|\sigma^2,\mathbf{y})f(\sigma^2|\mathbf{y})d\sigma^2\sim t_{n_1}(\beta_1,s_1\mathbf{V}_1) \quad (۲۵-۵۷)$$

توزیع مشترک پسین (β,σ^2) عبارت است:

$$f(\beta,\sigma^2|\mathbf{y})=f(\beta,\sigma^2|\mathbf{y})f(\sigma^2|\mathbf{y})$$

$$=\frac{\left(\frac{n_1}{2}s_1^2\right)^{\frac{n_1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{K}{2}}|\mathbf{V}_1|^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n_1}{2})}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_1+1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\left[(\beta-\beta_1)'(\mathbf{V}_1)^{-1}(\beta-\beta_1)+n_1 s_1^2\right]\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)} \quad (۲۵-۵۸)$$

حال تابع چگالی حاشیه‌ای پسین را برای β حساب می‌کنیم که عبارت است از:

$$f(\beta|\mathbf{y})=\int_0^\infty f(\beta,\sigma^2|\mathbf{y})d\sigma^2$$

با تغییر متغیر $\frac{1}{2}\left[(\beta-\beta_1)'\mathbf{V}_1^{-1}(\beta-\beta_1)+n_1 s_1\right]\frac{1}{\sigma^2}=Z$ خواهیم داشت:

$$f(\beta|\mathbf{y})=\frac{c_1}{\left[\frac{n_1 s_1}{2}+\frac{(\beta-\beta_1)'\mathbf{V}_1^{-1}(\beta-\beta_1)}{2}\right]^{\frac{n_1+1}{2}-1}} \quad (۲۵-۶۰)$$

c_1 مقادیر ثابت را نشان می‌دهد.

بدین ترتیب توزیع حاشیه‌ای پسین β به‌صورت توزیع t چندمتغیره می‌باشد (در اینجا K متغیره) که میانگین آن برابر با β_1 است:

$$E(\beta|\mathbf{y})=\beta_1 \quad (۲۵-۶۱)$$

و واریانس آن برابر است با:

$$\mathrm{var}(\beta|\mathbf{y})=\frac{n_1}{n_1-2}s_1^2\mathbf{V}_1^{-1} \quad (۲۵-۶۲)$$

برای تعیین رابطه بین پارامترهای توزیع پسین با پارامترهای توزیع پیشین و داده‌های نمونه، توزیع پسین را به‌صورت زیر نیز به‌دست می‌آوریم:

$$f(\beta,\sigma^2|\mathbf{y})=\frac{f(\beta,\sigma^2,\mathbf{y})}{f(\mathbf{y})}=\frac{L(\mathbf{y}|\beta,\sigma^2)f(\beta,\sigma^2)}{f(\mathbf{y})} \quad (۲۵-۶۳)$$

با استفاده از (۲۵-۴۶) به‌جای تابع درستنمایی و همچنین به‌جای $f(\beta,\sigma^2)$ از (۲۵-۵۴) قرار داده و مقادیر ثابت را با c نشان می‌دهیم:

$$f(\beta,\sigma^2|\mathbf{y})=c\frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta)}{2\sigma^2}}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n_0+1}{2}-1}e^{-\frac{n_0 s_0^2}{2}(\frac{1}{\sigma^2})}e^{-\frac{1}{2}(\beta-\beta_0)(\sigma^2\mathbf{V}_0)^{-1}(\beta-\beta_0)}$$

$$=c\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n+n_0+1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}\left[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\beta)+n_0 S_0^2+(\beta-\beta_0)'\mathbf{V}_0^{-1}(\beta-\beta_0)\right]\frac{1}{\sigma^2}} \quad (۲۵-۶۴)$$

$$c=\frac{(\frac{n_0 s_0}{2})^{\frac{n_0}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n+k}{2}}\Gamma(\frac{n_0}{2})|\mathbf{V}_0|^{\frac{1}{2}}f(\mathbf{y})}$$

با استفاده از (۲۵-۶۴) تابع چگالی حاشیه‌ای پسین β را حساب می‌کنیم:

$$f(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})=\int_0^{\infty} f(\boldsymbol{\beta},\sigma^2|\mathbf{y})d\sigma^2 = c\int(\frac{1}{\sigma^2})^{\frac{n+n_0+1}{2}-1} e^{-\frac{B}{2}\frac{1}{\sigma^2}} d\sigma^2$$

$$B=\left[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\mathbf{B})+n_0 s_0^2+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{V}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)\right] \quad (۲۵-۶۵)$$

برای محاسبه انتگرال فوق، از تبدیل $Z=B/2\sigma^2$ و $d\sigma^2=-(B/2Z^2)dZ$ استفاده می‌کنیم:

$$f(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})=c\int_0^{\infty}(\frac{2Z}{B})^{\frac{n+n_0+1}{2}-1} e^{-Z}\frac{B}{2}\frac{dZ}{Z^2}$$

$$=\frac{c}{\left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{n+n_0+1}{2}}}\int_0^{\infty} Z^{\frac{n+n_0+1}{2}-1} e^{-Z}dZ = \frac{c\Gamma(\frac{n+n_0+1}{2})}{\left(\frac{B}{2}\right)^{\frac{n+n_0+1}{2}-1}}$$

$$=\frac{c_1}{\left[\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})+n_0 s_0^2+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)'\mathbf{V}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)}{2}\right]^{\frac{n+n_0+1}{2}-1}} \quad (۲۵-۶۶)$$

c_1 مقادیر ثابت را نشان می‌دهد.

برای به‌دست آوردن رابطه بین پارامترهای توزیع پسین ما پارامترهای توزیع پیشین و داده‌های نمونه، می‌توان از مقایسه (۶۰-۲۵) و(۶۶-۲۵) استفاده نمود. بخشی از B را که به‌صورت $(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ می‌باشد، بازنویسی می‌کنیم. بدین منظور ابتدا عبارت $\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ را به‌صورت $\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$ نوشته و سپس عبارت زیر را حساب می‌کنیم:

$$(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})=\left[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]'\left[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})-\mathbf{X}(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$=(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})+(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

$$=(n-K)s^2+(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})(\mathbf{X}'\mathbf{X})(\boldsymbol{\beta}-\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

با استفاده از نتیجهٔ فوق، عبارت B در (۶۶-۲۵) را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$B=n_0 s_0^2+(n+K)s^2+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}$$
$$+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0-\boldsymbol{\beta}_0'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}_0'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0$$

$$=\left[n_0 s_0^2+(n-K)s^2+\hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}+\hat{\boldsymbol{\beta}}_0'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0\right]+\boldsymbol{\beta}'\left[\mathbf{V}_0^{-1}+\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]\boldsymbol{\beta}$$
$$-\boldsymbol{\beta}'\left[\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}\right]-\left[\boldsymbol{\beta}_0\mathbf{V}_0^{-1}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\right]\boldsymbol{\beta} \quad (۲۵-۶۹)$$

حال در رابطهٔ (۶۰-۲۵) عبارت داخل کروشه در مخرج کسر را به‌صورت زیر بسط می‌دهیم:

$$n_1 s_1+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_1)'\mathbf{V}_1^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_1)=n_1 s_1+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1$$
$$=\left[n_1 s_1+\boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1\right]+\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_1'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta} \quad (۲۵-۷۰)$$

هر یک از روابط (۶۹-۲۵) و (۷۰-۲۵) دارای چهار جمله هستند که از مقایسه آنها، نتایج زیر به دست می‌آید:

الف) مقایسه جملات دوم نشان می‌دهد که:

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'\left[\mathbf{V}_0^{-1}+\mathbf{X}'\mathbf{X}\right]\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \mathbf{V}_1^{-1}=\mathbf{V}_0^{-1}+\mathbf{X}'\mathbf{X} \quad (۲۵-۷۱)$$

ب) مقایسه جملات سوم (و یا جملات چهارم) نشان می‌دهد که:

$$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'\left[\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right] \Rightarrow \mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (۲۵-۷۲)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{V}_1\left[\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}\right] \quad (۲۵-۷۳)$$

ج) مقایسه جملات اول نشان می‌دهد که:

$$n_1 s_1+\boldsymbol{\beta}_1\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1=n_0 s_0+(n-K)s^2+\hat{\boldsymbol{\beta}}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}}+\boldsymbol{\beta}_0'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0 \quad (۲۵-۷۴)$$

با جایگذاری به‌جای $\boldsymbol{\beta}_1$ از (۷۲-۲۵) و به‌جای $\mathbf{V}_1$ از(۷۱-۲۵) و ساده کردن آن، خواهیم داشت:

$$n_1 s_1^2=n_0 s_0^2+(n-K)s^2+(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1)'\mathbf{y}+(\boldsymbol{\beta}_0-\boldsymbol{\beta}_1)'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0$$
$$=n_0 s_0^2+(n-k)s^2+(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)\left[\mathbf{V}_0+(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0) \quad (۲۵-۷۵)$$

به‌طور خلاصه نتایج زیر به دست می‌آید:

الف) پارامترهای پیشین

$E(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta}_0 : K\times 1$ میانگین ضرایب براساس اطلاعات پیشین

$\text{var}(\boldsymbol{\beta})=s_0^2\mathbf{V}_0 : K\times K$ واریانس ضرایب براساس اطلاعات پیشین

n_0 : درجه آزادی اطلاعات پیشین

ب) پارامترهای نمونه

$\hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X'X})^{-1}(\mathbf{X'y}): K\times 1$ برآورد ضرایب براساس اطلاعات جدید (نمونه)

$s_0^2(\mathbf{X'X})^{-1}: K\times K$ واریانس ضرایب براساس اطلاعات جدید (نمونه)

$$s_0^2=\frac{\sum e_i^2}{n-k}$$

ج) پارامترهای پسین

$E(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})=\boldsymbol{\beta}_1: K\times 1$ میانگین ضرایب براساس اطلاعات پسین

$\text{var}(\boldsymbol{\beta}|\mathbf{y})=\frac{n_1}{n_1-2}s_1^2\mathbf{V}_1^{-1}$ واریانس ضرایب براساس اطلاعات پسین

$n_1=n+n_0$

د) رابطه بین پارامترهای پسین با اطلاعات پیشین و نمونه

$$1)\ n_1=n+n_0 \tag{۲۵-۷۶}$$

$$2)\ n_1s_1^2=n_0s_0^2+(n-K)s^2+(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1)'\mathbf{y}+(\boldsymbol{\beta}_0-\boldsymbol{\beta}_1)'\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0$$
$$=n_0s_0^2+(n-K)s^2+(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0)'\left[\mathbf{V}_0+(\mathbf{X'X})^{-1}\right]^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}_0) \tag{۲۵-۷۷}$$

$$3)\ \mathbf{V}_1^{-1}=\mathbf{V}_0^{-1}+\mathbf{X'X}\Rightarrow\mathbf{V}_1=\left[\mathbf{V}_0^{-1}+\mathbf{X'X}\right]^{-1} \tag{۲۵-۷۸}$$

$$\mathbf{V}_1^{-1}\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}}\Rightarrow\boldsymbol{\beta}_1=\mathbf{V}_1\left[\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}}\right]$$
$$=\left[\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+\mathbf{X'X}\right]^{-1}\left[\mathbf{V}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0+(\mathbf{X'X})\hat{\boldsymbol{\beta}}\right] \tag{۲۵-۷۹}$$

بنابراین $\boldsymbol{\beta}_1$ برآورد بیزین برای $\boldsymbol{\beta}$ و s_1^2 برآورد بیزین برای σ^2 است.

مثال ۱۱-۲۵:[1] فرض کنید که میل نهایی به مصرف براساس داده‌های دو دوره زمانی به‌صورت زیر برآورد شده است:

دوره	تخمین میل نهایی به مصرف (β_0)	واریانس $\hat{\beta}$	درجه آزادی	تخمین انحراف معیار
۱۹۵۰-۱۹۴۰	۰/۶۸۴۸۰۱۴	۰/۰۶۱۸۷۸	۹	۲۴/۹۵۴
۲۰۰۰-۱۹۵۰	۰/۹۲۴۸۱	۰/۰۰۰۰۶۵۸۶۵	۴۹	۹۲/۲۴۴

1- Green(2012)

براساس اطلاعات دوره ۵۰-۱۹۴۰، تخمین فاصله‌ای براساس اطلاعات پیشین برابر با:

$0.6848014\pm 0.061878Z$

$$\beta_0\pm t_{0.025}\sqrt{\text{var}(\hat{\beta})}\Rightarrow 0.68480.4\pm 2.262\sqrt{0.061878}\Rightarrow(0.12212,\ 1.24748)$$

فاصله اطمینان فوق، نسبتاً بزرگ است و نشان دهنده ضعف اطلاعات قبلی (مدل مورد استفاده) است.

حال بر اساس اطلاعات پیشین غیرمفید برای β و σ^2، تخمین چگالی پسین برای β به‌صورت توزیع t یک متغیره است که درجه آزادی آن ۹ می‌باشد. در چنین حالتی دیدیم که تخمین پسین با تخمین داده‌های نمونه (۵۰-۱۹۴۰) برابر است:

$$\tilde{\beta}=\hat{\beta}=0.684801 4$$

$$\text{var}(\tilde{\beta})=\frac{n}{n-2}\text{var}(\hat{\beta})=\frac{11}{9}(0.061878)=0.075628$$

در این حالت تخمین فاصله‌ای برابر با (۱/۳۰۶۸۶ و ۰/۰۶۲۷۴) است.

حال با استفاده از داده‌های دوره ۲۰۰۰-۱۹۵۰ تخمین‌های جدیدی برای β به دست آمده است که در سطر دوم جدول فوق نشان داده شده است.

فرض کنید دوره اول (۵۰-۱۹۴۰) و تخمین‌های آن بیانگر حدس‌های قبلی (توزیع پیشین) برای β باشد.

براین اساس تخمین چگالی پسین β را به دست می‌آوریم. برای سادگی فرض می‌شود که $\sigma^2=24.954$ که در دوره اول به دست آمده است برای دوره دوم معلوم است.

بدین ترتیب، تخمین‌زننده بیزین براساس (۴۳-۲۵) عبارت است از:

$$\tilde{\beta}=\left[\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}\right]^{-1}\left[\frac{1}{\sigma_0^2}\beta_0+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}\hat{\beta}\right]$$
$$=\left[\frac{1}{0.061878}+\frac{1}{0.000065865}\right]^{-1}\left[\frac{1}{0.061878}(0.6848014)+\frac{1}{0.000065865}(0.92481)\right]$$
$$=0.92455$$

مقدار $\tilde{\beta}$ کاملاً به $\hat{\beta}$ نزدیک است، زیرا واریانس مشاهدات نمونه (دوره دوم) از واریانس قبلی (دوره اول) کوچکتر است. واریانس $\tilde{\beta}$ طبق رابطه (۴۵-۲۵) عبارت است از:

$$\text{var}(\tilde{\beta})=\left[\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\sigma^2/\sum x_i^2}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{0.061878}+\frac{1}{0.000065865}\right]^{-1}=0.000065795$$

تخمین فاصله‌ای بیزین عبارت است از:

$$\tilde{\beta} \pm t_{n,0/025}\sqrt{\mathrm{var}(\tilde{\beta})} = 0/92455 \pm 2\sqrt{0/000065795} \Rightarrow (0/90837, 0/94077)$$

بنابراین، تخمین فاصله‌ای بیزین بسیار کوتاه‌تر است.

۲۵-۸-۵ تخمین نقطه‌ای و تابع زیان

تا اینجا دیدیم که تخمین بیزین بیانگر متوسطی از اطلاعات پیشین و داده‌های نمونه است. به ویژه اگر اطلاعات قبلی حاوی هیچ اطلاعات مفیدی در خصوص پارامترها نباشد، آنگاه تخمین بیزین با تخمین کلاسیک (داده‌های نمونه) یکسان می‌باشند. اگر قرار باشد که تخمین بیزین با کلاسیک یکسان باشد، چه لزومی به پرداختن به تخمین نقطه‌ای بیزین است. تنها چیزی که تغییر کرده است، تفسیر ما از نتایج است. به خاطر داریم که وقتی اطلاعات قبلی غیرمفید هستند. تنها اطلاعاتی که در تخمینم پارامترها مهم است، همان داده‌های نمونه می‌باشد. ولی وقتی اطلاعات پیشین مهم باشند، آنگاه نتایج تغییر خواهد کرد.

علاوه بر این، نتایج در صورتی تغییر خواهد کرد که انگیزه تخمین β تغییر کند. تا اینجا بحث بدین صورت بود که گویی هدف نهایی، تخمین β است. اما در مواردی، هدف تحلیل‌گران آن است که با تخمین پارامتر موردنظر، می‌خواهند توانایی تصمیم‌گیری داشته باشند. در چنین مواردی معمولاً یک تابع زیان[1] تعریف می‌شود و هدف تصمیم گیرنده آن است که این تابع زیان را حداقل نماید. تابع زیان را با $L(\theta,\tilde{\theta})$ نشان می‌دهیم. این تابع زیان می‌تواند به‌صورت $L(\theta,\tilde{\theta})=(\tilde{\theta}-\theta)^2$ ، $L(\tilde{\theta},\theta)=|\tilde{\theta}-\theta|$ و ... باشد. اگر هدف حداقل کردن تابع زیان انتظاری باشد، آنگاه زیان انتظاری برابر با $E\left[L(\tilde{\theta},\theta)|\mathbf{y}\right]$ است. اگر تابع زیان انتظاری به‌صورت درجه دو تعریف شده باشد، خواهیم داشت:

$$E\left[L(\tilde{\theta},\theta)|\mathbf{y}\right]=E\left[(\tilde{\theta}-\theta)^2|\mathbf{y}\right] \tag{۲۵-۸۰}$$

برای حداقل شدن زیان انتظاری، مشتق آن را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$E\left[2(\tilde{\theta}-\theta)|\mathbf{y}\right]=0 \Rightarrow \tilde{\theta}=E\left[\theta|\mathbf{y}\right] \tag{۲۵-۸۱}$$

1- loss function

بنابراین، $\tilde{\theta}$ که زیان انتظاری را حداقل می‌کند برابر با میانگین پسین θ است که همان تخمین‌زنندهٔ بیزین است. اگر شکل تابع زیان تغییر کند، تخمین‌زننده‌ای که تابع زیان را حداقل می‌کند نیز تغییر خواهد کرد.

۲۵-۸-٤ آزمون فرضیه

روش بیزین برای آزمون فرضیه از یک طرف تا حدودی مشابه آزمون فرضیه کلاسیک است و از طرف دیگر وابسته به تخمین بیزین می‌باشد. در آزمون فرضیه، H_0 بدان معنا است که A صحیح است و H_1 بدان معنا است که A صحیح نیست. برای سادگی، توجه خود را به آزمون فرضیه در خصوص پارامترهای معادله رگرسیون، معطوف می‌کنیم. فرض کنید که قبل از مشاهدهٔ داده‌های نمونه ما قادریم احتمال‌های پیشین $P(H_0)$ و $P(H_1)$ را برای این دو فرضیه، ارائه کنیم. در این صورت نسبت احتمال پیشین عبارت است از:

$$R_{prior}=\frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{۲۵-۸۲}$$

به‌عنوان مثال، این فرضیه‌ها می‌تواند عدم‌اطمینان در مورد علامت پارامتر β باشد که $H_0:\beta\geq 0$ در مقابل $H_1:\beta<0$ می‌باشد. احتمال این فرضیه‌ها ۵۰-۵۰ است به‌گونه‌ای که $\frac{0/5}{0/5}=1$ می‌باشد. بعد از نمونه‌گیری و گردآوری اطلاعات جدید، نسبت احتمال پیشین، تعدیل می‌شود به‌گونه‌ای که نسبت احتمال پسین را شکل می‌دهیم.

$$R_{posterior}=B_{01}R_{prior} \tag{۲۵-۸۳}$$

B_{01} را عامل بیز[1] می‌نامند که برای مقایسه این دو فرضیه به‌کار می‌رود. رابطه فوق اثر داده‌های نمونه و نسبت احتمال پیشین را ترکیب می‌کند.

عامل بیز را می‌توان براساس تابع درستنمایی تحت هر یک از فرضیه‌های H_0 و H_1 بیان نمود. تابع درستنمایی عبارت است از:

$$L(\mathbf{y}|\beta,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{(\mathbf{y}-X\beta)'(\mathbf{y}-X\beta)}{2\sigma^2}} \tag{۲۵-۸۴}$$

براساس احتمال‌های پیشین در خصوص پارامترها، امید ریاضی تابع درستنمایی تحت فرضیه H_j عبارت است از:

$$E_{\beta,\sigma^2}\left[L(\mathbf{y}|\beta,\sigma^2,H_j)\right]=\int_{\beta}\int_{\sigma^2} L(\mathbf{y}|\beta,\sigma^2,H_j)f(\beta,\sigma^2)d\beta d\sigma^2 \qquad (۲۵\text{–}۸۵)$$

امید ریاضی فوق را با $f(\mathbf{y}|H_j)$ نشان می‌دهیم. این امید ریاضی در واقع متوسط احتمال (تابع درستنمایی) برای Y (داده‌های نمونه) است که براساس تابع احتمال پیشین (β,σ^2) حساب شده است. در واقع متوسط تابع درستنمایی است که وزن‌ها معادل با تابع احتمال پیشین می‌باشد. $f(\mathbf{y}|H_j)$ یک نوع تابع چگالی شرطی است که می‌توان آن را چگالی پیش‌بینی کننده Y تحت فرضیه H_j دانست. بنابراین، براساس داده‌های نمونه، قضیه بیز را برای محاسبه احتمال فرضیه H_j به کار می‌بریم:

$$P(H_j|\mathbf{y})=\frac{f(\mathbf{y},H_j)}{P(\mathbf{y})}=\frac{f(\mathbf{y}|H_j)P(H_j)}{f(\mathbf{y})} \qquad (۲۵\text{–}۸۶)$$

$P(H_j)$ احتمال پیشین H_j و $P(H_j|\mathbf{y})$ احتمال پیشین H_j می‌باشد.

بنابراین نسبت احتمال پسین عبارت است از:

$$R_{posterior}=\frac{P(H_0|\mathbf{y})}{P(H_1|\mathbf{y})}=\frac{f(\mathbf{y}|H_0)P(H_0)}{f(\mathbf{y}|H_1)P(H_1)}=\left(\frac{f(\mathbf{y}|H_0)}{f(\mathbf{y}|H_1)}\right)\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) \qquad (۲۵\text{–}۸۷)$$

بدین ترتیب عامل بیز عبارت است از:

$$B_{01}=\frac{f(\mathbf{y}|H_0)}{f(\mathbf{y}|H_1)} \qquad (۲۵\text{–}۸۸)$$

حال بحث فوق را برای معادله رگرسیون به‌کار می‌بریم. فرض کنید که دو مدل به‌صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}&=\beta_0\mathbf{X}_0+\mathbf{u}_0\\ \mathbf{y}&=\beta_1\mathbf{X}_1+\mathbf{u}_1\end{aligned} \qquad (۲۵\text{–}۸۹)$$

فرض کنید که توزیع‌های پیشین (β,σ^2) به‌صورت «نرمال- معکوس گاما» باشد. در این صورت برای نمونه‌هایی با حجم نسبتاً بزرگ، ثابت می‌شود که عامل بیز برابر است با:

1- Bayes factor

$$B_{01}\equiv\left(\frac{s_0^2}{s_1^2}\right)^{-\frac{n+m}{2}}=\left(\frac{1-R_0^2}{1-R_1^2}\right)^{-\frac{n+m}{2}} \qquad (۲۵\text{–}۹۰)$$

بنابراین، نتیجه به نفع مدلی است که R^2 بالاتری داشته باشد.

حال می‌توان یک حالت خاص را نیز بررسی کرد که در آن، مدل ۱ را داریم ولی مدل ۰ را نداریم. به‌عبارت دیگر مدل ۱ را در مقابل نداشتن مدل، آزمون می‌کنیم که در این صورت $\beta_0=0$ و $R_0^2=0$ خواهد بود. بنابراین، عامل بیز عبارت است از:

$$B_{01}=(1-R_1^2)^{\frac{n+m}{2}} \qquad (۲۵\text{–}۹۱)$$

اگر معادله برازش بهتری داشته باشد، آنگاه عامل بیز کوچکتر شده و به نفع مدل ۱ می‌باشد.

اگر احتمال‌های پیشین حاوی اطلاعات مفید برای β و σ^2 نباشند، آنگاه با معرفی تابع احتمال $\frac{1}{\sigma^2}$، عامل بیز عبارت است از:

$$B_{01}=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{K+1}{2})}\left(\frac{n-K}{2}\right)^{\frac{K}{2}}(1-R^2)^{\frac{n-K-1}{2}} \qquad (۲۵\text{–}۹۲)$$

این نتیجه خیلی مشابه نتیجهٔ قبلی است که تفاوت‌ها ناشی از تصحیح درجه آزادی و استفاده از چند تقریب می‌باشند.

مسائل

۱–۲۵ فرض کنید که X دارای توزیع یکنواخت با پارامتر θ می‌باشد:

$$f(X)=\frac{1}{\theta} \quad ; \quad 0<X<\theta$$

برای ارزیابی پارامتر θ فرض کنید که توزیع پیشین به‌صورت زیر باشد:

$$f(\theta)=\theta e^{-\theta} \quad ; \quad \theta>0$$

برای ارزیابی دقیق‌تر θ نمونه‌ای به حجم ۱ انتخاب می‌شود. در اینجا برای تخمین θ از $2\overline{X}$ استفاده می‌کنیم (زیرا $E(X)=\frac{\theta}{2}$ است و لذا تخمین‌زنندهٔ θ را به‌صورت $\hat{\theta}=2\overline{X}$ معرفی می‌کنیم). توزیع پسین θ را به‌دست آورید.

۲–۲۵ متغیر تصادفی X دارای توزیع دونقطه‌ای با پارامتر p می‌باشد:

$P(X)=p^{X}(1-p)^{1-X} \quad ; \quad X=0,1$

برای ارزیابی نسبت p، تصور قبلی این است که p دارای توزیع بتا است:

$$f(p)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)+\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \quad ; \quad 0<p<1$$

اکنون بر اساس داده‌های نمونه، تخمین‌زنندهٔ $\overline{X}=\frac{Y}{n}$ را که $Y=\sum X_i$ می‌باشد، برای ارزیابی پارامتر p به‌کار می‌بریم. توزیع دقیق $\overline{X}$ یا Y با فرض ثابت بودن p، دوجمله‌ای است:

$$P(\overline{X}|p)=P(Y|p)=C_n^Y p^Y(1-p)^{n-Y} \quad ; \quad Y=0,1,2,\dots,n$$

توزیع پسین p را به‌دست آورید.

۳-۲۵ برای تخمین پارامتر λ در توزیع پوآسن، حدس قبلی این است که λ دارای توزیع گاما است (توجه شود که متغیر تصادفی X توزیع پوآسن با پارامتر λ دارد، اما λ بر اساس حدس‌های قبلی دارای توزیع گاما است):

$$f(\lambda)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\lambda-1}e^{-\beta\lambda} \quad ; \quad \lambda>0$$

برای ارزیابی دقیقتر λ، نمونه‌ای به حجم n از این جامعه (که در این جامعه، X توزیع پوآسن دارد) انتخاب می‌کنیم و $\overline{X}=\frac{Y}{n}$ به‌عنوان تخمین‌زننده λ معرفی می‌کنیم ($Y=\sum Y_i$) که توزیع $\overline{X}$ با فرض ثابت بودن λ عبارت است از:

$$P(\overline{X}|\lambda)=P(Y|\lambda)=\frac{e^{-\lambda}\lambda Y}{Y!} \quad ; \quad Y=0,1,2,\dots$$

توزیع پسین λ را به‌دست آورید.

۴-۲۵ در مسئله ۱-۲۵ که X توزیع یکنواخت با پارامتر θ دارد، فرض بر این بود که توزیع پیشین θ به‌صورت زیر باشد:

$$f(\theta)=\theta e^{-\theta} \quad ; \quad \theta>0$$

که امید ریاضی پیشین برابر با $E(\theta)=2$ می‌باشد. از طرف دیگر توزیع پسین θ به‌صورت زیر به‌دست آمد:

$$f(\theta|\overline{X})=\theta e^{(\overline{X}-\theta)} \quad ; \quad \theta>\overline{X}$$

تخمین کلاسیک و بیزین را برای θ به‌دست آورید.

۵-۲۵ در مسئله ۲-۲۵، X توزیع دونقطه‌ای با پارامتر p دارد. توزیع پیشین p به‌صورت تابع چگالی بتا فرض شد:

$$f(p)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1} \; ; \; 0<p<1$$

تخمین بیزین را برای پارامتر p به‌دست آورید.

۶-۲۵ در مسئله ۵-۲۵ فرض کنید که $\alpha=6$ و $\beta=6$ باشد. همچنین فرض کنید که نمونه‌ای به حجم $n=10$ انتخاب می‌شود و بر اساس داده‌های نمونه $\overline{X}=\frac{Y}{n}=\frac{4}{10}$ به‌دست می‌آید. بنابراین تخمین کلاسیک برای p برابر با $\overline{X}=0/4$ می‌باشد. از طرف دیگر تخمین p با استفاده از قضاوت‌های ذهنی (توزیع پیشین) برابر با $E(p)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{6}{6+4}=0/6$ می‌باشد. تخمین بیزین را به‌دست آورید.

۷-۲۵ در مسئله ۶-۲۵، اگر حجم نمونه دو برابر شود، تخمین بیزین برای پارامتر p را به‌دست آورید.

ضمائم

ضمیمه الف

معادلات تفاضلی[1]

در تحلیل داده‌های اقتصادی و مالی، زمان به‌عنوان متغیری ناپیوسته در نظر گرفته می‌شود. این وضعیت، لزوم استفاده از معادلات تفاضلی فراهم نموده است.

تفاضل

اگر متغیر t زمان را نشان دهد و ناپیوسته باشد، در این صورت Y_t بیانگر مقدار Y در زمان t می‌باشد. تغییرات Y را با $\frac{\Delta Y_t}{\Delta t} = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{t-(t-1)} = Y_t - Y_{t-1}$ نشان می‌دهیم که مشابه با تعریف مشتق است. ولی بدیهی است که نمی‌توان مفهوم مشتق را بکار برد، زیرا مشتق بیانگر نسبت تغییرات Y به تغییرات t در فاصله بی‌نهایت کوچک است. در حالی که در اینجا کوچکترین تغییر t برابر با ۱ است و لذا به جای مشتق و دیفرانسیل از اصطلاح «تفاضل» استفاده می‌شود. بدین ترتیب $\frac{\Delta Y_t}{\Delta t} = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$ را تفاضل مرتبه اول می گوییم.

به‌عنوان مثال اگر $Y_t = ۴ + ۲t$ باشد، تفاضل مرتبه اول آن عبارت است از:

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (۴ + ۲t) - (۴ + ۲(t-۱)) = ۲$$

۱- برای جزئیات بیشتر به «سوری، علی، اقتصاد ریاضی، انتشارات سمت، چاپ هفتم، ۱۳۹۴، فصل دوم» مراجعه کنید.

می‌توان تفاضل‌های مراتب بالاتر را نیز محاسبه نمود. به‌عنوان مثال تفاضل مرتبه دوم برابر است با:

$$\Delta^2 Y_t = \Delta(\Delta Y_t) = \Delta(Y_t - Y_{t-1}) = \Delta Y_t - \Delta Y_{t-1}$$
$$= (Y_t - Y_{t-1}) - (Y_{t-1} - Y_{t-2}) = Y_t - 2Y_{t-1} + Y_{t-2}$$

به‌عنوان مثال، تفاضل مرتبه دوم برای $Y_t = 5t^2$ عبارت است از:

$$\Delta^2 Y_t = 5t^2 - 2\times 5(t-1)^2 + 5(t-2)^2 = 10$$

معادله تفاضلی

معادله تفاضلی را بدین صورت مشخص می‌شود که در آن متغیر مستقل t ناپیوسته است و متغیر Y با وقفه‌های مختلف یا اندیس‌های مختلف ظاهر شده است. هر یک از معادلات $Y_t + 4Y_{t-1} = 0$، $2Y_{t+1} + 4Y_t + Y_{t-2} = 8$ و $\Delta Y_t = 0$ ~ Y_{t+1} یک معادله تفاضلی هستند.

مرتبه معادله تفاضلی با توان Δ مشخص می‌شود. به‌عنوان مثال $\Delta^2 Y_t$ بیانگر تفاضل مرتبه دوم است. اما دیدیم که می‌توان $\Delta^2 Y_t$ را بر حسب وقفه‌های Y نوشت. بنابراین برای تعیین مرتبه معادله تفاضلی از بزرگترین توان Δ و یا از تفاوت بین بزرگترین و کوچکترین اندیس استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال مرتبه معادله تفاضلی $Y_t - 4Y_{t-1} + Y_{t-3} = 2$ برابر با ۳ است، زیرا $t-(t-3) = 3$ می‌باشد.

از طرف دیگر اگر توان Y در یک معادله تفاضلی برابر با ۱ باشد به آن معادله خطی و درغیر این صورت آن را غیرخطی گویند.

معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

به‌طور کلی یک معادله تفاضلی خطی مرتبه n به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_0 Y_t + a_1 Y_{t-1} + \ldots + a_n Y_{t-n} = b \qquad (1)$$

اگر ضرایب $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثابت باشند به آن معادله تفاضلی با ضرایب ثابت گویند. ولی اگر تابعی از t باشند به آن معادله تفاضلی با ضرایب متغیر گفته می‌شود، مانند $4Y_{t+1} + 5Y_{t+2} = 10$ که دارای ضرایب ثابت و $Y_t - 2Y_{t-1} = t$ یا $4Y_{t+1} + 5tY_{t+2} = 10$ که دارای ضرایب متغیر می‌باشد.

در معادله تفاضلی (۱) که یک معادله خطی با ضرایب ثابت است، اگر b برابر صفر باشد به آن معادله همگن و در غیر این صورت به آن غیرهمگن گویند.

حل معادله تفاضلی

ساده‌ترین شکل یک معادله تفاضلی خطی مرتبه اول و همگن را در نظر بگیرید:

$$Y_t - aY_{t-1} = 0$$

این معادله را می‌توان جایگذاری‌های تکراری حل نمود، یعنی Y را بر حسب t نوشت (معمولاً فرض می‌شود که مقدار اولیه Y مثلاً Y_0 معلوم باشد):

$Y_0 =$ معلوم

$$Y_1 = aY_0$$
$$Y_2 = aY_1 = a(aY_0) = a^2 Y_0$$
$$Y_3 = aY_2 = a(a^2 Y_0) = a^3 Y_0$$

با تعمیم آن برای هر t خواهیم داشت:

$$Y_t = Y_0 a^t \quad ; \quad t = 0,1,\ldots \qquad (2)$$

حال اگر $b \neq 0$ باشد، معادله $Y_t - aY_{t-1} = b$ را داریم که جواب آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$Y_0 =$ معلوم

$$Y_1 = aY_0 + b$$
$$Y_2 = aY_1 + b = a(aY_0 + b) + b = Y_0 a^2 + b(1+a)$$
$$Y_3 = aY_2 + b = (Y_0 a^2 + b(1+a)) + b = Y_0 a^3 + b(1+a+a^2)$$

و با تعمیم آن برای t خواهیم داشت:

$$Y_t = Y_0 a^t + b(1 + a + a^2 + \ldots + a^{t-1}) \qquad (3)$$

بدیهی است که عبارت داخل پرانتز مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدر نسبت a است که حاصل آن برابر با $\frac{1-a^t}{1-a}$ می‌باشد:

$$Y_t = Y_0 a^t + b\frac{1-a^t}{1-a} = \left(Y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^t + \frac{b}{1-a} \quad ; \quad a \neq 1 \qquad (4)$$

اگر $a = 1$ باشد در این صورت با استفاده از (۳) به جواب زیر می‌رسیم:

$$Y_t = Y_0 1^t + b(1+1+1+\ldots+1) = Y_0 + bt \qquad (5)$$

به‌عنوان مثال، برای حل معادله $Y_0 = 8$ ، $2Y_{t+1} - 4Y_t = 10$، ابتدا طرفین این معادله را به ۲ تقسیم کرده و سپس یک دوره به عقب می‌بریم:

$$Y_t - 2Y_{t-1} = 5\ ,\ Y_0 = 8$$

چون $a \neq 1$ است، لذا طبق نتیجه (۴) خواهیم داشت:

$$Y_t = \left(8 - \frac{5}{1-2}\right)(2)^t + \frac{5}{1-2} = 13(2)^t - 5$$

عملگرهای وقفه

استفاده از عملگرهای وقفه می‌تواند حل معادلات تفاضلی را ساده‌تر نماید. ابتدا به تعریف، و خواص عملگرهای وقفه می‌پردازیم.

عملگر وقفه که با L نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$LX_t = X_{t-1}$$

و یا در حالت کلی

$$L^i X_t = X_{t-i}$$

و خواص آن عبارتند از:

$$L(X_t + Z_t) = LX_t + LZ_t = X_{t-1} + Z_{t-1}$$
$$L(aX_t) = aLX_t = aX_{t-1}$$
$$La = a$$
$$L(X_t Z_t) = X_{t-1} Z_{t-1}$$
$$L^i b^t = b^{t-i}$$

حال برای عملگر وقفه، تعاریف زیر را نیز مطرح می‌کنیم:

$$\beta(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i L^i = 1 + \beta^1 L^1 + \beta^2 L^2 + \ldots = \frac{1}{1-\beta L}$$

$$\beta(L)_{t-1} = \sum_{i=0}^{t} \beta^i L^i = 1 + \beta L + \beta^2 L^2 + \ldots + \beta^t L^t = \frac{1-\beta^t L^t}{1-\beta L}$$

بدیهی است که اگر $\beta = 1$ باشد، خواهیم داشت:

$$\beta(L)_{t-1} = \sum_{i=0}^{t-1} L^i = \sum_{i=0}^{t-1} 1 = t$$

اما می‌توان $\beta(L)$ را به‌صورت زیر تجزیه نمود:

$$\beta(L) = \sum_{i=0}^{t-1} \beta^i L^i + \beta^t L^t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i L^i = \beta(L)_{t-1} + \beta^t L^t \beta(L)$$

بنابراین روابط زیر به‌دست می‌آید که در حل معادلات تفاضلی، مفید می‌باشند:

$$\beta(L) = \frac{\beta(L)_{t-1}}{1-\beta^t L^t} \qquad (۷)$$

$$\beta(L)_{t-1} = (1-\beta^t L^t)\beta(L)$$

حال با استفاده از عملگر وقفه و خواص آن می‌توان معادله تفاضلی مرتبه اول را حل نمود:

$$Y_t - aY_{t-1} = b$$
$$Y_t - aLY_t = b \Rightarrow (1-aL)Y_t = b \qquad (۸)$$
$$Y_t = \frac{b}{1-aL} = b\frac{1}{1-aL} = b\,a(L) \quad ; \quad a(L) = \frac{1}{1-aL}$$

طبق (۷) اگر به‌جای $a(L)$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$Y_t = b\,a(L) = b\frac{a(L)_{t-1}}{1-a^t L^t} \Rightarrow (1-a^t L^t)Y_t = b\,a(L)_{t-1}$$

با جایگذاری به جای $a(L)_{t-1}$، طبق روابط (۶) خواهیم داشت:

$$Y_t - a^t L^t Y_t = b\sum_{i=0}^{t-1} a^i L^i$$

با توجه به اینکه $L^t Y_t = Y_{t-t} = Y_0$ و $L^i = 1$ است، نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

$$Y_t - a^t Y_0 = b\sum_{i=0}^{t-1} a^i$$

$$Y_t - a^t Y_0 = b\frac{1-a^t}{1-a}$$

$$Y_t = Y_0 a^t + b\frac{1-a^t}{1-a} = \left(Y_0 - \frac{b}{1-a^t}\right)a^t + \frac{b}{1-a} \quad ; \quad a \neq 1$$

اما اگر $a = 1$ باشد در این صورت، خواهیم داشت:

$$(1-a^t L^t)Y_t = b\,a(L)_{t-1} \Rightarrow (1-L^t)Y_t = b\,a(L)_{t-1}$$

و طبق (۶) و (۷) داریم:

$$Y_t - L^t Y_t = bt \Rightarrow Y_t - Y_0 = bt \Rightarrow Y_t = Y_0 + bt$$

نتیجه مباحث فوق این است که جواب معادله $Y_t - aY_{t-1} = 0$ به صورت $Y_t = c\lambda^t$ است (c ثابت است). اگر به جای Y_t و Y_{t-1} قرار دهیم خواهیم داشت:

$$c\lambda^t - ac\lambda^{t-1} = 0 \Rightarrow c\lambda^{t-1}(\lambda - a) = 0 \Rightarrow \lambda - a = 0$$

$\lambda - a = 0$ را معادله مشخصه و جواب آن یعنی $\lambda = a$ را ریشه مشخصه می‌گویند.

همگرایی معادلات تفاضلی مرتبه اول

شرط همگرایی معادلات تفاضلی خطی مرتبه اول این است که قدر مطلق ریشه مشخصه کوچکتر از ۱ باشد یا $1 > \lambda > -1$ باشد. در این صورت مسیر زمانی Y_t با افزایش t به مقدار خاصی میل می‌کند. به‌عنوان مثال برای بررسی همگرایی معادلـه $Y_0 = 5$ ، $2Y_t - Y_{t-1} = 4$ ابتدا آن را به صورت $Y_t - 0/5Y_{t-1} = 2$ می‌نویسیم. معادله مشخصه و ریشه آن عبارت است از:

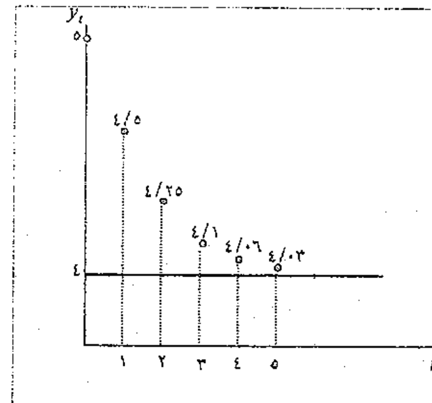
$$\lambda - 0/5 = 0 \Rightarrow \lambda = 0/5$$

چون ریشه مشخصه کوچکتر از ۱ است لذا Y همگرا (مانا) است. از طرف دیگر جواب این معادله عبارت است از:

$$Y_t = (5 - \frac{2}{1-0/5})(0/5)^t + \frac{2}{1-0/5} = (0/5)^t + 4$$

بدیهی است که با افزایش t مقدار Y_t به سمت ۴ میل می‌کند.

همگرایی (مانایی) Y روی نمودار نشان داده شده است.



حل معادلات تفاضلی خطی مرتبه دوم

معادله تفاضلی مرتبه دوم را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$Y_t - a_1Y_{t-1} - a_2Y_{t-2} = b \qquad (9)$$

با استفاده از عملگرهای وقفه خواهیم داشت:

$$Y_t - a_1LY_t - a_2L^2Y_t = b \Rightarrow (1 - a_1L - a_2L^2)Y_t = b$$

ضریب Y_t را می‌توان تجزیه نمود و به‌صورت زیر نوشت:

$$1 - a_1L - a_2L^2 = (1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L) \qquad (10)$$

می‌توان (۱۰) را به‌صورت زیر تنظیم نمود:

$$1 - a_1L - a_2L^2 = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)L - \lambda_1\lambda_2L^2$$

برای برقراری این تساوی بایستی روابط زیر برقرار باشد:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_1 \ , \ \lambda_1\lambda_2 = a_2$$

با حل آن برای λ_1 و λ_2 خواهیم داشت:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \qquad (11)$$

بنابراین λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادله زیر هستند:

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = 0 \qquad (12)$$

که به آن معادله مشخصه و به ریشه‌های آن «ریشه‌های مشخصه» گویند.

حال (۱۲) را در (۹) جایگزین می‌کنیم:

$$(1-\lambda_1L)(1-\lambda_2L)Y_t = b \qquad (13)$$

ابتدا $(1-\lambda_2L)Y_t = Z_t$ در نظر گرفته و سپس در (۱۳) جایگزین می‌کنیم:

$$(1-\lambda_1L)Z_t = b \qquad (14)$$

حال (۱۴) یک معادله تفاضلی مرتبه اول است که جواب آن عبارت است از:

$$Z_t = c\lambda_1^t + \frac{b}{1-\lambda_1} \qquad (15)$$

اکنون به‌جای Z_t عبارت $(1-\lambda_2L)Y_t$ را در (۱۵) قرار می‌دهیم:

$$(1-\lambda_2L)Y_t = c\lambda_1^{t-1} + \frac{b}{1-\lambda_1} \qquad (16)$$

معادله (۱۶) یک معادله تفاضلی مرتبه اول است که ضریب سمت راست آن متغیر می‌باشد، زیرا تابعی از t است که آن را با W_t نشان می‌دهیم:

$$(1-\lambda_2L)Y_t = W_t \ ; \ W_t = c\lambda_1^{t-1} + \frac{b}{1-\lambda_1} \qquad (17)$$

با استفاده از عملگرهای وقفه، این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y_t = \frac{1}{1-\lambda_2 L} W_t = \lambda_2(L) W_t = \lambda_2(L)\left(c\lambda_2^{t-1} + \frac{b}{1-\lambda_1}\right) \tag{18}$$

به‌جای $\lambda_2(L)$ معادل آن یعنی $\frac{\lambda_2(L)_{t-1}}{1-\lambda_2^t L^t}$ قرار می‌دهیم:

$$Y_t = \frac{\lambda_2(L)_{t-1}}{1-\lambda_2^t L^t} W_t \Rightarrow (1-\lambda_2^t L^t) Y_t = \lambda_2(L)_{t-1} W_t$$

$$(1-\lambda_2^t L^t) Y_t = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_2^i L^i W_t \Rightarrow Y_t - \lambda_2^t Y_\cdot = \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_2^i W_{t-i}$$

حال به جای W_{t-i} قرار داده و نتیجه را ساده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_2^i W_{t-i} &= \sum_{i=0}^{t-1} \lambda_2^i \left(A\lambda_1^{t-i-1} + \frac{b}{1-\lambda_1}\right)\\ &= A\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_2^i \lambda_1^{t-i-1} + \frac{b}{1-\lambda_1}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_2^i \\ &= A\lambda_1^{t-1}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^i + \frac{b}{1-\lambda_1}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_2^i\end{aligned} \tag{19}$$

از آنجا که حاصل جمع‌ها به‌صورت تصاعد هندسی هستند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{t-1} \lambda_2^i W w_{t-i} &= A\lambda_1^{t-1}\frac{1-\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^t}{1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \frac{b}{1-\lambda_1}\frac{1-\lambda_2^t}{1-\lambda_2}\\ &= \frac{A}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^t + \left(\frac{A}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{b}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\right)\lambda_2^t + \frac{b}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\end{aligned}$$

حال به جای $\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_2^i w_{t-i}$ قرار داده و نتیجه را ساده می‌کنیم:

$$Y_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \frac{b}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} \tag{20}$$

همچنین توجه شود که $(1-\lambda_1)(1-\lambda_2) = 1 - a_1 - a_2$ می‌باشد.

جواب فوق در صورتی درست است که ریشه‌های مشخصه، حقیقی و متمایز باشند. اما اگر $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ باشد، در این صورت ریشه‌ها مضاعف هستند که می‌توان با استفاده از (۱۹) $\sum_{i=0}^{t-1}\lambda_2^i w_{t-i}$ به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda^i W_{t-i} &= A\lambda^{t-1}\sum_{i=0}^{t-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda}\right)^i + \frac{b}{1-\lambda}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda^i\\ &= A\lambda^{t-1}\sum_{i=0}^{t-1}1 + \frac{b}{1-\lambda}\sum_{i=0}^{t-1}\lambda^i\\ &= A\lambda^{t-1}t + \frac{b}{1-\lambda}\frac{1-\lambda^t}{1-\lambda}\\ &= (A\lambda^{-1})t\lambda^t - \frac{b}{(1-\lambda)^2}\lambda^t + \frac{b}{(1-\lambda)^2}\end{aligned} \tag{21}$$

و لذا با ساده کردن جواب، خواهیم داشت:

$$Y_t = c_1 t\lambda^t + c_2\lambda^t + \frac{b}{(1-\lambda)^2} \tag{22}$$

بدیهی است که با ریشه‌های مضاعف، $\lambda = \frac{a_1}{2}$ می‌باشد.

حالت سوم این است که ریشه‌ها مختلط باشند. در این صورت ریشه‌ها متمایزند ولی حقیقی نیستند.

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{-(a_1^2+4a_2)}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha = \frac{a_1}{2}\ ,\quad i = \sqrt{-1}\ ,\quad \beta = \frac{\sqrt{-(a_1^2+4a_2)}}{2}$$

اگر به جای λ_1 و λ_2 قرار داده و نتیجه را بر حسب روابط مثلثاتی بنویسیم، جواب نهایی عبارت است از:

$$Y_t = kr^t\cos(\gamma + \theta t) + \frac{b}{1-a_1-a_2} \tag{23}$$

k و r ثابت‌های این معادله هستند که r برابر با $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$ است.

همگرایی معادلات تفاضلی مرتبه دوم

شرط همگرایی برای هر یک از حالت‌های معادله تفاضلی عبارت است از:

الف) ریشه‌های حقیقی و متمایز

شرط همگرایی این است که هر دو ریشه بین ۱- و ۱ باشند ($-1 < \lambda_i < 1$). فرض کنید λ_1 ریشه بزرگتر و λ_2 ریشه کوچکتر است. بدیهی است که اگر λ_1 کوچکتر از ۱ باشد، λ_2 نیز قطعاً کوچکتر از ۱ خواهد شد و اگر λ_2 بزرگتر از ۱- باشد قطعاً λ_1 نیز بزرگتر ۱- خواهد شد:

$$\lambda_1 < 1 \ , \ \lambda_2 > -1$$

$$\lambda_1 < 1 \quad \Rightarrow \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} < 1 \Rightarrow a_1 + a_2 < 1$$

$$\lambda_2 > -1 \quad \Rightarrow \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} > -1 \Rightarrow -a_1 + a_2 < 1$$

بنابراین شرایط همگرائی (مانایی) بر حسب محدودیت‌هایی بیان می‌شود که بایستی روی ضرایب اعمال شود:

$$a_1^2 + 4a_2 > 0 \ , \quad a_1 + a_2 < 1 \ , \quad -a_1 + a_2 < 1 \tag{۲۴}$$

این روابط در نمودار (۱) نشان داده شده است که در بالای منحنی $a_1^2 + 4a_2 = 0$ و زیر خطوط $a_1 + a_2 = 1$ و $-a_1 + a_2 = 1$ قرار دارد.

ب) ریشه‌های مضاعف

در این حالت، شرط همگرائی این است که ریشهٔ مشخصه بین ۱ و ۱- باشد:

$$\lambda = \frac{a_1}{2} \ , \quad -1 < \lambda < 1$$

$$\lambda < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 < 2$$

$$\lambda > -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_1}{2} > -1 \quad \Rightarrow \quad a_1 > -2$$

لذا درحالتی که ریشه‌های حقیقی و مضاعف باشد، محدودیت زیر تضمین می‌کند که معادله تفاضلی، همگرا باشد:

$$a_1^2 + 4a_2 = 0 \ , \quad -2 < a_1 < 2 \tag{۲۵}$$

در نمودار (۱) شرط (۲۵) بیانگر نقاط روی منحنی $a_1^2 + 4a_2 = 0$ در محدوده‌ای است که a_1 بین ۲- و ۲ باشد.

ج) ریشه‌های مختلط

با توجه به معادله تفاضلی واضح است که قسمت مثلثاتی آن یعنی $\cos(\gamma + \theta t)$ دارای نوسانات یکنواختی می‌باشد. اینکه این نوسان همگرا است یا واگرا بستگی به ضریب آن یعنی r^t دارد. اگر $0 < r < 1$ باشد، در این صورت با افزایش t مقدار r^t به سمت صفر میل می‌کند و موجب می‌شود تا معادله تفاضلی همگرا باشد.

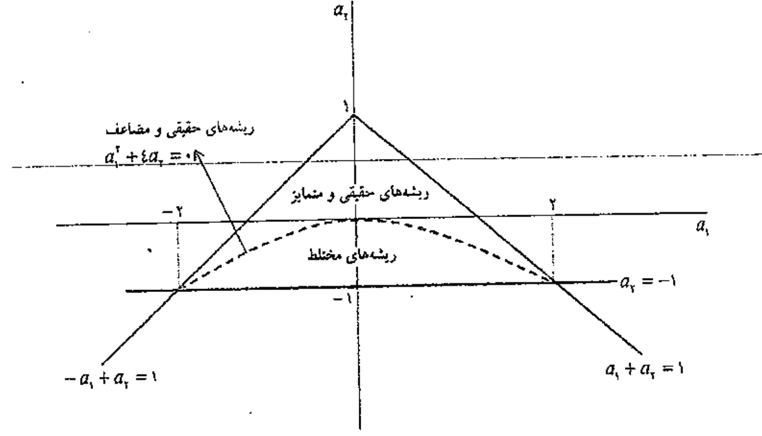
$$r < 1 \ \Rightarrow \ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < 1 \ \Rightarrow \ \alpha^2 + \beta^2 < 1$$

$$\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{-(a_1^2 + 4a_2)}}{2}\right)^2 < 1 \ \Rightarrow \ a_2 > -1$$

بنابراین شرط همگرائی در این حالت عبارت است از:

$$a_1^2 + 4a_2 < 0 \ , \quad a_2 > -1 \tag{۲۶}$$

در نمودار (۱) نقاط زیر منحنی $a_1^2 + 4a_2 = 0$ و بالای خط $a_2 > -1$ می باشد.



شرط همگرایی معادلات تفاضلی مرتبه دوم

به‌عنوان مثال، همگرائی معادله زیر را بررسی می کنیم.

$$Y_t - 0/5Y_{t-1} + 0/2Y_{t-2} = 0$$

در این معادله، $a_1 = 0/5$ و $a_2 = -0/2$ است که ریشه‌های آن مختلط هستند، زیرا:

$$a_1^2 + 4a_2 = -0/55 < 0$$

و چون $a_2 = -0/2 > -1$ است، لذا همگرا است.

در حالت کلی یک معادله تفاضلی مرتبه p عبارت است از:

$$Y_t - a_1Y_{t-1} - \cdots - a_pY_{t-p} = 0$$

چون $Y_t = c\lambda^t$ به ازای هر c دلخواه می‌تواند جواب این معادله باشد، لذا خواهیم داشت:

$$c\lambda^t - a_1 c\lambda^{t-1} - \cdots - a_p c\lambda^{t-p} = 0$$

$$c\lambda^{t-p}(\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p) = 0$$

معادله مشخصه عبارت است از:

$$\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p = 0$$

با حل این معادله، ریشه‌های مشخصه به‌دست می‌آید که اگر متمایز باشند شامل λ_1، λ_2، ... و λ_p خواهد بود. بدین ترتیب جواب معادله تفاضلی برابر با هر ترکیب خطی از $c\lambda_i^t$ می‌باشد. توجه شود که c هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد:

$$Y_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t + \frac{b}{1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_p}$$

بدین ترتیب Y در صورتی مانا است که $|\lambda_i| < 1$ باشد.

گاهی اوقات از تبدیل $z = \frac{1}{\lambda}$ استفاده می‌کنند که در این صورت معادله مشخصه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^p - a_1\left(\frac{1}{z}\right)^{p-1} - \cdots - a_p = 0$$

با ضرب طرفین در z^p می‌توان معادله مشخصه را به‌صورت زیر نوشت:

$$1 - a_1 z - \cdots - a_{p-1}z^{p-1} - a_p z^p = 0$$

در این حالت شرط همگرایی (مانایی) این است که قدر مطلق z_i ها بزرگ‌تر از ۱ باشد ($|z_i| > 1$).

ضمیمه ب

مقادیر ویژه

مقدار ویژه یک ماتریس که با λ نشان داده می‌شود برابر با عددی است که در رابطه زیر صدق کند:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

که $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n\times n$ و $\mathbf{x}$ بردار ستونی غیرصفر می‌باشد. به‌عنوان مثال فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{A} = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت به ازای $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ و $\lambda = 3$ رابطه فوق برقرار است:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{x}$$

هم‌چنین به ازای $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\lambda = 1$ نیز رابطه فوق برقرار خواهد بود. در اینجا $\lambda = 1$ را مقدار ویژه و $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بردار ویژه‌ای گوییم که متناسب با مقدار ویژهٔ $\lambda = 1$ می‌باشد.

در حالت کلی، مقدار یا مقادیر ویژهٔ یک ماتریس، به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

چون $Y_t = c\lambda^t$ به ازای هر c دلخواه می‌تواند جواب این معادله باشد، لذا خواهیم داشت:

$$c\lambda^t - a_1 c\lambda^{t-1} - \cdots - a_p c\lambda^{t-p} = 0$$

$$c\lambda^{t-p}(\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p) = 0$$

معادله مشخصه عبارت است از:

$$\lambda^p - a_1\lambda^{p-1} - \cdots - a_p = 0$$

با حل این معادله، ریشه‌های مشخصه به‌دست می‌آید که اگر متمایز باشند شامل λ_1، λ_2، ... و λ_p خواهد بود. بدین ترتیب جواب معادله تفاضلی برابر با هر ترکیب خطی از $c\lambda_i^t$ می‌باشد. توجه شود که c هر مقدار دلخواه می‌تواند باشد:

$$Y_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t + \frac{b}{1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_p}$$

بدین ترتیب Y در صورتی مانا است که $|\lambda_i| < 1$ باشد.

گاهی اوقات از تبدیل $z = \frac{1}{\lambda}$ استفاده می‌کنند که در این صورت معادله مشخصه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$(\frac{1}{z})^p - a_1(\frac{1}{z})^{p-1} - \cdots - a_p = 0$$

با ضرب طرفین در z^p می‌توان معادله مشخصه را به‌صورت زیر نوشت:

$$1 - a_1 z - \cdots - a_{p-1}z^{p-1} - a_p z^p = 0$$

در این حالت شرط همگرایی (مانایی) این است که قدر مطلق z_iها بزرگتر از ۱ باشد ($|z_i| > 1$).

ضمیمه ب

مقادیر ویژه

مقدار ویژه یک ماتریس که با λ نشان داده می‌شود برابر با عددی است که در رابطه زیر صدق کند:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

که $\mathbf{A}$ یک ماتریس $n \times n$ و $\mathbf{x}$ بردار ستونی غیرصفر می‌باشد. به‌عنوان مثال فرض کنید ماتریس $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر باشد:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

در این صورت به ازای $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $\lambda = ۳$ رابطه فوق برقرار است:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{x}$$

هم‌چنین به ازای $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $\lambda = ۱$ نیز رابطه فوق برقرار خواهد بود. در اینجا $\lambda = ۱$ را مقدار ویژه و $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را بردار ویژه‌ای گوییم که متناسب با مقدار ویژهٔ $\lambda = ۱$ می‌باشد.

در حالت کلی، مقدار یا مقادیر ویژهٔ یک ماتریس، به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = 0$$
$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

که $\mathbf{I}$ ماتریس واحد می‌باشد. از آنجا که $\mathbf{X} \neq \mathbf{o}$ است، لذا بایستی که برای برقراری این رابطه، دترمینان $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ برابر با صفر باشد:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

با محاسبه این دترمینان یک معادله درجه n برای تعیین λ به‌دست می‌آید:

$$b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 = 0$$

به‌عنوان مثال مقدار ویژه ماتریس زیر را تعیین می‌کنیم:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 8 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = (3-\lambda)\left[(4-\lambda)^2 - 9\right] = 0$$

با حل این معادله، خواهیم داشت:

$$\lambda_1 = 1 \ , \ \lambda_2 = 3 \ , \ \lambda_3 = 7$$

بنابراین سه مقدار ویژه برای ماتریس $\mathbf{A}$ به‌دست می‌آید.

حال برای هر مقدار ویژه، بردارهای ویژه آن را به‌دست می‌آوریم. بدین منظور رابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0$$

که $\mathbf{x}_i$ بردار ویژه‌ای است که مناسب با مقدار ویژه λ_i است. در رابطه فوق ابتدا $\lambda_1 = 1$ را قرار می‌دهیم:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} ,$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

با ساده کردن رابطه فوق، خواهیم داشت:

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_2 + 3x_3 = 0$$
$$3x_2 + 3x_3 = 0$$

بدیهی است که این معادلات با هم رابطهٔ خطی دارند. اگر معادله سوم را حذف کنیم، خواهیم داشت:

$$2x_1 + 8x_2 + x_3 = 0$$
$$3x_2 + 3x_3 = 0$$

در اینجا بی‌نهایت جواب برای این معادلات خواهیم داشت که عبارتند از:

$$x_1 = 7a \ , \ x_2 = -2a \ , \ x_3 = 2a$$

که a هر عدد حقیقی دلخواه است. در اینجا برای سادگی $a = 1$ را در نظر می‌گیریم که در این صورت بردار ویژه $\mathbf{x}_1$ که متناسب با λ_1 است به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

اگر همین کار را برای $\lambda_2 = 3 , \lambda_3 = 7$ به‌کار ببریم، بردارهای ویژه عبارتند از:

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \ , \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

حال تمام بردارهای ویژه را با ماتریس $\mathbf{C}$ نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Λ نیز ماتریس قطری است که عناصر آن، مقادیر ویژه هستند:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

از طرف دیگر برای هر ماتریس $\mathbf{A}$ رابطه زیر نیز برقرار است:

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}=\mathbf{\Lambda}$$

و لذا می‌توان ماتریس $\mathbf{A}$ را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{A}=\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^{-1}$$

از طرف دیگر هر یک از بردارهای ویژه را می‌توان نرمال نمود. بردار نرمال برداری است که طول آن برابر با ۱ باشد. از آنجا که طول بردار $\mathbf{x}$ برابر با $\mathbf{x}'\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ است، لذا اگر هر یک از عناصر بردار مورد نظر را بر $\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}$ نمائیم تبدیل به بردار نرمال خواهد شد. لذا اگر بردار نرمال را با $\mathbf{q}$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\mathbf{q}=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{x}'\mathbf{x}}}\mathbf{x}$$

ماتریس بردارهای ویژه نرمال شده، عبارت است از:

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n]$$

برای مقدار ویژه iاُم و jاُم روابط زیر را داریم:

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_i=\lambda_i\mathbf{q}_i \qquad i=1,2,\dots,n$$
$$\mathbf{A}\mathbf{q}_j=\lambda_j\mathbf{q}_j \qquad j=1,2,\dots,n$$

اولی را در $\mathbf{q}'_j$ و دومی را در $\mathbf{q}'_i$ ضرب می‌کنیم:

$$\mathbf{q}'_j\mathbf{A}\mathbf{q}_i=\lambda_i\mathbf{q}'_j\mathbf{q}_i$$
$$\mathbf{q}'_i\mathbf{A}\mathbf{q}_j=\lambda_j\mathbf{q}'_i\mathbf{q}_j$$

معادلات فوق را مجدداً نوشته ولی دومی را ترانسپوز می‌کنیم:

$$\mathbf{q}'_j\mathbf{A}\mathbf{q}_i=\lambda_i\mathbf{q}'_j\mathbf{q}_i$$
$$\mathbf{q}'_j\mathbf{A}\mathbf{q}_i=\lambda_j\mathbf{q}'_j\mathbf{q}_i$$

چون سمت چپ برابر است، سمت راست را برابر قرار می‌دهیم:

$$\lambda_i\mathbf{q}'_j\mathbf{q}_i=\lambda_j\mathbf{q}'_j\mathbf{q}_i$$

چون $\lambda_i \neq \lambda_j$ است لذا بایستی $\mathbf{q}'_j\mathbf{q}_i=0$ باشد. اگر $i=j$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$i=j \Rightarrow \lambda_i\mathbf{q}'_i\mathbf{q}_i=\lambda_i\mathbf{q}'_i\mathbf{q}_i \Rightarrow \mathbf{q}'_i\mathbf{q}_i=1$$

بنابراین، حاصل‌ضرب $\mathbf{Q}'\mathbf{Q}$ عبارت است از:

$$\mathbf{Q}'\mathbf{Q}=\mathbf{I}$$

بدین ترتیب، ماتریس بردارهای ویژه به‌ازای بردارهای ویژهٔ نرمال شده، متعامد هستند و لذا خواهیم داشت:

$$\mathbf{Q}'=\mathbf{Q}^{-1}$$

به‌طور خلاصه، برخی از خواص بردارهای ویژه عبارت است از:

۱- مقادیر ویژه ماتریس غیرمتقارن می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد.

۲- مقادیر ویژه ماتریس متقارن، حقیقی هستند.

۳- اگر مقادیر ویژه، متمایز باشند آنگه بردارهای ویژه، مستقل خطی خواهند بود.

۴- اگر $\mathbf{A}$ متقارن باشد، بردارهای ویژه، مستقل خطی بوده و دوبه‌دو، متعامد خواهند بود.

ضمیمه ج

بردارها و ماتریس‌ها

بردار

بردار: آرایشی از اعداد یا حروف است که به‌صورت سطری یا ستونی نشان داده می‌شود:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

x را بردار ستونی nتایی گویند.

جمع و تفریق بردارها:

جمع و تفریق دو یا چند بردار n تایی برابر با یک بردار nتایی جدید است.

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1+Y_1 \\ \vdots \\ X_n+Y_n \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در بردار:

$$c\mathbf{x}=c\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cX_1 \\ \vdots \\ cX_n \end{bmatrix}$$

ضرب داخلی دو بردار:

$$\mathbf{x}'\mathbf{y}=[X_1 \quad \cdots \quad X_n]\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}=X_1Y_1+\cdots+X_nY_n=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i$$

x' ترانسپوز x است. ضرب داخلی را برای یک بردار به‌صورت زیر داریم:

$$x'x=[X_1 \ \cdots \ X_n]\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}=X_1^2+\cdots+X_n^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$$

ضرب خارجی دو بردار:

ضرب خارجی دو بردار برابر با یک ماتریس $n\times n$ است.

$$xy'=\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}[Y_1 \ \cdots \ Y_n]=\begin{bmatrix}X_1Y_1 & \cdots & X_1Y_n\\ \vdots & & \vdots\\ X_nY_1 & \cdots & X_nY_n\end{bmatrix}$$

همچنین ضرب خارجی یک بردار عبارت است از:

$$xx'=\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}[X_1 \ \cdots \ X_n]=\begin{bmatrix}X_1^2 & \cdots & X_1X_n\\ \vdots & & \vdots\\ X_nX_1 & \cdots & X_n^2\end{bmatrix}$$

ترکیب خطی بردارها:

ترکیب خطی دو بردار x و y برابر با بردار z است:

$$z=k_1x+k_2y$$

مثال: اگر $x'=[1,2]$ و $y'=[2,3]$ باشد، ترکیب خطی این دو بردار عبارت است از:

$$z=k_1x+k_2y \Rightarrow \begin{bmatrix}Z_1\\ Z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\ 2k_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k_1\\ 3k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\\ 2k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+2k_2\\ 2k_2+3k_2\end{bmatrix}$$

$$Z_1=k_1+2k_2$$
$$Z_2=2k_2+3k_2$$

استقلال خطی بردارها:

n بردار x_1 تا x_n را که هر یک n مؤلفه دارند را درنظر بگیرید. استقلال خطی این n بردار بدان معنا است که هیچ ترکیب خطی از آنها به دست نیاید و به عبارت دیگر نتوان یکی از آنها را به‌صورت ترکیب خطی از سایر بردارها نوشت:

$$k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n=0$$

شرط استقلا خطی این است که $k_1+k_2+\cdots+k_n=0$ باشد. یعنی هیچ برداری را نمی‌توان به‌صورت ترکیب خطی از سایر بردارها نوشت.

مثال: دو بردار $x'=[1,2]$ و $y'=[2,3]$ مستقل خطی هستند زیرا

$$k_1x+k_2y=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}k_1\\ 2k_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2k_1\\ 3k_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$k_1+2k_2=0$$
$$2k_2+3k=0 \quad \Rightarrow \quad k_1=k_2=0$$

ماتریس‌ها

ماتریس A با ابعاد $m\times n$ آرایش منظمی از اعداد است که به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

و یا:

$$A=[a_{ij}] \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

روش دیگر برای نشان دادن ماتریس A این است که ابتدا ستون‌های اول تا nام را به‌ترتیب با $a_{.1}$ تا $a_{.n}$ نشان دهیم. بنابراین، ستون jام ماتریس A بیانگر یک بردار ستونی است:

$$a_{.j}=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix} \ , \quad j=1,2,\dots,n$$

حال ماتریس A عبارت است از:

$$A=[a_{.1} \ \ a_{.2} \ \cdots \ a_{.n}]$$

همچنین می‌توان ماتریس A را به‌صورت زیر نشان داد:

$$A=\begin{bmatrix}a_{1.}\\ a_{2.}\\ \vdots\\ a_{m.}\end{bmatrix} \ , \quad a_{i.}=[a_{i1} \ \ a_{i2} \ \cdots \ a_{im}] \quad i=1,2,\dots,n$$

ضرب عدد در ماتریس:

$$cA=c[a_{ij}]=[ca_{ij}]$$

جمع و تفریق ماتریس‌ها:

$$\mathbf{A}\pm\mathbf{B}=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]$$

ضرب دو ماتریس:

حاصل ضرب دو ماتریس **A** و **B** که به‌ترتیب $m\times n$ و $n\times p$ هستند، عبارت است از:

$$\mathbf{AB}=\left[\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right]$$

عنصر ijام ماتریس **AB** برابر با ضرب داخلی سطر kام ماتریس **A** و ستون kام ماتریس **B** است. بنابراین، ماتریس **AB** با ابعاد $m\times p$ می‌باشد. بدیهی است که تعداد سطرهای ماتریس **A** بایستی برابر با تعداد ستون‌های ماتریس **B** باشد تا این دو ماتریس قابل ضرب باشند. توجه شود که برای ضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی برقرار نیست ($\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$).

انواع ماتریس‌ها

ماتریس مربع: اگر $m=n$ باشد، ماتریس **A** را مربع گویند.

ترانسپوز: ترانسپوز ماتریس **A** را با $\mathbf{A}'$ نشان می‌دهند که بیانگر ماتریسی است که جای سطر و ستون‌های آن عوض شده است.

برای ترانسپوز ماتریس‌ها قواعد زیر برقرار است:

$$(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'+\mathbf{A}'$$
$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$$

ماتریس متقارن: ماتریس است که عناصر بالای قطر اصلی با عناصر متناظر در پایین قطر اصلی برابر باشند

$$\mathbf{A}=[a_{ij}]\quad,\quad a_{ij}=a_{ji}\quad i\neq j$$

بدیهی است که برای ماتریس متقارن، شرط $\mathbf{A}'=\mathbf{A}$ برقرار است.

ماتریس قطری: ماتریس است که غیر از قطر اصلی، برابر صفر است.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

و یا:

$$\mathbf{A}=[a_{ij}]\quad,\quad a_{ij}=0\quad i\neq j$$

ماتریس واحد (یکه): ماتریس قطری است که قطر اصلی آن برابر با ۱ است.

$$\mathbf{I}_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

ماتریس خودتوان: ماتریس مربع **A** را خودتوان گویند اگر شرط زیر را تأمین کند:

$$\mathbf{A}^2=\mathbf{AA}=\mathbf{A}$$

اگر **A** متقارن و خودتوان باشد، آنگاه شرط $\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{A}$ را تأمین می‌کند.

ماتریس غیرمنفرد: ماتریس **A** را غیرمنفرد گویند اگر ستون‌های آن (بردارهای ستونی) مستقل خطی باشند. مشابه این شرط را می‌توان برای سطرهای ماتریس **A** نیز بیان نمود.

ماتریس‌های متعامد: ابتدا دو بردار **a** و **b** را در نظر بگیرید. دو بردار **a** و **b** را متعامد گویند اگر شرط $\mathbf{a}'\mathbf{b}=0$ را تأمین کنند.

حال ماتریس **A** را متعامد گویند اگر حاصل‌ضرب ستون‌های آن (ضرب داخلی بردارها) صفر شود:

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_{.1}\ \ \mathbf{a}_{.2}\ \ \cdots\ \ \mathbf{a}_{.n}]$$

$$\mathbf{a}'_{.j}\mathbf{a}_{.k}=0\quad i\neq k\qquad \mathbf{a}_{.j}=\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$$

اگر ماتریس **A** متعامد باشد آنگاه ستون‌های آن مستقل خطی هستند.

اگر برای ماتریس A شرط زیر برقرار باشد، آن را متعامد نرمال می‌گویند:

$$a'_{.j}a_{.k}=\begin{cases} ۰ & i\neq k \\ ۱ & i=k \end{cases}$$

یعنی حاصل‌ضرب داخلی ستون jام در خودش برابر با ۱ و در سایر ستون ها برابر با صفر شود.

اگر ماتریس A متعامد نرمال باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$A'A=I \ , \ A'=A$$

مرتبه ماتریس

ماتریس A با ابعاد $m\times n$ را در نظر بگیرید. مرتبه ستونی ماتریس A حداکثر برابر با تعدادستون‌های مستقل خطی است. مرتبه سطری نیز حداکثر برابر با تعداد سطرهای مستقل خطی است.

می‌توان نشان داد که مرتبه ستونی و سطری برابر است ولذا مرتبه ماتریس A که با $r(A)$ نشان می‌دهیم برابر است با:

$$r(A)=\min(m,n)$$

اگر A ماتریس $m\times n$ باشد، آنگاه A ماتریس با مرتبه کامل است اگر شرط $r(A)=m$ برقرار باشد.

اگر ماتریس A مربع باشد، آنگاه A را غیر منفرد یا با مرتبه کامل گویند اگر $r(A)=n$ باشد. بدیهی است که اگر ماتریس مربع A دارای مرتبه کامل باشد، بدان معنا است که ستون‌های آن مستقل خطی هستند. برای مرتبه ماتریس A، خواص زیر برقرار است.

$$r(A)=r(A')$$
$$r(AB)\leq\min[r(A),r(B)]$$
$$r(A'A)=r(AA')=r(A)$$
$$r(PA)=r(QA)=r(PAQ)=r(A) \quad A:m\times n \quad P:m\times m \quad Q:n\times n$$

P و Q غیر منفرد هستند. قضیه فوق نشان می‌دهد که ضرب ماتریس A در ماتریس‌های غیرمنفرد، مرتبه آن را تغییر نمی‌دهد.

دترمینان

دترمینان ماتریس مربع A را با $|A|$ نشان می‌دهند و حاصل آن برابر با یک عدد است. دترمینان را می‌توان در امتداد هر سطر یا ستون حساب نمود. به عنوان مثال محاسبه دترمینان در امتداد سطر اول عبارت است از:

$$|A|=\sum_{j=۱}^{n}(-۱)^{j+۱}a_{ij}|A_{ij}|$$

a_{ij} عناصر سطر اول ماتریس A و A_{ij} برابر با ماتریس A است که فقط سطر iام و ستون jام آن حذف شده است.

خواص دترمینان:

۱- دترمینان ترانسپوز A با دترمینان A برابر است: $|A'|=|A|$

۲- اگر جای دو سطر یا دو ستون ماتریس A را عوض کنیم، علامت دترمینان تغییر می‌کند.

۳- اگر مرتبه ماتریس A کامل نباشد، آنگاه سطرها یا ستون ها مستقل خطی نیستند و لذا دترمینان برابر صفر خواهد شد. بنابراین برای ماتریس غیرمنفرد A، دترمینان مخالف صفراست.

۴- دترمینان معکوس A برابر با معکوس دترمینان A است.

۵- اگر سطر iام یا ستون jام ماتریس A را در عدد ثابتی ضرب کنیم، دترمینان در آن عدد ضرب خواهد شد.

۶- دترمینان حاصل‌جمع با حاصل‌جمع دترمینان‌ها برابر نیست.

$$|A+B|\neq|A|+|B|$$

۷- دترمینان حاصل‌ضرب برابر با حاصل‌ضرب دترمینان‌ها است.

$$|AB|=|A||B|$$

۸- اگر ماتریس A به‌صورت زیر افراز شده است:

$$A=\begin{bmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$A_{۱۱}:m\times m \quad A_{۲۲}:k\times k \quad A_{۱۲}:m\times k \quad A_{۲۱}:k\times m$

به طوری که $k+m=n$ است. در این صورت $|A|$ برابر است با:

$$|A|=|A_{۲۲}||A_{۱۱}-A_{۱۲}A_{۲۲}^{-۱}A_{۲۱}|=|A_{۱۱}||A_{۲۲}-A_{۲۱}A_{۱۱}^{-۱}A_{۱۲}|$$

۹- اگر ماتریس A در عدد ثابتی ضرب شود، دترمینان آن برابر است با:

$$|c\mathbf{A}|=c^n|\mathbf{A}|$$

۱۰- اگر ماتریس A به‌توان k برسد، دترمینان آن عبارت است از:

$$|\mathbf{A}^k|=|\mathbf{A}|^k$$

۱۱- دترمینان A برابر با مقادیر ویژه ماتریس A است:

$$|\mathbf{A}|=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$$

اثر ماتریس[1]

اثر ماتریس A برابر با مجموع عناصر قطری اصلی است:

$$tr(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

برای اثر یک ماتریس، خواص زیر برقرار است:

۱) $tr(\mathbf{A}+\mathbf{B})=tr(\mathbf{A})+tr(\mathbf{B})$

۲) $tr(\mathbf{AB})=tr(\mathbf{BA})$

۳) $tr(\mathbf{ABC})=tr(\mathbf{CAB})=tr(\mathbf{BCA})$

۴) $\mathbf{X}=\mathbf{xx}'=[X_iX_j]=[X_{ij}]_{n\times n}\ ,\ \mathbf{x}'\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \Rightarrow tr(\mathbf{X})=tr(\mathbf{xx}')=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\mathbf{x}'\mathbf{x}$

۵) $tr(\mathbf{A})=tr(\mathbf{A}')$

۶) $tr(\mathbf{AB})=tr(\mathbf{A}'\mathbf{B}')=tr(\mathbf{B}'\mathbf{A}')=tr(\mathbf{BA})$

۷) $tr(\mathbf{A})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$

λ_i مقدار ویژه ماتریس A است.

معکوس ماتریس

معکوس ماتریس A برابر با ماتریس B است به‌گونه‌ای که شرط زیر را تأمین نماید:

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$$

1- trace

معکوس ماتری A با $\mathbf{A}^{-1}$ نشان می‌دهند. معکوس A به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\text{adj}(\mathbf{A})$$

adj(A) معروف به ماتریس وابسته یا الحاقی است که عناصر آن عبارتند از:

$$\text{adj}(\mathbf{A})=\mathbf{C}'=[c_{ij}]'_{n\times n}$$

ماتریس C را ماتریس کوفاکتورهای A می‌گویند که عناصر آن عبارتند از:

$$\mathbf{C}=[c_{ij}]_{n\times n} \quad c_{ij}=(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ij}| \quad i,j=1,2,\dots,n$$

$\mathbf{A}_{ij}$ برابر با ماتریس A است که فقط سطر i و ستون j از آن حذف شده است.

خواص معکوس ماتریس

۱- ماتریس A در صورتی معکوس‌پذیر است که غیرمنفرد باشد. بدین معنی که مرتبه آن کامل بوده و دترمینان آن مخالف صفر باشد.

۲-

$$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

۳-

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\neq\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$$

۴-

$$(\mathbf{A}^{-1})'=(\mathbf{A}')^{-1}$$

۵- $\mathbf{B}=\mathbf{A}+\alpha\mathbf{ab}'\quad \mathbf{A}:n\times n\quad \mathbf{a}:n\times 1\quad b:n\times 1$

$$\mathbf{B}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-c\mathbf{A}^{-1}\mathbf{ab}'\mathbf{A}^{-1}\quad c=\frac{1}{1+\alpha\mathbf{b}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}$$

۶- $\mathbf{A}:n\times n\quad \mathbf{B}:m\times m\quad \mathbf{C}::n\times m$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{CBC}')^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{C}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{C}'\mathbf{A}^{-1}$$

۷- $\mathbf{A}:n\times n\quad \mathbf{B}:m\times m\quad \mathbf{U}::n\times m\quad \mathbf{V}:m\times n$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{UBV})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{B}^{-1}+\mathbf{VA}^{-1}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{VA}^{-1}$$

۸- $\mathbf{A}:n\times n\quad \mathbf{B}:n\times m\quad \mathbf{C}::m\times n\quad \mathbf{D}:m\times m$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1}$$

۹- حاصل‌جمع معکوس دو ماتریس برابر است با:

$$(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1})=\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$$

۱۰– ماتریس $\mathbf{A}$ به‌صورت زیر افراز شده است:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\mathbf{A}_{11}:m\times m \quad \mathbf{A}_{22}:k\times k \quad \mathbf{A}_{12}:m\times k \quad \mathbf{A}_{21}:k\times m$$

به‌طوری که $k+m=n$ است.

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & -\mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\\ \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{A}_{22}^{-1}+\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{11}=(\mathbf{A}_{11}-\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21})^{-1}$$

و یا

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1}+\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\\ \mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{22}=(\mathbf{A}_{22}^{-1}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12})^{-1}$$

حالت خاص روابط فوق را می‌توان برای ماتریس $\mathbf{X'X}$ و $(\mathbf{X'X})^{-1}$ به‌کاربرد. براین اساس، فرض کنید ماتریس $\mathbf{X}$ به‌صورت زیر افراز شده باشد:

$$\mathbf{X}=[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2] \quad \mathbf{X}:n\times k \quad \mathbf{X}_1:n\times m \quad \mathbf{X}_2:n\times(n-k)$$

$\mathbf{X'X}$ عبارت است از:

$$\mathbf{X'X}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\\ \mathbf{X}_2'\end{bmatrix}[\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2]=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}'\mathbf{X}_{21}\\ \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1 & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\end{bmatrix}$$

$\mathbf{B}_{11}$ برابر است با:

$$\mathbf{B}_{11}=\left[\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1-\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1\right]^{-1}=(\mathbf{X}_1\mathbf{M}_2\mathbf{X}_1)^{-1}$$

$$\mathbf{M}_2=\mathbf{I}-\mathbf{X}_2(\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'$$

همچنین، $\mathbf{B}_{22}$ عبارت است از:

$$\mathbf{B}_{22}=\left[\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2-\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2\right]^{-1}=(\mathbf{X}_1\mathbf{M}_1\mathbf{X}_1)^{-1}$$

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{I}-\mathbf{X}_1(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}'$$

$\mathbf{M}_1$ و $\mathbf{M}_2$ خودتوان هستند.

ضرب کرونکر

ضرب کرونکر دو ماتریس $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ که به‌ترتیب $m\times n$ و $p\times q$ هستند عبارت است از:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B}\\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

و یا:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=[a_{ij}\mathbf{B}]$$

مثال:

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\mathbf{B} & 3\mathbf{B}\\ 2\mathbf{B} & 4\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} & 3\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}\\ 2\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 15 & 18\\ 7 & 8 & 21 & 24\\ 10 & 12 & 20 & 24\\ 14 & 16 & 28 & 32\end{bmatrix}$$

خواص ضرب کرونکر

$$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2:m\times n \quad \mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2:p\times q$$

$$(\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2)\otimes(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{B}_2$$

$$\mathbf{A}_1\otimes(\mathbf{B}_1+\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_1+\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_2$$

$$a\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_1=\mathbf{A}_1\otimes a\mathbf{B}_1$$

$$(\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{B}_2)=\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2$$

$$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\otimes\mathbf{B}^{-1} \qquad \mathbf{A}:n\times n \qquad \mathbf{B}:m\times m$$

$$tr(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=tr(\mathbf{A})tr(\mathbf{B}) \qquad \mathbf{A}:n\times n \qquad \mathbf{B}:m\times m$$

$$|\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|^m|\mathbf{B}|^n \qquad \mathbf{A}:n\times n \qquad \mathbf{B}:m\times m$$

برداری نمودن ماتریس‌ها

$\mathbf{A}$ ماتریس $m\times n$ است. $\text{vec}(\mathbf{A})$ به معنی بردار ستونی با ابعاد $nm\times 1$ است که n عنصر اول آن معادل با ستون اول ماتریس $\mathbf{A}$، n عنصر دوم آن معادل با ستون دوم ماتریس $\mathbf{A}$، و ... می‌باشد. در واقع ستون‌های ماتریس $\mathbf{A}$ را به دنبال هم به‌صورت یک بردار می‌نویسیم:

$$\mathbf{A}=[\mathbf{a}_{.1}\ \ \mathbf{a}_{.2}\ \ \cdots\ \ \mathbf{a}_{.n}] \qquad \mathbf{a}_{.j}=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix},\ \ j=1,2,\dots,n$$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{.1} \\ \mathbf{a}_{.2} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{.n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

خواص برداری نمودن ماتریس‌ها

$$\mathrm{vec}(\mathbf{AB})=(\mathbf{B}'\otimes\mathbf{I})\mathrm{vec}(\mathbf{A})=(\mathbf{I}\otimes\mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{B}) \qquad \mathbf{A}:m\times n\ \ \mathbf{B}:n\times p$$

$$\mathrm{vec}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathrm{vec}(\mathbf{A})+\mathrm{vec}(\mathbf{B}) \qquad \mathbf{A},\mathbf{B}:m\times n$$

$$tr(\mathbf{AB})=\mathrm{vec}(\mathbf{A}')'\mathrm{vec}(\mathbf{B})=\mathrm{vec}(\mathbf{B}')'\mathrm{vec}(\mathbf{A})$$

مشتق‌گیری از بردارها و ماتریس‌ها

به‌طورکلی اگر $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ بردارهای ستونی $m\times1$ و $n\times1$ بوده و $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$ باشد، آنگاه مشتق $\mathbf{y}$ نسبت به $\mathbf{x}$ برابر با ماتریس با ابعاد $m\times n$ خواهد بود.

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}=\left[\frac{\partial Y_i}{\partial X_j}\right] \quad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n$$

مشتق مرتبه دوم عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{(\partial \mathbf{x})(\partial \mathbf{x}')}=\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathrm{vec}\left[\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right)'\right]=\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\begin{bmatrix} (\partial Y_1/\partial \mathbf{x})' \\ \vdots \\ (\partial Y_m/\partial \mathbf{x})' \end{bmatrix}$$

حاصل این عبارت، ماتریس $mn\times n$ است. $\frac{\partial Y_i}{\partial \mathbf{x}}$ یک بردار سطری $1\times n$ به‌صورت $\left[\frac{\partial Y_i}{\partial X_1}\ \cdots\ \frac{\partial Y_i}{\partial X_n}\right]$ است.

قواعد مشتق‌گیری از بردارها و ماتریس‌ها بسیار متنوع است و لذا در اینجا به برخی از این قواعد اشاره می‌شود.

۱- مشتق از فرم‌های اسکالر: اگر حاصل‌ضرب بردارها و ماتریس‌ها، اسکالر باشد، آنگاه قواعد مشتق‌گیری از آنها عبارت است از:

۱) $\frac{d(\mathbf{a}'\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=\frac{d(\mathbf{x}\mathbf{a}')}{d\mathbf{x}}=\mathbf{a} \qquad \mathbf{a}:n\times1 \qquad \mathbf{x}:n\times1$

۲) $\frac{d(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=(\mathbf{A}'+\mathbf{A})\mathbf{x}$

$\frac{d(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=2\mathbf{A}\mathbf{x} \qquad \mathbf{A}'=\mathbf{A}$

۳) $\frac{d(\mathbf{a}'\mathbf{X}\mathbf{b})}{d\mathbf{X}}=\mathbf{a}\mathbf{b}' \qquad \mathbf{X}:n\times n\ \ \mathbf{a},\mathbf{b}:n\times1$

۴) $\frac{d(\mathbf{a}'\mathbf{X}'\mathbf{b})}{d\mathbf{X}}=\mathbf{b}\mathbf{a}' \qquad \mathbf{X}:n\times n\ \ \mathbf{a},\mathbf{b}:n\times1$

۵) $\frac{d(\mathbf{x}'\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=2\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}:n\times1$

۲- مشتق از فرم‌های ماتریسی: اگر حاصل‌ضرب بردارها و ماتریس ها به‌صورت بردار یا ماتریس باشد، قواعد مشتق‌گیری عباتند از:

۱) $\frac{d(\mathbf{A}\mathbf{x})}{d\mathbf{x}}=\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}:n\times n \qquad \mathbf{x}:n\times1$

۲) $\frac{d(\mathbf{x}'\mathbf{A})}{d\mathbf{x}}=\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}:n\times n \qquad \mathbf{x}:n\times1$

۳) $\frac{d(\mathbf{x}')}{d\mathbf{x}} = \mathbf{I}_n \qquad \mathbf{x}: n\times 1$

۴) $\frac{d(\mathbf{A}'\mathbf{X}\mathbf{B})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{B}$

۳- مشتق از دترمینان‌ها

۱) $\frac{d|\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = |\mathbf{A}|(\mathbf{A}^{-1})'$

۲) $\frac{d|\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = |\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A}|\left[(\mathbf{B}\mathbf{A})(\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1} + \mathbf{B}'\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}'\mathbf{A})^{-1}\right]$ A مربع نیست و B نیز متقارن نیست

۳) $\frac{d|\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = 2|\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A}|\mathbf{B}\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1}$ A مربع نیست ولی B متقارن است

۴) $\frac{d|\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = 2|\mathbf{A}'\mathbf{B}\mathbf{A}|(\mathbf{A}^{-1})'$ A مربع و B متقارن است

۵) $\frac{d\ln|\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^{-1})' = (\mathbf{A}')^{-1}$

٤- مشتق از اثر ماتریس

۱) $\frac{d\,tr(\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{I}$

۲) $\frac{d\,tr(\mathbf{X}\mathbf{A})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{A}'$

۳) $\frac{d\,tr(\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{B})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{A}'\mathbf{B}'$

۴) $\frac{d\,tr(\mathbf{A}\mathbf{X}'\mathbf{B})}{d\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{A}$

۵) $\frac{d\,tr(\mathbf{A}\otimes\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = tr(\mathbf{A})\mathbf{I}$

۶) $\frac{d\,tr(\mathbf{X}^2)}{d\mathbf{X}} = 2\mathbf{X}'$

۷) $\frac{d\,tr(\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = (\mathbf{A}+\mathbf{A}')\mathbf{X}$

۸) $\frac{d\,tr(\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X}')}{d\mathbf{X}} = \mathbf{X}(\mathbf{A}+\mathbf{A}')$

۹) $\frac{d\,tr(\mathbf{X}'\mathbf{X})}{d\mathbf{X}} = 2\mathbf{X}$

۱۰) $\frac{d\,tr(\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B})}{d\mathbf{X}} = -(\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{X}^{-1})'$

۵- مشتق مرتبه دوم از بردارها و ماتریس‌ها

$\mathbf{y} = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{(\partial\mathbf{x})(\partial\mathbf{x}')} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}$

$\mathbf{y} = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{(\partial\mathbf{x})(\partial\mathbf{x}')} = 2\mathbf{A}$ A متقارن است

ضمیمه د:

جداول آماری

مقادیر توزیع $t_{\alpha,n}$

n	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	.678	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	.677	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

مقادیر توزیع $\chi^2_{\alpha,n}$

n	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	.00004	.0002	.001	.004	.02	.10	.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	29.05	34.34	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	38.29	44.34	50.98	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49

مقادیر توزیع $F_{/\cdot 5, n_1, n_2}$

درجه آزادی صورت $= n_1$

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

n_2	10	12	15	20	30	40	50	60	∞
1	241.88	243.91	245.95	248.01	250.10	251.14	252.20	252.20	254.19
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.59	8.57	8.57	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.72	5.69	5.69	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.46	4.45	4.43	4.37
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.77	3.74	3.74	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.34	3.30	3.30	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.04	3.01	3.01	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.83	2.79	2.79	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.70	2.66	2.62	2.62	2.54
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.20	2.16	2.16	2.07
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.99	1.95	1.95	1.85
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.92	1.87	1.82	1.82	1.72
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.79	1.74	1.74	1.63
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.74	1.69	1.64	1.64	1.52
50	2.03	1.95	1.87	1.78	1.69	1.63	1.58	1.58	1.45
70	1.97	1.89	1.81	1.72	1.62	1.57	1.50	1.50	1.36
100	1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.52	1.45	1.45	1.30
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.39	1.34	1.31	1.30

مقادیر توزیع $F_{/\cdot 1, n_1, n_2}$

درجه آزادی صورت $= n_1$

n_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59
∞	6.65	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43

n_2	10	12	15	20	30	40	50	60	∞
1	6055.85	6106.32	6157.28	6208.73	6260.65	6286.78	6313.03	6313.03	6362.68
2	99.40	99.42	99.43	99.45	99.47	99.47	99.48	99.48	99.50
3	27.23	27.05	26.87	26.69	26.50	26.41	26.32	26.32	26.14
4	14.55	14.37	14.20	14.02	13.84	13.75	13.65	13.65	13.47
5	10.05	9.89	9.72	9.55	9.38	9.29	9.20	9.20	9.03
6	7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.14	7.06	7.06	6.89
7	6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.91	5.82	5.82	5.66
8	5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.12	5.03	5.03	4.87
9	5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.57	4.48	4.48	4.32
10	4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.17	4.08	4.08	3.92
15	3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.13	3.05	3.05	2.88
20	3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.69	2.61	2.61	2.43
25	3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.45	2.36	2.36	2.18
30	2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.30	2.21	2.21	2.02
40	2.80	2.66	2.52	2.37	2.20	2.11	2.02	2.02	1.82
50	2.70	2.56	2.42	2.27	2.10	2.01	1.91	1.91	1.70
70	2.59	2.45	2.31	2.15	1.98	1.89	1.78	1.78	1.56
100	2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.80	1.69	1.69	1.45
∞	2.34	2.20	2.06	1.90	1.72	1.61	1.50	1.50	1.16

مقادیر آماره دوربین- واتسن (DW)

n	$k=1$ dL	$k=1$ dU	$k=2$ dL	$k=2$ dU	$k=3$ dL	$k=3$ dU	$k=4$ dL	$k=4$ dU	$k=5$ dL	$k=5$ dU	$k=10$ dL	$k=10$ dU	$k=15$ dL	$k=15$ dU
15	1.08	1.36	.95	1.54	.82	1.75	.69	1.97	.56	2.21				
16	1.10	1.37	.98	1.54	.86	1.73	.74	1.93	.62	2.15	.16	3.30		
17	1.13	1.38	1.02	1.54	.90	1.71	.78	1.90	.67	2.10	.20	3.18		
18	1.16	1.39	1.05	1.53	.93	1.69	.82	1.87	.71	2.06	.24	3.07		
19	1.18	1.40	1.08	1.53	.97	1.68	.86	1.85	.75	2.02	.29	2.97		
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	.90	1.83	.79	1.99	.34	2.89	.06	3.68
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	.93	1.81	.83	1.96	.38	2.81	.09	3.58
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	.96	1.80	.86	1.94	.42	2.73	.12	3.55
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	.99	1.79	.90	1.92	.47	2.67	.15	3.41
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	.93	1.90	.51	2.61	.19	3.33
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	.95	1.89	.54	2.57	.22	3.25
26	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	.98	1.88	.58	2.51	.26	3.18
27	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86	.62	2.47	.29	3.11
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85	.65	2.43	.33	3.05
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84	.68	2.40	.36	2.99
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83	.71	2.36	.39	2.94
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	1.09	1.83	.74	2.33	.43	2.90
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82	.77	2.31	.45	2.84
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81	.80	2.28	.49	2.80
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.15	1.81	.82	2.26	.52	2.75
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80	.85	2.24	.55	2.72
36	1.41	1.52	1.35	1.59	1.29	1.65	1.24	1.73	1.18	1.80	.87	2.22	.58	2.68
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80	.89	2.20	.60	2.65
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.21	1.79	.91	2.18	.63	2.61
39	1.43	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.27	1.72	1.22	1.79	.93	2.16	.65	2.59
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79	.95	2.15	.68	2.56
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78	1.04	2.09	.79	2.44
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77	1.11	2.04	.88	2.35
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.38	1.77	1.17	2.01	.96	2.28
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77	1.22	1.98	1.03	2.23
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77	1.27	1.96	1.09	2.18
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77	1.30	1.95	1.14	2.15
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.51	1.74	1.49	1.77	1.34	1.94	1.18	2.12
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77	1.37	1.93	1.22	2.09
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.57	1.72	1.55	1.75	1.52	1.77	1.40	1.92	1.26	2.07
90	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78	1.42	1.91	1.29	2.06
95	1.64	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.75	1.56	1.78	1.44	1.90	1.32	2.04
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78	1.46	1.90	1.35	2.03

k= تعداد ضرایب به استثنای عرض از مبدأ

n= تعداد مشاهدات

آزمون پرون

مقادیر بحرانی آماره t برای آزمون ریشه واحد در حالت شکست ساختاری

$(\lambda=\frac{S}{n}$; $S=$ زمان شکست ساختاری$)$

الف) تغییر ساختاری در عرض از مبدأ

		λ								
		۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
احتمال	۰/۰۱	-۴/۳۰	-۴/۳۹	-۴/۳۹	-۴/۳۴	-۴/۳۲	-۴/۴۵	-۴/۴۲	-۴/۳۳	-۴/۲۷
	۰/۰۲۵	-۳/۹۳	-۴/۰۸	-۴/۰۳	-۴/۰۱	-۴/۰۱	-۴/۰۹	-۴/۰۷	-۳/۹۹	-۳/۹۷
	۰/۰۵	-۳/۶۸	-۳/۷۷	-۳/۷۶	-۳/۷۲	-۳/۷۶	-۴/۷۶	-۳/۸۰	-۳/۷۵	-۳/۶۹
	۰/۱۰	-۳/۴۰	-۳/۴۷	-۳/۴۶	-۳/۴۴	-۳/۴۶	-۳/۴۷	-۳/۵۱	-۳/۴۶	-۳/۳۸

ب) تغییر ساختاری در شیب روند

		λ								
		۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
احتمال	۰/۰۱	-۴/۲۷	-۴/۴۱	-۴/۵۱	-۴/۵۵	-۴/۵۶	-۴/۵۷	-۴/۵۱	-۴/۳۸	-۴/۲۶
	۰/۰۲۵	-۳/۹۴	-۴/۰۸	-۴/۱۷	-۴/۲۰	-۴/۲۶	-۴/۲۰	-۴/۱۳	-۴/۰۷	-۳/۹۶
	۰/۰۵	-۳/۶۵	-۳/۸۰	-۳/۸۷	-۳/۹۴	-۳/۹۶	-۳/۹۵	-۳/۸۵	-۳/۸۲	-۳/۶۸
	۰/۱۰	-۳/۳۶	-۳/۴۹	-۳/۵۸	-۳/۶۶	-۳/۶۸	-۳/۶۶	-۳/۵۷	-۳/۵۰	-۳/۳۵

ج) تغییر ساختاری در عرض از مبدأ و شیب روند

		λ								
		۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹
احتمال	۰/۰۱	-۴/۳۸	-۴/۶۵	-۴/۷۸	-۴/۸۱	-۴/۹۰	-۴/۸۸	-۴/۷۵	-۴/۷۰	-۴/۴۱
	۰/۰۲۵	-۴/۰۱	-۴/۳۲	-۴/۴۶	-۴/۴۸	-۴/۵۳	-۴/۴۹	-۴/۴۴	-۴/۳۱	-۴/۱۰
	۰/۰۵	-۳/۷۵	-۳/۹۹	-۴/۱۷	-۴/۲۲	-۴/۲۴	-۴/۲۴	-۴/۱۸	-۴/۰۴	-۳/۸۰
	۰/۱۰	-۳/۴۵	-۳/۶۶	-۳/۸۷	-۳/۹۵	-۳/۹۶	-۳/۹۵	-۳/۸۶	-۴/۶۹	-۳/۴۶

مقادیر بحرانی برای آزمون ریشه واحد فصلی در داده‌های سه ماهه

نوع مدل	n	$\pi_1=0$			$\pi_2=0$			$\pi_3=\pi_4=0$		
		٪۱	٪۵	٪۱۰	٪۱	٪۵	٪۱۰	٪۱	٪۵	٪۱۰
بدون عرض از مبدأ، روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	−۲/۷۲	−۱/۹۵		−۲/۶۷	−۱/۹۵		۵/۰۲	۳/۲۶	
	۱۰۰	−۲/۶۰	−۱/۹۷		−۲/۶۱	−۱/۹۲		۴/۸۹	۳/۱۲	
	۱۳۶	−۲/۶۲	−۱/۹۳		−۲/۶۰	−۱/۹۴		۴/۸۱	۳/۱۴	
	۲۰۰	−۲/۶۲	−۱/۹۴		−۲/۶۰	−۱/۹۵		۴/۸۱	۳/۱۶	
با عرض از مبدأ، بدون روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	−۳/۶۶	−۲/۹۶	−۲/۶۲	−۲/۶۸	−۱/۹۵	−۱/۶۰	۴/۷۸	۳/۰۴	۲/۳۲
	۱۰۰	−۳/۴۷	−۲/۸۸	−۲/۵۸	−۲/۶۱	−۱/۹۵	−۱/۶۰	۴/۷۷	۳/۰۸	۲/۳۵
	۱۳۶	−۳/۵۱	−۲/۸۹	−۲/۵۸	−۲/۶۰	−۱/۹۱	−۱/۵۸	۴/۷۳	۳/۰۰	۲/۳۶
	۲۰۰	−۳/۴۵	−۲/۸۷	−۲/۵۷	−۲/۵۸	−۱/۹۲	−۱/۵۹	۴/۷۶	۳/۱۲	۲/۳۷
با عرض از مبدأ و متغیرهای مجازی فصلی، بدون روند	۴۸	−۳/۷۷	−۳/۰۸	−۲/۷۲	−۳/۷۵	−۳/۰۴	−۲/۶۹	۹/۲۲	۶/۶۰	۵/۵۰
	۱۰۰	−۳/۵۵	−۲/۹۵	−۲/۶۳	−۳/۶۰	−۲/۹۴	−۲/۶۳	۸/۷۴	۶/۵۷	۵/۵۶
	۱۳۶	−۳/۵۶	−۲/۹۴	−۲/۶۲	−۳/۴۹	−۲/۹۰	−۲/۵۹	۸/۹۲	۶/۶۳	۵/۵۶
	۲۰۰	−۳/۵۱	−۲/۹۱	−۲/۵۹	−۳/۵۰	−۲/۸۹	−۲/۶۰	۸/۹۳	۶/۶۱	۵/۵۶
با عرض از مبدأ و روند، بدون متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	−۴/۲۳	−۳/۵۶	−۳/۲۱	−۲/۶۵	−۱/۹۱	−۱/۵۷	۴/۶۴	۲/۹۵	۲/۳۲
	۱۰۰	−۴/۰۷	−۳/۴۷	−۳/۱۶	−۲/۵۸	−۱/۹۴	−۱/۶۰	۴/۷۰	۲/۹۸	۲/۳۵
	۱۳۶	−۴/۰۹	−۳/۴۶	−۳/۱۶	−۲/۵۹	−۱/۹۶	−۱/۶۳	۴/۵۷	۳/۰۴	۲/۳۶
	۲۰۰	−۴/۰۵	−۳/۴۴	−۳/۱۵	−۲/۵۹	−۱/۹۵	−۱/۶۲	۴/۶۶	۳/۰۷	۲/۳۷
با عرض از مبدأ، متغیرهای مجازی فصلی و روند	۴۸	−۴/۴۶	−۳/۷۱	−۳/۳۷	−۳/۸۰	−۳/۰۸	−۲/۷۳	۹/۲۷	۶/۵۵	۵/۳۷
	۱۰۰	−۴/۰۹	−۳/۶۳	−۳/۲۲	−۳/۶۰	−۲/۹۴	−۲/۶۳	۸/۷۹	۶/۶۰	۵/۵۲
	۱۳۶	−۴/۱۵	−۳/۵۲	−۳/۲۱	−۳/۵۷	−۲/۹۳	−۲/۶۱	۸/۷۷	۶/۶۲	۵/۵۵
	۲۰۰	−۴/۰۵	−۳/۴۹	−۳/۱۸	−۳/۵۲	−۲/۹۱	−۲/۶۰	۸/۹۶	۶/۵۷	۵/۵۶

مقادیر بحرانی برای آزمون ریشه واحد فصلی در داده‌های سه ماهه - ادامه

نوع مدل	n	$\pi_3=0$		$\pi_4=0$		$\pi_3=\pi_4=0$	
		٪۱	٪۵	٪۱	٪۵	٪۹۹	٪۵
بدون عرض از مبدأ، روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	−۲/۶۶	−۱/۹۳	−۲/۵۱	−۲/۱۱	۵/۰۲	۳/۲۶
	۱۰۰	−۲/۵۵	−۱/۹۰	−۲/۴۳	−۲/۰۱	۴/۸۹	۳/۱۲
	۱۳۶	−۲/۵۸	−۱/۹۲	−۲/۴۴	−۱/۹۹	۴/۸۱	۳/۱۴
	۲۰۰	−۲/۵۸	−۱/۹۲	−۲/۴۳	−۱/۹۸	۴/۸۱	۳/۱۶
با عرض از مبدأ، بدون روند و متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	−۲/۶۴	−۱/۹۰	−۲/۴۴	−۲/۰۶	۴/۷۸	۳/۰۴
	۱۰۰	−۲/۶۱	−۱/۹۰	−۲/۳۸	−۱/۹۹	۴/۷۷	۳/۰۸
	۱۳۶	−۲/۵۳	−۱/۸۸	−۲/۳۶	−۱/۹۸	۴/۷۳	۳/۰۰
	۲۰۰	−۲/۵۷	−۱/۹۰	−۲/۳۶	−۱/۹۸	۴/۷۶	۳/۱۲
با عرض از مبدأ و متغیرهای مجازی فصلی، بدون روند	۴۸	−۴/۳۱	−۳/۶۱	−۲/۸۶	−۲/۳۷	۹/۲۲	۶/۶۰
	۱۰۰	−۴/۰۶	−۳/۴۴	−۲/۷۸	−۲/۳۲	۸/۷۴	۶/۵۷
	۱۳۶	−۴/۰۶	−۳/۴۴	−۲/۷۲	−۲/۳۱	۸/۹۲	۶/۶۳
	۲۰۰	−۴/۰۰	−۳/۳۸	−۲/۷۴	−۲/۳۳	۸/۹۳	۶/۶۱
با عرض از مبدأ و روند، بدون متغیرهای مجازی فصلی	۴۸	−۲/۶۸	−۱/۹۲	−۲/۴۱	−۲/۰۵	۴/۶۴	۲/۹۵
	۱۰۰	−۲/۵۶	−۱/۸۹	−۲/۳۸	−۱/۹۷	۴/۷۰	۲/۹۸
	۱۳۶	−۲/۵۶	−۱/۹۰	−۲/۳۶	−۱/۹۷	۴/۵۷	۳/۰۴
	۲۰۰	−۲/۵۸	−۱/۹۲	−۲/۳۵	−۱/۹۷	۴/۶۶	۳/۰۷
با عرض از مبدأ، متغیرهای مجازی فصلی و روند	۴۸	−۴/۴۶	−۳/۶۶	−۲/۷۵	−۲/۲۶	۹/۲۷	۶/۵۵
	۱۰۰	−۴/۱۲	−۳/۴۸	−۲/۷۶	−۲/۳۲	۸/۷۹	۶/۶۰
	۱۳۶	−۲/۰۵	−۳/۴۴	−۲/۷۱	−۲/۷۸	۸/۷۷	۶/۶۲
	۲۰۰	−۲/۰۴	−۳/۴۱	−۲/۶۵	−۲/۲۷	۸/۹۶	۶/۵۷

مقادیر بحرانی بنرجی- دولادو- مستر

تعدادمتغیرهای)Kتوضیحی (	حجم نمونه)n(	با عرض از مبدأ و بدون روند			با عرض از مبدأ و روند		
		۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۵	۰/۱
۱	۲۵	-۴/۱۲	-۳/۳۵	-۲/۹۵	-۴/۷۷	-۳/۸۹	-۳/۴۸
	۵۰	-۳/۹۴	-۳/۲۸	-۲/۹۳	-۴/۴۸	-۳/۷۸	-۳/۴۴
	۱۰۰	-۳/۹۲	-۳/۲۷	-۲/۹۴	-۴/۳۵	-۳/۷۵	-۳/۴۳
	۵۰۰	-۳/۸۲	-۳/۲۳	-۲/۹۰	-۴/۳۰	-۳/۷۱	-۳/۴۱
	۵۰۰۰	-۳/۷۸	-۳/۱۹	-۲/۸۹	-۴/۲۷	-۳/۶۹	-۳/۳۹
۲	۲۵	-۴/۵۳	-۳/۶۴	-۳/۲۴	-۵/۱۲	-۴/۱۸	-۳/۷۲
	۵۰	-۴/۲۹	-۳/۵۷	-۳/۲۰	-۴/۷۶	-۴/۰۴	-۳/۶۶
	۱۰۰	-۴/۲۲	-۳/۵۶	-۳/۲۲	-۴/۶۰	-۳/۹۸	-۳/۶۶
	۵۰۰	-۴/۱۱	-۳/۵۰	-۳/۱۹	-۴/۵۴	-۳/۹۴	-۳/۶۴
	۵۰۰۰	-۴/۰۶	-۳/۴۸	-۳/۱۹	-۴/۵۱	-۳/۹۱	-۳/۶۲
۳	۲۵	-۴/۹۲	-۳/۹۱	-۳/۴۶	-۵/۴۲	-۴/۳۹	-۳/۸۹
	۵۰	-۴/۵۹	-۳/۸۲	-۳/۴۵	-۵/۰۴	-۴/۲۵	-۳/۸۶
	۱۰۰	-۴/۴۹	-۳/۸۲	-۳/۴۷	-۴/۸۶	-۴/۱۹	-۳/۸۶
	۵۰۰	-۴/۴۷	-۳/۷۷	-۳/۴۵	-۴/۷۶	-۴/۱۵	-۳/۸۴
	۵۰۰۰	-۴/۴۶	-۳/۷۴	-۳/۴۲	-۴/۷۲	-۴/۱۲	-۳/۸۲
۴	۲۵	-۵/۲۷	-۴/۱۸	-۳/۶۸	-۵/۷۹	-۴/۵۶	-۴/۰۴
	۵۰	-۴/۸۵	-۴/۰۵	-۳/۶۴	-۵/۲۱	-۴/۴۳	-۴/۰۳
	۱۰۰	-۴/۷۱	-۴/۰۳	-۳/۶۷	-۵/۰۷	-۴/۳۸	-۴/۰۲
	۵۰۰	-۴/۶۲	-۳/۹۹	-۳/۶۷	-۴/۹۳	-۴/۳۴	-۴/۰۲
	۵۰۰۰	-۴/۵۷	-۳/۹۷	-۳/۶۶	-۴/۸۹	-۴/۳۰	-۴/۰۰
۵	۲۵	-۵/۵۳	-۴/۴۶	-۳/۸۲	-۶/۱۸	-۴/۷۶	-۴/۱۶
	۵۰	-۵/۰۴	-۴/۴۳	-۳/۸۲	-۵/۳۷	-۴/۶۰	-۴/۱۹
	۱۰۰	-۴/۹۲	-۴/۳۰	-۳/۸۵	-۵/۲۴	-۴/۵۵	-۴/۱۹
	۵۰۰	-۴/۸۱	-۴/۳۹	-۳/۸۶	-۵/۱۵	-۴/۵۴	-۴/۲۰
	۵۰۰۰	-۴/۷۰	-۴/۲۷	-۳/۸۲	-۵/۱۱	-۴/۵۲	-۴/۱۸

منابع

۱. ابریشمی، حمید و محسن مهرآرا، اقتصاد سنجی کاربردی (رویکردهای نوین)، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ اول، ۱۳۸۱.

۲. ادکینز، لی سی. و آر. کارتر هیل، استفاده از Stata برای مبانی اقتصاد سنجی، ترجمه: حمید هوشمندی، مؤسسه خدمات فرهنگی رسا، چاپ اول، ۱۳۹۰.

۳. اشرف زاده، سیدحمیدرضا و نادر مهرگان، اقتصادسنجی پانل دیتا، نشر مؤسسه تحقیقات تعاون دانشگاه تهران،۱۳۸۷.

۴. اشمیت، استیفن، اقتصادسنجی، ترجمه: علی قنبری، نشر پژوهشکده اقتصاد دانشگاه تربیت مدرس و نشر نورعلم، ۱۳۸۸.

۵. اندرس، والتر، اقتصاد سنجی سری‌های زمانی با رویکرد کاربردی، ترجمه: مهدی صادقی شاهدانی و سعید شوال‌پور، دانشگاه امام صادق (ع)، چاپ اول، ۱۳۸۶.

۶. اندرسن، الیور، تجزیه و تحلیل سری‌های زمانی و پیش‌بینی، ترجمه: ابوالقاسم بزرگ‌نیا، انتشارات آستان قدس رضوی، چاپ اول ۱۳۶۶.

۷. بالتاجی، بدی، اقتصاد سنجی، ترجمه: رضا طالبلو و شعله باقری پرمهر، نشر نی، چاپ اول ۱۳۹۱.

۸. بیتز، داگلاس و دونالد واتز، تحلیل رگرسیون غیرخطی و کاربردهای آن، ترجمه حجت رضایی‌پژند و ابولقاسم بزرگ‌نیا، دانشگاه فردوسی مشهد، چاپ دوم، بهار ۱۳۸۹.

۹. تشکینی، احمد، اقتصادسنجی کاربردی به کمک Microfit، مؤسسه فرهنگی و هنری دیباگران، تهران ۱۳۸۴.

۱۰. توکلی، احمد، تحلیل سری‌های زمانی: همگرایی و همگرایی یکسان، مؤسسه مطالعات و پژوهش‌های بازرگانی، چاپ اول، ۱۳۷۶.
۱۱. توکلی، اکبر، اقتصادسنجی کاربردی، انتشارات مانی، ۱۳۷۸.
۱۲. جانسون، جک و جان دیناردو، روشهای اقتصادسنجی، ترجمه: فریدون اهرابی و علی اکبر خسروی نژاد، نشر نور علم، ۱۳۸۸.
۱۳. داتا، م.، روشهای اقتصادسنجی، ترجمه: ابوالقاسم هاشمی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۹.
۱۴. درخشان، مسعود، اقتصادسنجی تک معاملات با فروض کلاسیک، انتشارات سمت، ۱۳۷۴.
۱۵. رائو، باسکارا، همگرایی و کاربردهای اقتصادی آن، ترجمه: علی حسین صمدی، دانشگاه آزاداسلامی و نشر ساسان، چاپ اول، ۱۳۷۷.
۱۶. روشن، رضا، کاربرد برنامه نویسی Eviews در اقتصادسنجی، انتشارت نورعلم، چاپ اول، ۱۳۸۶.
۱۷. سوری، علی، اقتصاد ریاضی: روش‌ها و کاربردها، انتشارات سمت، چاپ هفتم، ۱۳۹۱.
۱۸. شاهرودی، محمد، همگام با اقتصادسنجی Microsoft، نشر نورعلم، ۱۳۸۷.
۱۹. شیرین‌بخش، شمس الله و زهرا حسن خوانساری، کاربرد Eviews در اقتصادسنجی، پژوهشکده امور اقتصادی، ۱۳۸۴.
۲۰. اُکانل، پیش‌بینی سری‌های زمانی، ترجمه: رضا شیوا، مؤسسه مطالعات و پژوهش‌های بازرگانی، چاپ اول، ۱۳۷۵.
۲۱. صدیقی، اچ.آر. و کی.ا. لاویر، اقتصاد سنجی: رهیافت کاربردی، ترجمه: شمس‌الله شیرین‌بخش، انتشارات آوای نور، چاپ اول، ۱۳۸۶.

۲۲. صفایی، مریم، برآورد احتمال تغیير وضعیت رفتار سری‌های زمانی مالی با استفاده از مدل اتورگرسیو تبدیلی مارکف، مجله علوم آماری، جلد ۵، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۰، ص ۱۱۸-۱۰۷.
۲۳. صمدی، علی حسین، روابط کاذب در اقتصاد سنجی، دانشکده علوم اقتصادی و انتشارات نورعلم، چاپ اول، ۱۳۸۸.
۲۴. صمدی، علی، حسین و مصیب پهلوانی، همجمعی و شکست ساختاری در اقتصاد، نشر نور علم، ۱۳۸۸.
۲۵. عباسی نژاد، حسین، اقتصادسنجی پیشرفته، نشر برادران، ۱۳۸۶.
۲۶. عباسی نژاد، حسین و احمد تشکینی، اقتصادسنجی کاربردی پیشرفته، انتشارت دانشکده علوم اقتصادی و نور علم، ۱۳۸۹.
۲۷. عرب مازار، عباس، اقتصادسنجی عمومی، انتشارات کویر، ۱۳۶۹.
۲۸. گجراتی، دامودار، مبانی اقتصادسنجی، ترجمه: حمید ابریشمی، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ سوم، ۱۳۸۳.
۲۹. گجراتی، دامودار، اقتصاد سنجی کاربردی، ترجمه: نادر مهرگان و لطفعلی عاقلی، نشر نور علم، چاپ اول، ۱۳۹۲.
۳۰. مادالا، جی.اس. و این. مو. کیم، ریشه‌های واحد، هم‌جمعی و تغییر ساختاری، ترجمه: محمد فرقانی و همکاران، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، چاپ اول، ۱۳۸۹.
۳۱. محمدی، تیمور و پرویز محمدزاده، اقتصاد سنجی، انتشارات ترمه، چاپ اول، ۱۳۸۹.
۳۲. مرادی، علیرضا، کاربرد Eviews در اقتصادسنجی، سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی واحد تهران، چاپ اول، ۱۳۸۴.
۳۳. نوفرستی، محمد، ریشه واحد و همجمعی در اقتصادسنجی، مؤسسه خدمات فرهنگی رسا، چاپ اول، ۱۳۸۷.

۳۴. وی، ویلیام دبلیو. اس.، تحلیل سری‌های زمانی: روش‌های یک متغیری و چند متغیری، ترجمه: حسینعلی نیرومند، انتشارت دانشگاه فردوسی مشهد، چاپ اول، ۱۳۷۶.

۳۵. ویتینگ، دیک، ار.، کاربرد و تحلیل رگرسیونی، ترجمه: حمید ابریشمی و تیمور محمدی، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ اول، ۱۳۷۴.

36. Alexander, C. (2001) Orthogonal GARCH in Alexander, C. (ed.), Mastering Risk Volume 2, FT-Prentice-Hall, New York.

37. Bauwens, L., Laurent, S. and Rombouts, J. V. K. (2006) Multivariate GARCH Models: A Survey, Journal of Applied Econometrics 21, 79-109.

38. Bollerslev, T. (1986) Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, Journal of Econometrics 31, 307-27.

39. Brooks, C. (2008) Introductory Econometrics for Finance, 2nd edn., Cambridge University Press, New York.

40. Engle, R. F. and Kroner, K. F. (1995) Multivariate Simultaneous Generalized GARCH, Econometric Theory 11, 122-50.

41. Engle, R. F. and Ng, V. K. (1993) Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, Journal of Finance 48, 1749-78.

42. Eviews 7 User's Guide I and II, Quantitative Microsoft Software, 1994-2009.

43. Ghosh, S. K. (1991) Econometrics: Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

44. Gibbons, M. R. and Hess, P. (1981) Day of the Week Effects and Asset Returns, Journal of Business 54(4), 579-96.

45. Greene, W. H. (2012) Econometric Analysis 6th edn., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

46. Gujarati, D. N. (2003) Basic Econometrics 4th edn., McGraw-Hill, New York.

47. Hamilton, J. D. (1994) Time Series Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ.

48. Kmenta, J. (1990) Elements of Econometrics, Macmillan Publishing Company, New York.

49. Stock, J. H. and Watson, M. W. (2006) Introduction to Econometrics 2nd edn., Addison Wesley Upper Saddle River, NJ.

50. wooldridge, J.M. (2013), Introductory Econometrics, A Modern Approach, South-Western Cengage Learning.

51. Koop, Gary (2003), Bayesian Econometrics, John Wiley & Sons Ltd.

واژه‌نامه انگلیسی - فارسی

Adaptive expectation hypothesis	فرضیه انتظارات تطبیقی
Akaike Information Criterion (AIC)	معیار اطلاعات آکائیک
Almon polynomial lag	وقفه چندجمله ای آلمون
Analysis covariance	تحلیل کوواریانس
Analysis variance	تحلیل واریانس؛ تجزیه واریانس
Asymmetry	نامتقارن
Autocorrelation	خودهمبستگی
Autocorrelation coefficient	ضریب خودهمبستگی
Autocorrelation in volatility	خودهمبستگی در تغییرپذیری
Auto-Covariance	خودکواریانس
Autoregressive	خودرگرسیونی
Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH)	ناهمسانی واریانس شرطی خودرگرسیونی
Autoregressive distributed lag model (ARDL)	مدل وقفه توزیعی خودرگرسیون
Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)	میانگین متحرک خودرگرسیون انباشته
Bais	تورش؛ اریب
Bayes Factor	عامل بیز
Best Linear Unbaised Estimation (BLUE)	بهترین تخمین‌زنندهٔ بدون تورش خطی
Between groups	بین گروهی؛ بین گروه‌ها
Binary variable	متغیر دوتایی ؛ متغیر دوانتخابی
Box-Jenkins methodology	روش‌شناسی باکس- جنکینز
Box-Pierce Statiscic	آماره باکس- پیرس
Caninical correlation	همبستگی کانونی
Causality	علّیت
Censored	سانسورشده
Central limit theorem	قضیه حدی مرکزی
Chi-squqred distribution	توزیع کای‌دو
Chow breakpoint test	آزمون نقطه شکست چاو
Chow forecast test	آزمون پیش‌بینی چاو
Chow test	آزمون چاو
Clasical linear regression model	مدل رگرسیون خطی کلاسیک
Coefficient of adjustment	ضریب تعدیل

Cointegrated	هم‌انباشته
Cointegration	هم‌انباشتگی
Common trend	روند مشترک
Conditional distribution	توزیع شرطی
Conditional expectation	امید ریاضی شرطی
Conditional probability	احتمال شرطی
Consistency	سازگاری
Continuous	پیوسته
Correlation Coefficient	ضریب همبستگی
Count models	مدل‌های شمارشی
Covariance	کوواریانس
Critical region	ناحیه بحرانی
Critical value	عدد بحرانی
Cross-sectional data	داده‌های مقطعی
Cumulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
Deviance	انحراف
Distributed lag	وقفه توزیعی
Dummy variable	متغیر مجازی
Dummy variable trap	دام متغیر مجازی
Durbin h- test	آزمون h دوربین
Durbin-Watson test	آزمون دوربین- واتسون
Dynamic model	مدل پویا
Efficient	کارا
Endogenoud variable	متغیر درون‌زا
Engel-Granger test	آزمون انگل- گرانجر
Equilibrium Correction model	مدل تصحیح تعادل
Error Correction Model	مدل تصحیح خطا
Error of mesurment	خطای اندازه‌گیری
Estimation	تخمین
Estimator	تخمین‌زننده
Exactly identified	دقیقاً مشخص
Exogenous variable	متغیر برون‌زا
Expected value	ارزش انتظاری
Explaind Sum of Squares (ESS)	مجموع تغییرات توضیح داده شده
Explanatory variable	متغیر توضیحی
Exponential GARCH	مدل GARCH نمایی

F distribution	توزیع F
Fat tail	دم پهن؛ توزیع با دم‌های کشیده
Feasible Generalized Least Squares (FGLS)	حداقل مربعات تعمیم‌یافتهٔ قابل دسترس
Finite lag model	مدل وقفهٔ محدود
Firs order autoregressive	خودرگرسیون مرتبهٔ اول
First difference equation	معادلی تفاضلی مرتبه اول
Fit	برازش
Fixed Effects	اثرات ثابت
Fonctional form	شکل تبعی
Frish-Waugh Theorem	قضیه فریش- ویوگ
Full Information Maximum Likelihood	حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل
Full Information methods	روش‌های با اطلاعات کامل
Gamma distribution	توزیع گاما
Gauss-Markov theorem	قضیه گوس- مارکف
Generalised Least Squares (GLS)	حداقل مربعات تعمیم یافته
Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastistiy (GARCH)	ناهمسانی واریانس شرطی خودرگرسیون
Glejser test	آزمون گلجسر
Goldfeld-Quant test	آزمون گلدفلد- کوانت
Goodness of fit	خوبی برازش
Granger causulity test	آزمون علیت گرانجر
Hannan-Quinn Information Criteria (HQIC)	معیار اطلاعات حنان- کوئین
Hausman test	آزمون هاسمن
Hemoskedasticity	واریانس همسانی
Heteroskedasticity	واریانس ناهمسانی
Identifiability	قابلیت تشخیص؛ قابلیت شناسایی
Identification	تشخیص؛ شناسایی
Im, Pesaran and Shin test (IPS test)	آزمون ایم، پسران و شین
Indicisive zone	ناحیه عدم‌تصمیم گیری
Indirect Least Squares (ILS)	حداقل مربعات غیرمستقیم
Inference	استنتاج؛ نتیجه گیری
Infinite lag model	مدل وقفهٔ نامحدود
Information criteria	معیار اطلاعات
Information matrix	ماتریس اطلاعات
Instrumental Variables (IV)	متغیرهای ابزاری
Integrated	انباشته
Integrated GARCH (=IGARH)	مدل GARCH انباشته

Integration	انباشتگی
Interaction effects	اثرات متقابل
Intercept	عرض از مبدأ
Invers Gamma distribution	توزیع معکوس گاما
Inverse Mills Ratio	نسبت معکوس میلز
Jarque and Bera statistics	آماره جاکیو-برا
Joint distribution	توزیع مشترک
Koyek transformation	تبدیل کویک
Kurtosis	کشیدگی
Lag	وقفه
Lagrange Multiplier	ضریب لاگرانژ
Least squares	حداقل مربعات
Least Squares Dummy Variables (LSDV)	حداقل مربعات متغیرهای مجازی
Length of lag	طول وقفه
Level of significance	سطح اطمینان
Levin, Lin and Chu test (LLC test)	آزمون لوین، لین و چو
Likelihood function	تابع درستنمایی
likelihood Ratio	نسبت درستنمایی
Likelihood Ratio Index	شاخص نسبت درستنمایی
Limited Information Maximum Likelihood	حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود
Linear	خطی
Linear dependence	وابستگی خطی
Linear constrians	محدودیت‌های خطی؛ قیود خطی
Linear independence	استقلال خطی
Linear lag model	مدل وقفه خطی
Linear Probability Model (LPM)	مدل احتمال خطی
Linear regression	رگرسیون خطی
Linearity	خطی بودن
Logit model	مدل لاجیت
Long-run effects	اثرات بلندمدت
Loss function	تابع زیان
Maximum likelihood	حداکثر درستنمایی
Mean Absolute Error (MAE)	میانگین قدرمطلق خطا
Mean Absolute Percentage Error (MAPE)	میانگین درصد قدرمطلق خطا
Mean lag	مایتگین وقفه
Mean Squared Error (MSE)	میانگین مجذور خطا

Median lag	میانه وقفه
Minimum variance	حداقل واریانس
Model misspecification error	خطای تصریح نادرست مدل
Moving Average (MA)	میانگین متحرک
Multiple regression	رگرسیون چند متغیره؛ رگرسیون مرکب
Multiplicative models	مدل‌های ضربی
Multivariate-GARCH (MGARCH)	مدل GARCH چند متغیره
Non-Liner Least Squares (NLS)	حداقل مربعات غیرخطی
Normal equations	معادلات نرمال
Omission of relevant variable	حذف متغیر نامربوط
Order condition	شرط درجه‌ای
Ordinary Least Squares (OLS)	حداقل مربعات معمولی
Outlier	دور افتاده؛ پرت
Over-Indentification	بیش از حد مشخص
Panel data	داده‌های ترکیبی
Partial adjustment hypothesis	فرضیه تعدیلات جزئی
Partial Autocorrelation coefficients	ضرایب خودهمبستگی جزئی
Percent Correctly Predicted	درصد پیش‌بینی صحیح
Piecewise linear models	مدل‌های خطی قطعه‌ای
Point estimation	تخمین نقطه‌ای
Polynomial Distributed Lags (PDL)	وقفه‌های توزیعی چندجمله‌ای
Pooled data	داده‌های تجمیعی
Pooled regression	رگرسیون تجمیعی
Pooled-OLS	حداقل مربعات تجمیعی
Pooling	تجمیعی
Population	جامعه
Posterior distribution	توزیع پسین
Power of test	توان آزمون
Predetermined	از قبل تعیین‌شده
Prior distribution	توزیع پیشین
Prior information	اطلاعات پیشین
Probability limit (plim)	حد احتمال
Probit model	مدل پروبیت
Proxy	جانشین
Qualitative explanatory variable	متغیر توضیحی کیفی
Qualitative variable	متغیر کیفی

شبه‌حداکثر درستنمایی	Quasi Maximum Likelihood (QML)
آزمون رمزی	Ramsey's RESET test
اثرات تصادفی	Random effects
گام تصادفی	Random walk
گام تصادفی با رانش	Random walk with drift
شرط رتبه‌ای	Rank condition
وقایع نادر	Rare events
فرضیه انتظارات عقلایی	Rational expextation hypothesis
مدل وقفه عقلایی	Rational lag model
دور تجاری حقیقی	Real business cycle
مدل عطفی	Recursive model
فرم خلاصه شده؛ فرم حل شده	Reduced form
ضرایب فرم حل شده	Reduced form coefficents
باقیمانده؛ پسماند	Residual
مجموع مجذور باقیمانده‌ها	Residual Sum of Squares (RSS)
مقید؛ محدود شده	Restricted
حداقل مربعات مقید	Restricted least squares
مستحکم	Robust
نمونه	Sampl
رگرسیون نمونه	Sample regression
آزمون سارگان	Sargan test
معیار اطلاعات بیزین شوارتز	Schwarz-Bayesian Information Criterion (SBIC)
تابع امتیاز	Score function
امتیازدهی	Scoring
مدل ARMA فصلی	Seasonal ARMA (SARMA)
جزء فصلی	Seasonal component
عامل فصلی	Seasonal factor
رگرسیون به‌ظاهر نامرتبط	Seemingly Unrelated Regression (SUR)
همبستگی سریالی	Serial correlation
مدل معادلات همزمان	Simultanous equations model
مدل تک معادله‌ای	Single equation model
چولگی	Skewness
آزمون همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن	Spearman's rank correlation test
تصریح	Specefication
تورش تصریح	Specefication bais
خطای تصریح	Specefication error

سرعت تعدیل	Speed of adjustment
رگرسیون کاذب	Spurious regression
انحراف معیار	Standard diviation
خطای معیار	Standard error
استاندارد شده	Standardized
باقیمانده‌های استانداردشده	Standardized residuals
متغیر استاندارد شده	Standardized variable
متغیر تعیین‌کنندهٔ وضعیت	State–determining variable
ایستا	Static
مانا، پایا	Stationary
تصادفی	Stochastic
فرایند تصادفی	Stochastic process
ضرایب ساختاری	Structural coefficients
معادله ساختاری	Structural equation
فرم ساختاری	Structural form
احتمال ذهنی	Subjective probability
توزیع t	t distribution
آزمون معنی‌دار بودن	Test of significant
ضریب نابرابری تایل	Theil inequality coefficient
حداقل مربعات سه مرحله‌ای	Three Stage Least Squares (3SLS)
مدل ARCH آستانه	Threshold ARCH
مدل‌های خودرگرسیون آستانه	Threshold Autoregressive Models
ارزش آستانه	Threshold Value
وقفه زمانی	Time lag
سری‌های زمانی	Time series
مدل توبیت	Tobit model
مجموع مجذورات کل؛ تغییرات کل	Total Sum of Squares (TSS)
اثر	Trace
ماتریس انتقال	Transition matrix
فرایند روند مانا	Trens stationary (TS) process
منقطع	Truncated
حداقل مربعات دومرحله‌ای	Two Stage Least Squares (2SLS)
خطای نوع اول	Type I error
خطای نوع دوم	Type II error
بدون تورش؛ ناااریب	Unbiased
نا مشخص؛ غیر قابل شناسایی	Unidentification (Under-Identification)

Unobserved heterogeneity	ناهمگنی غیرقابل مشاهده
Unrestricted	غیر مقید
Variance	واریانس
Variance-covariance matrix	ماتریس واریانس- کوواریانس
Vector Autoregressive (VAR)	خودرگرسیون برداری
Vector Error Correction Model (VECM)	مدل تصحیح خطای برداری
Wald test	آزمون والد
Weighted Least Squares (WLS)	حداقل مربعات وزنی
Within group	درون‌گروهی
Wold's Decomposition Theorem	قضیه تجزیه ولد

واژه‌نامه فارسی- انگلیسی

اثر	Trace
اثرات بلندمدت	Long-run effects
اثرات تصادفی	Random effects
اثرات ثابت	Fixed Effects
اثرات متقابل	Interaction effects
احتمال ذهنی	Subjective probability
احتمال شرطی	Conditional probability
ارزش انتظاری	Expected value
ارزش آستانه	Threshold Value
از قبل تعیین‌شده	Predetermined
استاندارد شده	Standardized
استقلال خطی	Linear independence
استنتاج؛ نتیجه‌گیری	Inference
اطلاعات پیشین	Prior information
امتیازدهی	Scoring
امید ریاضی شرطی	Conditional expectation
انباشتگی	Integration
انباشته	Integrated
انحراف	Deviance
انحراف معیار	Standard diviation
ایستا	Static
آزمون h دوربین	Durbin h- test
آزمون انگل- گرانجر	Engel-Granger test
آزمون ایم، پسران و شین	Im, Pesaran and Shin test (IPS test)
آزمون پیش‌بینی چاو	Chow forecast test
آزمون چاو	Chow test
آزمون دوربین- واتسون	Durbin-Watson test
آزمون رمزی	Ramsey's RESET test
آزمون سارگان	Sargan test
آزمون علیت گرانجر	Granger causality test
آزمون گلجسر	Glejser test
آزمون گلدفلد- کوانت	Goldfeld-Quant test

آزمون لوین، لین و چو	Levin, Lin and Chu test (LLC test)
آزمون معنی‌دار بودن	Test of significant
آزمون نقطه شکست چاو	Chow breakpoint test
آزمون والد	Wald test
آزمون هاسمن	Hausman test
آزمون همبستگی رتبه‌ای اسپیرمن	Spearman's rank correlation test
آماره باکس- پیرس	Box-Pierce Statiscic
آماره جاکیو- برا	Jarque and Bera statistics
باقیمانده؛ پسماند	Residual
باقیمانده‌های استانداردشده	Standardized residuals
بدون تورش؛ نااریب	Unbiased
برازش	Fit
بهترین تخمین‌زنندهٔ بدون تورش خطی	Best Linear Unbaised Estimation (BLUE)
بیش از حد مشخص	Over-Indentification
بین گروهی؛ بین گروه‌ها	Between groups
پیوسته	Continuous
تابع امتیاز	Score function
تابع توزیع تجمعی	Cumulative distribution function
تابع درستنمایی	Likelihood function
تابع زیان	Loss function
تبدیل کویک	Koyek transformation
تجمیعی	Pooling
تحلیل کوواریانس	Analysis covariance
تحلیل واریانس؛ تجزیه واریانس	Analysis variance
تخمین	Estimation
تخمین نقطه‌ای	Point estimation
تخمین‌زننده	Estimator
تشخیص؛ شناسایی	Identification
تصادفی	Stochastic
تصریح	Specefication
توان آزمون	Power of test
تورش تصریح	Specefication bais
تورش؛ اریب	Bais
توزیع F	F distribution
ترزیع t	t distribution
توزیع پسین	Posterior distribution

توزیع پیشین	Prior distribution
توزیع شرطی	Conditional distribution
توزیع کای‌دو	Chi-squqred distribution
توزیع گاما	Gamma distribution
توزیع مشترک	Joint distribution
توزیع معکوس گاما	Invers Gamma distribution
جامعه	Population
جانشین	Proxy
جزء فصلی	Seasonal component
چولگی	Skewness
حد احتمال	Probability limit (plim)
حداقل مربعات	Least squares
حداقل مربعات تجمیعی	Pooled-OLS
حداقل مربعات تعمیم یافته	Generalised Least Squares (GLS)
حداقل مربعات تعمیم‌یافتهٔ قابل دسترس	Feasible Generalized Least Squares (FGLS)
حداقل مربعات دومرحله‌ای	Two Stage Least Squares (2SLS)
حداقل مربعات سه مرحله‌ای	Three Stage Least Squares (3SLS)
حداقل مربعات غیرخطی	Non-Liner Least Squares (NLS)
حداقل مربعات غیرمستقیم	Indirect Least Squares (ILS)
حداقل مربعات متغیرهای مجازی	Least Squares Dummy Variables (LSDV)
حداقل مربعات معمولی	Ordinary Least Squares (OLS)
حداقل مربعات مقید	Restricted least squares
حداقل مربعات وزنی	Weighted Least Squares (WLS)
حداقل واریانس	Minimum variance
حداکثر درستنمایی	Maximum likelihood
حداکثر درستنمایی با اطلاعات کامل	Full Information Maximum Likelihood
حداکثر درستنمایی با اطلاعات محدود	Limited Information Maximum Likelihood
حذف متغیر نامربوط	Omission of relevant variable
خطای اندازه‌گیری	Error of mesumment
خطای تصریح	Specefication error
خطای تصریح نادرست مدل	Model misspecification error
خطای معیار	Standard error
خطای نوع اول	Type I error
خطای نوع دوم	Type II error
خطی	Linear
خطی بودن	Linearity

خوبی برازش	Goodness of fit
خودرگرسیون برداری	Vector Autoregressive (VAR)
خودرگرسیون مرتبهٔ اول	Firs order autoregressive
خودرگرسیونی	Autoregressive
خودکواریانس	Auto-Covariance
خودهمبستگی	Autocorrelation
خودهمبستگی در تغییرپذیری	Autocorrelation in volatility
داده‌های تجمیعی	Pooled data
داده‌های ترکیبی	Panel data
داده‌های مقطعی	Cross-sectional data
دام متغیر مجازی	Dummy variable trap
درصد پیش‌بینی صحیح	Percent Correctly Predicted
درون‌گروهی	Within group
دقیقاً مشخص	Exactly identified
دم پهن؛ توزیع با دم‌های کشیده	Fat tail
دور افتاده؛ پرت	Outlier
دور تجاری حقیقی	Real business cycle
رگرسیون به‌ظاهر نامرتبط	Seemingly Unrelated Regression (SUR)
رگرسیون تجمیعی	Pooled regression
رگرسیون چند متغیره؛ رگرسیون مرکب	Multiple regression
رگرسیون خطی	Linear regression
رگرسیون کاذب	Spurious regression
رگرسیون نمونه	Sample regression
روش‌شناسی باکس- جنکینز	Box-Jenkins methodology
روش‌های با اطلاعات کامل	Full Information methods
روند مشترک	Common trend
سازگاری	Consistency
سانسورشده	Censored
سرعت تعدیل	Speed of adjustment
سری‌های زمانی	Time series
سطح اطمینان	Level of significance
شاخص نسبت درستنمایی	Likelihood Ratio Index
شبه‌حداکثر درستنمایی	Quasi Maximum Likelihood (QML)
شرط درجه‌ای	Order condition
شرط رتبه‌ای	Rank condition
شکل تبعی	Fonctional form

ضرایب خودهمبستگی جزئی	Partial Autocorrelation coefficients
ضرایب ساختاری	Structural coefficients
ضرایب فرم حل شده	Reduced form coefficents
ضریب تعدیل	Coefficient of adjustment
ضریب خودهمبستگی	Autocorrelation coefficient
ضریب لاگرانژ	Lagrange Multiplier
ضریب نابرابری تایل	Theil inequality coefficient
ضریب همبستگی	Correlation Coefficient
طول وقفه	Lentgh of lag
عامل بیز	Bayes Factor
عامل فصلی	Seasonal factor
عدد بحرانی	Critical value
عرض از مبدأ	Intercept
علّیت	Causality
غیر مقید	Unrestricted
فرایند تصادفی	Stochastic process
فرایند روند مانا	Trens stationary (TS) process
فرضیه انتظارات تطبیقی	Adaptive expectation hypothesis
فرضیه انتظارات عقلایی	Rational expextation hypothesis
فرضیه تعدیلات جزئی	Partial adjustment hypothesis
فرم خلاصه شده؛ فرم حل شده	Reduced form
فرم ساختاری	Structural form
قابلیت تشخیص؛ قابلیت شناسایی	Identifiability
قضیه تجزیه ولد	Wold's Decomposition Theorem
قضیه حدی مرکزی	Central limit theorem
قضیه فریش- ویوگ	Frish-Waugh Theorem
قضیه گوس- مارکف	Gauss-Markov theorem
کارا	Efficient
کشیدگی	Kurtosis
کوواریانس	Covariance
گام تصادفی	Random walk
گام تصادفی با رانش	Random walk with drift
ماتریس اطلاعات	Information matrix
ماتریس انتقال	Transition matrix
ماتریس واریانس- کوواریانس	Variance-covariance matrix
مانا؛ پایا	Stationary

میانگین وقفه	Mean lag
متغیر استاندارد شده	Standardized variable
متغیر برون‌زا	Exogenous variable
متغیر تعیین‌کنندهٔ وضعیت	State-determining variable
متغیر توضیحی	Explanatory variable
متغیر توضیحی کیفی	Qualitative explanatory variable
متغیر درون‌زا	Endogenoud variable
متغیر دوتایی ؛ متغیر دوانتخابی	Binary variable
متغیر کیفی	Qualitative variable
متغیر مجازی	Dummy variable
متغیرهای ابزاری	Instrumental Variables (IV)
مجمع تغییرات توضیح داده شده	Explaind Sum of Squares (ESS)
مجموع مجذور باقیمانده‌ها	Residual Sum of Squares (RSS)
مجموع مجذورات کل؛ تغییرات کل	Total Sum of Squares (TSS)
محدودیت‌های خطی؛ قیود خطی	Linear constrians
مدل ARCH آستانه	Threshold ARCH
مدل ARMA فصلی	Seasonal ARMA (SARMA)
مدل GARCH انباشته	Integrated GARCH (=IGARH)
مدل GARCH چند متغیره	Multivariate-GARCH (MGARCH)
مدل GARCH نمایی	Exponential GARCH
مدل احتمال خطی	Linear Probability Model (LPM)
مدل پروبیت	Probit model
مدل پویا	Dynamic model
مدل تصحیح تعادل	Equilibrium Correction model
مدل تصحیح خطا	Error Correction Model
مدل تصحیح خطای برداری	Vector Error Correction Model (VECM)
مدل تک معادله‌ای	Single equation model
مدل توبیت	Tobit model
مدل رگرسیون خطی کلاسیک	Clasical linear regression model
مدل عطفی	Recursive model
مدل لاجیت	Logit model
مدل معادلات همزمان	Simultanous equations model
مدل وقفه توزیعی خودرگرسیون	Autoregressive distributed lag model (ARDL)
مدل وقفه خطی	Linear lag model
مدل وقفه عقلایی	Rational lag model
مدل وقفهٔ محدود	Finite lag model

مدل وقفهٔ نامحدود	Infinite lag model
مدل‌های خطی قطعه‌ای	Piecewise linear models
مدل‌های خودرگرسیون آستانه	Threshold Autoregressive Models
مدل‌های شمارشی	Count models
مدل‌های ضربی	Multiplicative models
مستحکم	Robust
معادلات نرمال	Normal equations
معادله ساختاری	Structural equation
معادلی تفاضلی مرتبه اول	First difference equation
معیار اطلاعات	Information criteria
معیار اطلاعات آکائیک	Akaike Information Criterion (AIC)
معیار اطلاعات بیزین شوارتز	Schwarz-Bayesian Information Criterion (SBIC)
معیار اطلاعات حنان- کوئین	Hannan–Quinn Information Criteria (HQIC)
مقید؛ محدود شده	Restricted
منقطع	Truncated
میانگین درصد قدرمطلق خطا	Mean Absolute Percentage Error (MAPE)
میانگین قدرمطلق خطا	Mean Absolute Error (MAE)
میانگین متحرک	Moving Average (MA)
میانگین متحرک خودرگرسیون انباشته	Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA)
میانگین مجذور خطا	Mean Squared Error (MSE)
میانه وقفه	Median lag
نا شمخص؛ غیر قابل شناسایی	Unidentification (Under-Identification)
ناحیه بحرانی	Critical region
ناحیه عدم‌تصمیم گیری	Indicisive zone
نامتقارن	Asymmetry
ناهمسانی واریانس شرطی خودرگرسیون تعمیم‌یافته	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastistiy (GARCH)
ناهمسانی واریانس شرطی خودرگرسیونی	Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH)
ناهمگنی غیرقابل مشاهده	Unobserved heterogeneity
نسبت درستنمایی	likelihood Ratio
نسبت معکوس میلز	Inverse Mills Ratio
نمونه	Sampl
وابستگی خطی	Linear dependence
واریانس	Variance
واریانس ناهمسانی	Heteroskedasticity
واریانس همسانی	Hemoskedasticity
وقایع نادر	Rare events

وقفه	Lag
وقفه توزیعی	Distributed lag
وقفه چندجمله ای آلمون	Almon polynomial lag
وقفه زمانی	Time lag
وقفه‌های توزیعی چندجمله‌ای	Polynomial Distributed Lags (PDL)
هم‌انباشتگی	Cointegration
هم‌انباشته	Cointegrated
همبستگی سریالی	Serial correlation
همبستگی کانونی	Caninical correlation

نمایه موضوعی